

# 基于人工蜂群算法的混沌系统参数估计<sup>①</sup>



刘文霞<sup>1</sup>, 王荣杰<sup>1,2</sup>, 韩冉<sup>1</sup>, 郜怀通<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(集美大学 轮机工程学院, 厦门 361021)

<sup>2</sup>(福建省船舶与海洋重点实验室, 厦门 361021)

通讯作者: 王荣杰, E-mail: roger811207@163.com

**摘要:** 为了更准确的估计混沌系统的未知参数, 提出了一种基于人工蜂群算法的混沌系统参数辨识方法, 该方法将混沌系统中参数估计转化为多维变量的函数优化问题, 利用搜索方程对多维空间变量进行充分搜索, 通过优化人工蜂群算法计算估计值与真值之间的均方差, 从而估计出混沌系统的参数. Lorenz 混沌系统的参数辨识仿真实验结果表明了该方法的可行性, 并且算法收敛速度快, 估计精度高.

**关键词:** 混沌系统; 参数估计; 人工蜂群算法; Lorenz 系统

引用格式: 刘文霞, 王荣杰, 韩冉, 郜怀通. 基于人工蜂群算法的混沌系统参数估计. 计算机系统应用, 2021, 30(3): 142-150. <http://www.c-s-a.org.cn/1003-3254/7831.html>

## Artificial Bee Colony Algorithm in Parameter Estimation of Chaotic Systems

LIU Wen-Xia<sup>1</sup>, WANG Rong-Jie<sup>1,2</sup>, HAN Ran<sup>1</sup>, GAO Huai-Tong<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(School of Marine Engineering, Jimei University, Xiamen 361021, China)

<sup>2</sup>(Fujian Province Key Laboratory of Naval Architecture and Marine Engineering, Xiamen 361021, China)

**Abstract:** In order to estimate the unknown parameters of the chaotic systems more accurately, we propose a method for the parameter estimation of chaotic systems based on the artificial bee colony algorithm. This method converts the parameter estimation of chaotic systems to the function optimization problem of a multi-dimensional variable and then uses a search equation to fully search the multi-dimensional spatial variable. Furthermore, the optimized artificial bee colony algorithm is applied to calculate the mean square error between the estimated value and the true value, so as to realize the parameter estimation in the chaotic systems. In addition, the results of parameter estimation simulation of the Lorenz chaotic system indicate the feasibility of the proposed method. Besides, the improved algorithm has fast convergence and high estimation accuracy.

**Key words:** chaotic system; parameter estimation; artificial bee colony algorithm; Lorenz system

非线性科学是近些年来研究的热点之一, Wang 等<sup>[1]</sup> 将非线性系统应用于伺服电机的控制中, Zhang 等<sup>[2]</sup> 应用超谐波响应分析法测试旋转叶片受气压影响的形变程度, Zheng 等<sup>[3]</sup> 运用非线性系统到分子动力学, 充分

说明了对非线性系统研究的重要性. 自 1963 年 Lorenz 提出了第一个具有非线性动力学特性的混沌吸引子, 即 Lorenz 系统. 此后, 学术界对混沌系统的研究逐渐深入. 2020 年, Peng 等将改进的返回结果映射法应

① 基金项目: 国家自然科学基金 (51879118); 福建省高等学校新世纪优秀人才支持计划 (B17159); 福建省科技拥军项目 (B19101); 农业部渔业装备与工程重点实验室基金 (2016002, 2018001); 人工智能四川省重点实验室基金 (2017RJY02); 江苏省输配电装备技术重点实验室项目 (2017JSSPD01)

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (51879118); New Century Talent Supporting Program of Higher Education of Fujian Province (B17159); Program of Science and Technology for Supporting the Army (B19101); Fund of Key laboratory of Fishery Equipment and Engineering of the Ministry of Agriculture and Rural Affairs (2016002, 2018001); Fund of Artificial Intelligence Key Laboratory of Sichuan Province (2017RJY02); Project of Jiangsu Key Laboratory of Power Transmission & Distribution Equipment Technology (2017JSSPD01)

收稿时间: 2020-07-18; 修改时间: 2020-08-13; 采用时间: 2020-08-25; csa 在线出版时间: 2021-03-03

用于混沌系统的参数估计,与经典返回结果映射法相比节省了大量的运算时间<sup>[4]</sup>. Zhuang 等<sup>[5]</sup>应用 Jaya-Powell 算法估计 Lorenz 混沌系统的参数,为边缘计算提供了便利. 国外研究员用改进的粒子群算法估计基于混沌响应的永磁同步电动机模型参数,并取得了良好的效果<sup>[6]</sup>.

混沌是非线性系统中普遍存在的一种现象,它作为非线性动力系统的固有特性引起了极大的关注<sup>[7]</sup>,尤其是混沌系统在生物医学、保密通信以及信息科学等领域需求的推动下,致使许多国内外研究者加入研究,并提出了大量的研究方法<sup>[8-10]</sup>,但这些研究方法大多以参数已知为前提. 在许多实际应用中,由于系统的复杂性等因素,导致系统参数在大多数情况下是无法确定的,为了降低在参数寻优过程中的难度,需要对未知参数设置一定的范围,所以对混沌系统中的未知参数进行有效评估成为混沌系统中的关键问题<sup>[11]</sup>. 对混沌系统中的未知参数进行有效评估实质是多维复杂函数优化问题,群体智能优化算法对解决复杂函数优化问题提出了有效的方案. 例如:人工蜂群算法<sup>[12]</sup>、萤火虫算法<sup>[13]</sup>、差分进化算法<sup>[14]</sup>、花朵授粉算法<sup>[15]</sup>、粒子群算法<sup>[16]</sup>等相继被用于对混沌系统的参数估计,具有比传统优化算法更好的效果.

人工蜂群算法是仿生智能计算领域中一种十分典型的群体智能优化算法,它是通过模仿蜜蜂的采蜜过程而得到的,主要特点是可以直接通过对局部候选解的优劣进行比较,选出全局最优值<sup>[17]</sup>. 相比其他群智能优化算法,人工蜂群算法在处理多维问题及全局搜索方面所需参数较少,计算简单,易于实现等优点<sup>[18,19]</sup>. 故本文利用人工蜂群算法解决混沌系统中参数估计的问题.

## 1 混沌系统参数估计

定义  $m$  个参数的  $n$  维混沌系统的状态变量估计值如式 (1):

$$\dot{X} = F(X, X_0, \theta) \quad (1)$$

式 (1) 中,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$  是系统的状态向量;  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)^T \in R^m$  是系统未知参数向量;  $X_0$  是系统的初始状态;  $F: R^n \times R^m \rightarrow R^n$  是给定的非线性向量函数.

假设系统结构已知,当对系统参数进行估计时被估计系统可定义为式 (2):

$$\dot{Y} = F(Y, X_0, \hat{\theta}) \quad (2)$$

式 (2) 中,  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in R^n$  是被估计系统中的状态向量  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_m)^T \in R^m$  是系统估计参数.

参数估计问题也可转化为式 (3):

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} J(\theta) = \arg \min_{\theta} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|x_i - y_i\|^2 \quad (3)$$

式 (3) 中,  $N$  表示用于状态变量的数据长度,  $x_i$  和  $y_i$  分别表示在其状态变量下系统的真值和估计值. 显然,  $J(\theta)$  是多维和多模非线性函数,混沌系统具有动态不稳定且对初始参数敏感的特性. 因此,难以有效且准确地估计出混沌系统的参数. 而人工蜂群算法在处理多维问题上易于实现,故本文采用人工蜂群算法并以式 (3) 为目标函数进行求解. 基于人工蜂群算法的混沌系统参数估计框图如图 1 所示. 首先,将原系统输出的值  $x_1, x_2, \dots, x_n$  和待估计系统输出的值  $y_1, y_2, \dots, y_n$  进行计算得到参数估计的误差平方和  $J(\theta)$ ; 然后,将得到的  $J(\theta)$  反馈到人工蜂群算法中生成新的估计值; 最后,通过多次迭代调整估计值  $\hat{\theta}$  使优化函数  $J$  最小.

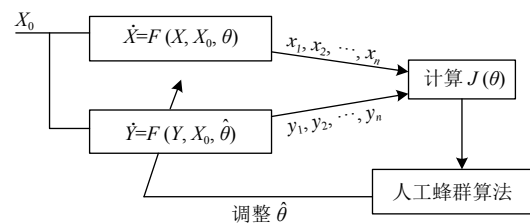


图 1 混沌系统参数估计框图

## 2 基于人工蜂群算法的混沌系统参数估计

### 2.1 人工蜂群算法

人工蜂群算法 (Artificial Bee Colony algorithm, ABC) 是一种通过模仿蜜蜂的采蜜过程而得到的优化算法,它是由土耳其学者 Karaboga 于 2005 年提出的用来解决多变量函数的优化问题<sup>[20]</sup>. 通过对问题的局部寻优行为,找到全局最优值的过程. ABC 算法主要有初始化、雇佣蜂、观察蜂和侦查蜂 4 个阶段.

初始化阶段: ABC 算法在初始化阶段,每只雇佣蜂会随机产生一个食物源,每个食物源与待优化解的个数  $S_N$  一一对应,  $S_N$  为蜂群规模,而每个待优化解  $V(i)$  是一个  $n$  维的向量. 即初始值生成公式如式 (4):

$$V(i, j) = V_{\min}(j) + rand \times [V_{\max}(j) - V_{\min}(j)] \quad (4)$$

式 (4) 中,  $i = 1, 2, \dots, S_N$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .  $V_{\min}(j)$  和  $V_{\max}(j)$  分别是第  $n$  维的最小值和最大值.  $rand$  表示 0 和 1 之

间的随机数。

雇佣蜂阶段: 在此阶段, 每只雇佣蜂通过搜索方程在其当前位置的附近生成新的食物源  $V_{EB}(i)$ , 其搜索方程如式 (5):

$$V_{EB}(i, j) = V(i, j) + \lambda \times [V(i, j) - V(r, j)] \quad (5)$$

式 (5) 中,  $i = 1, 2, \dots, S_N, j = 1, 2, \dots, n$ .  $\lambda$  是-1 到 1 之间的随机数,  $r$  是 1 到  $S_N$  之间的任意整数且  $r \neq i$ .

当得到新的食物源  $V_{EB}(i)$ , 便对其进行评估且与旧的食物源  $V(i)$  进行比较. 如果  $V_{EB}(i)$  的适用性优于  $V(i)$ , 则将  $V_{EB}(i)$  替换  $V(i)$ ; 否则保留  $V(i)$ .

观察蜂阶段: 当所有雇佣蜂搜索完成后, 它们通过舞蹈分享保存的信息给观察蜂. 观察蜂根据相应的概率在雇佣蜂传递的信息基础上更新候选解, 并评估其适应度选择食物源. 更新方程如式 (6):

$$V_{OB}(i, j) = V(i, j) + \beta \times [V(i, j) - V(k, j)] \quad (6)$$

式 (6) 中,  $i = 1, 2, \dots, S_N, j = 1, 2, \dots, n$ .  $\beta$  是-1 到 1 之间的随机数,  $k$  是 1 到  $S_N$  之间的任意整数且  $k \neq i$ .

当得到新的食物源  $V_{OB}(i)$ , 便对其进行评估且与更新的食物源  $V(i)$  进行比较. 如果  $V_{OB}(i)$  的适用性优于  $V(i)$ , 则将  $V_{OB}(i)$  替换  $V(i)$ ; 否则保留  $V(i)$ .

侦查蜂阶段: 为了防止陷入局部最优, 对于连续  $k_{limit}$  次没更新的解由式 (4) 重新生成新的候选解代替它.

当得到新的候选解  $V_{SB}(i)$ , 便对其进行评估且与原候选解  $V(i)$  进行比较. 如果新候选解的适用性优于原候选解, 则替换它; 否则保留原候选解.

ABC 算法的优化流程图如图 2 所示.

### 2.2 基于人工蜂群算法的混沌系统参数估计法的实现

虽然 ABC 算法在处理多维问题及全局搜索方面所需参数较少, 计算简单, 易于实现. 但其收敛速度相对较慢, 精度不高.

本节为充分利用搜索方程对蜂源进行搜索得到优化解, 引入了可选择的概率  $p$  得到新的搜索机制, 舍弃了概率计算和限制次数内蜂群没替换重新生成随机蜂群的方法, 算法的具体改进之处如下.

在雇佣蜂阶段, 改用搜索方程如式 (7):

$$V_{EB}(i, j) = V_{\min}(j) + V_{\max}(j) - V(i, j) \quad (7)$$

式 (7) 中,  $i = 1, 2, \dots, S_N, j = 1, 2, \dots, n$ .  $V_{\min}(j)$  和  $V_{\max}(j)$  分别是第  $n$  维的最小值和最大值.

在观察蜂阶段, 引用了差分进化中变异<sup>[21]</sup>的方法. 其搜索方程如式 (8):

$$V_{OB}(i, j) = V_{\text{best}}(j) + \phi \times [V(r_1, j) - V(r_2, j)] \quad (8)$$

式 (8) 中,  $i = 1, 2, \dots, S_N, j = 1, 2, \dots, n$ .  $V_{\text{best}}(j)$  是雇佣蜂求出的最优值,  $r_1$  和  $r_2$  的取值范围为 1 到  $S_N$ , 但  $r_1 \neq r_2$ .  $\phi$  的取值范围为-1 到 1.

在侦查蜂阶段, 引用了概率  $p$ , 如果  $p > rand$ , 则用如下搜索方程更新如式 (9):

$$V_{SB}(i, j) = V(i, j) + \phi \times [V(i, j) - V(k, j)] \quad (9)$$

式 (9) 中,  $i = 1, 2, \dots, S_N, j = 1, 2, \dots, n$ .  $k$  的取值范围为 1 到  $S_N$ ,  $\phi$  的取值范围为-1 到 1.

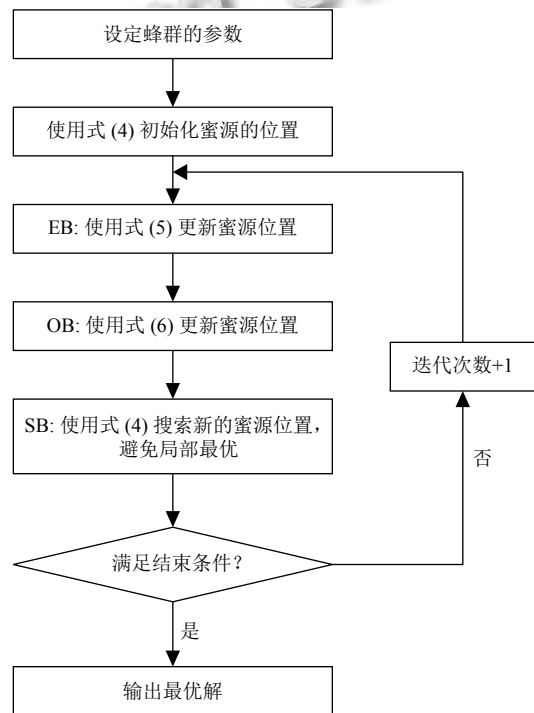


图 2 ABC 算法流程图

本文 ABC 算法的优化步骤如算法 1 所示.

#### 算法 1. 本文 ABC 算法

1. 初始化阶段: 设置最大迭代次数  $FE_{\max}$ , 蜜蜂个数为  $S_N$  维度为  $n$ ; 由式 (4) 得到初始混沌系统的参数估计值  $V(i, j)$ , 并通过式 (3) 计算得到估计参数转化的函数值  $J_1$ .

While (符合终止条件)

2. 雇佣蜂阶段:

由式 (7) 更新参数估计值, 并通过式 (3) 计算得到目标函数值  $J_2$ ; 将当前最优目标函数值  $J_1$  和  $J_2$  进行比较, 最小值即为最优值, 选出最优值放于  $J_1$ .

3. 观察蜂阶段:

由式 (8) 更新参数估计值, 并通过式 (3) 计算得到目标函数值  $J_3$ ; 将当前最优目标函数值  $J_1$  和  $J_3$  进行比较, 最小值即为最优值, 选出最优值放于  $J_1$ .

4. 侦查蜂阶段:

比较概率  $p$  和  $rand$  的大小, 根据比较结果决定是否更新参数估计值; 由式 (9) 更新参数估计值, 并通过式 (3) 计算得到目标函数值  $J_4$ ; 将当前最优目标函数值  $J_1$  和  $J_4$  进行比较, 最小值即为最优值, 选出最优值放于  $J_1$ .  
迭代次数  $FE=FE+1$ ;  
End

### 3 仿真分析

#### 3.1 基准函数测试

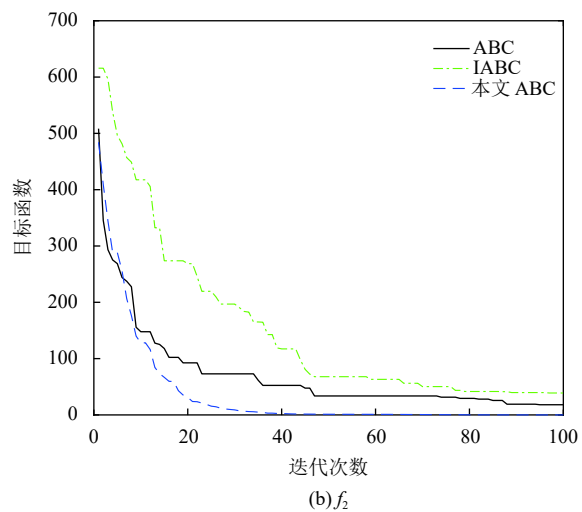
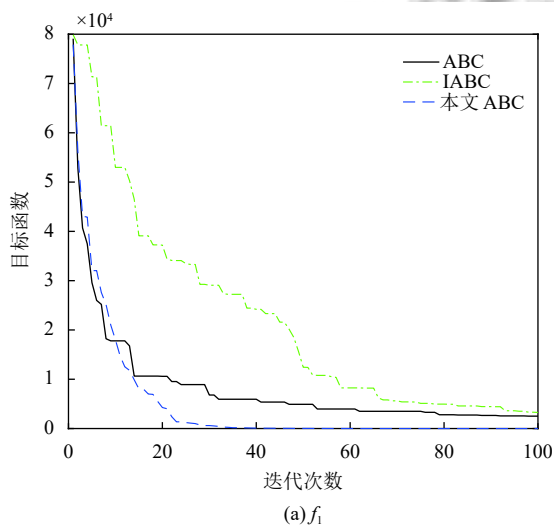
为了验证本文 ABC 算法的有效性, 将本文 ABC 算法和 ABC 算法及文献 [12] 中的 IABC 算法的优化能

力进行评估. 分别采用了 Sphere 函数、Griewank 函数、Ragstrigin 函数、Rosenbrock 函数、Ackley 函数、Schaffer 函数 6 个标准的测试函数进行测试, 测试函数的表达式、维度、搜索范围及函数最优值如表 1 所示<sup>[22]</sup>.

将所有函数的最大迭代次数  $FE_{max}$  设置为 100, 各函数的收敛曲线如图 3 所示. 从各函数的收敛曲线图可以看出, 本文 ABC 算法与 ABC 算法及 IABC 算法相比下降趋势更快、坡度更陡、所用迭代次数更少, 其函数  $f_3$ 、 $f_5$  和  $f_6$  尤为明显. 故本文 ABC 算法相比 ABC 算法和 IABC 算法收敛速度更快, 优化效果更佳. 这说明本文 ABC 算法是可行的.

表 1 标准测试函数

名称	函数表达式	维度 $D$	搜索范围 $\beta$	函数最优值
Sphere函数	$f_1(\beta) = \sum_{d=1}^D \beta_d^2$	30	$[-100, 100]$	0
Griewank函数	$f_2(\beta) = \frac{1}{4000} \left( \sum_{d=1}^D \beta_d^2 \right) - \left[ \prod_{d=1}^D \cos \left( \frac{\beta_d}{\sqrt{d}} \right) \right] + 1$	30	$[-600, 600]$	0
Ragstrigin函数	$f_3(\beta) = \sum_{d=1}^D [\beta_d^2 - 10 \cos(2\pi\beta_d) + 10]$	4	$[-5.12, 5.12]$	0
Rosenbrock函数	$f_4(\beta) = \sum_{d=1}^D [100(\beta_d^2 - \beta_{d+1})^2 + (\beta_d - 1)]^2$	30	$[-30, 30]$	0
Ackley函数	$f_5(\beta) = 20 + \exp(1) - 20 \exp \left[ -0.2 \sqrt{\left( \frac{1}{D} \right) \sum_{d=1}^D \beta_d^2} \right] - \exp \left[ \left( \frac{1}{D} \right) \sum_{d=1}^D \cos(2\pi\beta_d) \right]$	2	$[-32, 32]$	0
Schaffer函数	$f_6(\beta) = 0.5 + \frac{\sin^2 \left( \sqrt{\sum_{d=1}^D \beta_d^2} \right) - 0.5}{\left[ 1 + 0.001 \left( \sum_{d=1}^D \beta_d^2 \right) \right]^2}$	2	$[-100, 100]$	0





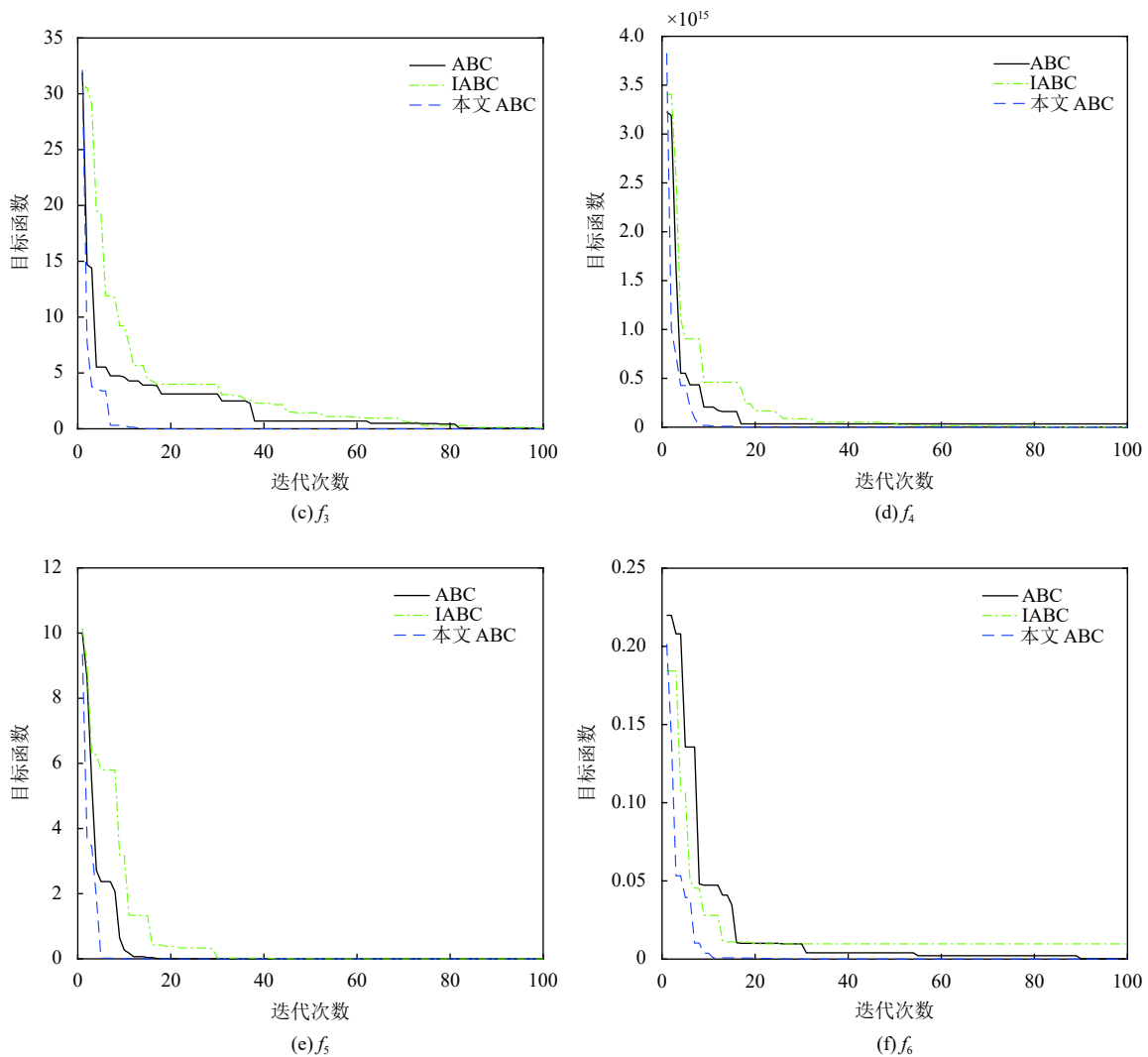


图3 标准测试函数收敛曲线

### 3.2 Lorenz 系统参数估计

Lorenz 系统是最典型的混沌系统<sup>[23,24]</sup>, 这里以 Lorenz 系统为例, 验证本文 ABC 算法对混沌系统中未知参数估计的适用性. Lorenz 系统的状态方程如式 (10):

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = bx - y - xz \\ \dot{z} = xy - cz \end{cases} \quad (10)$$

式 (10) 中  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ ,  $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ ,  $x$  表示流体速度,  $y$  表示水平温差,  $z$  表示垂直温差.

未知参数的真实值  $a=10, b=28, c=8/3$ . 以  $x(0)=0.1, y(0)=0.1, z(0)=0$  为初始状态值对系统进行仿真, 设置采样次数  $N=10\ 000$ . 数值仿真采用四阶 Rayleigh-Benard

法<sup>[25]</sup> 来计算式 (10) 中每个整数点的变量值, 步长  $h=0.01$ , 混沌系统<sup>[26]</sup> 如图 4 所示.

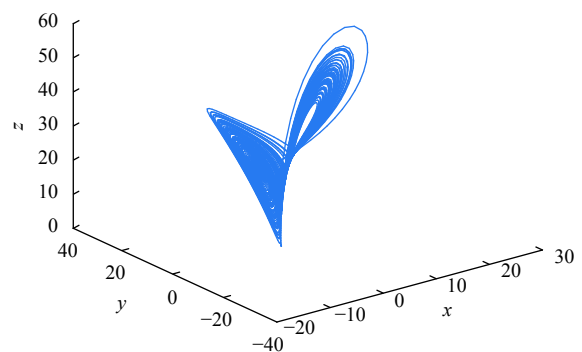


图4 Lorenz 混沌吸引子三维图

在本文 ABC 算法中, 设置最大迭代次数  $FE_{\max}=100$ , 种群大小  $S_N=20$ , 混沌系统的未知参数范围设置为:  $8 \leq a \leq 12$ ,  $25 \leq b \leq 30$  和  $2 \leq c \leq 3$ . 图 5 是参数估计值在每次迭代中记录的最优解曲线图. 图 6 是目标函数值在每次迭代中记录的最优解曲线图.

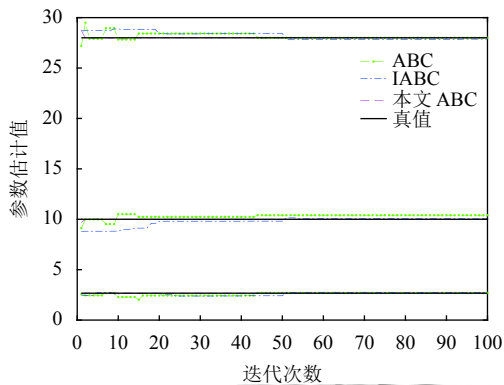


图 5 参数估计值收敛曲线

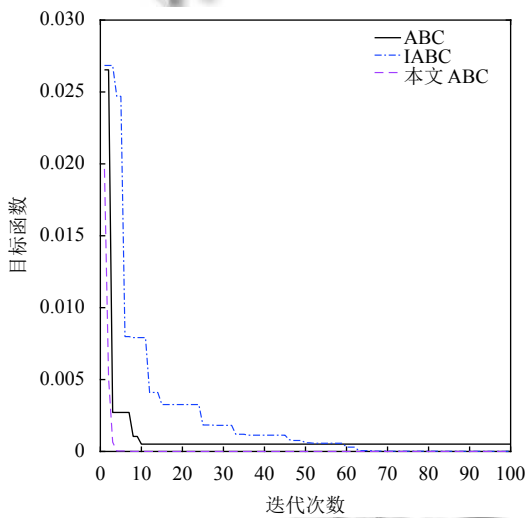
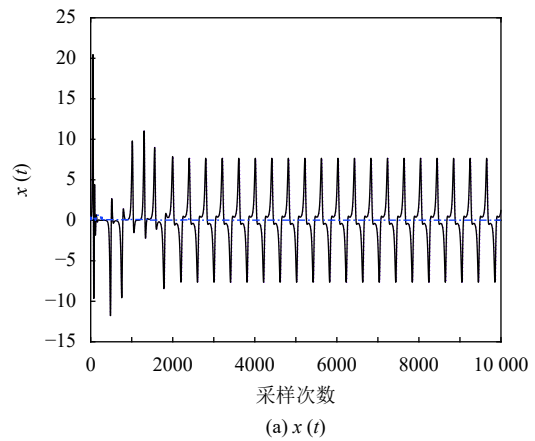


图 6 目标函数值收敛曲线

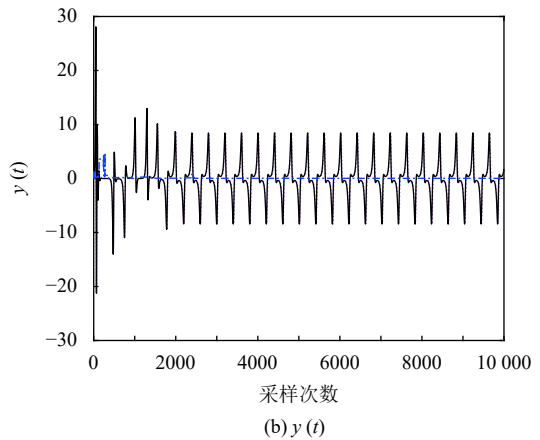
由图 5 和图 6 仿真结果可以得出, 本文 ABC 算法的收敛性及稳定性明显优于 ABC 算法及 IABC 算法. 图 7、图 8 和图 9 分别是通过两种算法得到的最优估计参数值由式 (10) 得出的状态变量估计值和真值之间的对比图, 其中误差  $e(t)$  的方程如式 (11).

$$e(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \left| \delta_i(t) - \widehat{\delta}(t) \right| \quad (11)$$

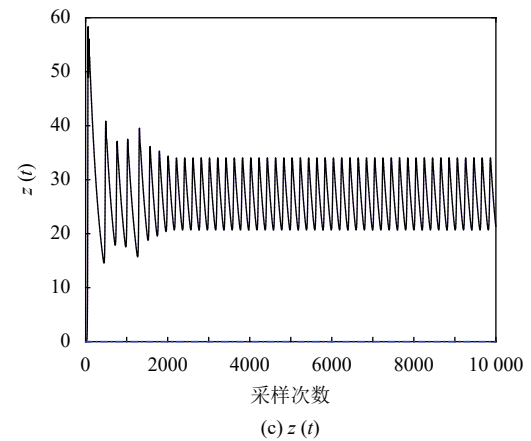
式 (11) 中  $\delta_i(t)$  是分别是参数  $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$  的真值,  $\widehat{\delta}(t)$  是分别是参数  $x(t)$ 、 $y(t)$ 、 $z(t)$  的估计值.



(a)  $x(t)$



(b)  $y(t)$



(c)  $z(t)$

..... 估计值    — 真值    - - - 误差  $e(t)$

图 7 ABC 算法状态变量

由图 7~图 9 可见, 图 9 中真值和估计值曲线更趋近于重合尤其随采样次数的增大, 重合度越高, 而图 7 中的真值和估计值曲线在随采样次数增大时有明显的分叉现象, 图 8 的重合度相比于图 9 较差, 所以本文 ABC 算法的趋近性明显优于 ABC 算法和 IABC 算法. 参数  $a$ 、 $b$ 、 $c$  及目标函数的最优值、最差值和平均值

是由 ABC 算法和本文 ABC 算法及 IABC 算法分别独立运行 30 次计算得到的平均值, 记录于表 2.

ABC 算法和 IABC 算法仿真得出的参数趋近值. 利用本文 ABC 算法得出的目标函数值也明显小于由 ABC 算法和 IABC 算法得出的目标函数值, 故本文 ABC 算法在稳定性及收敛速度上明显优于 ABC 算法和 IABC 算法.

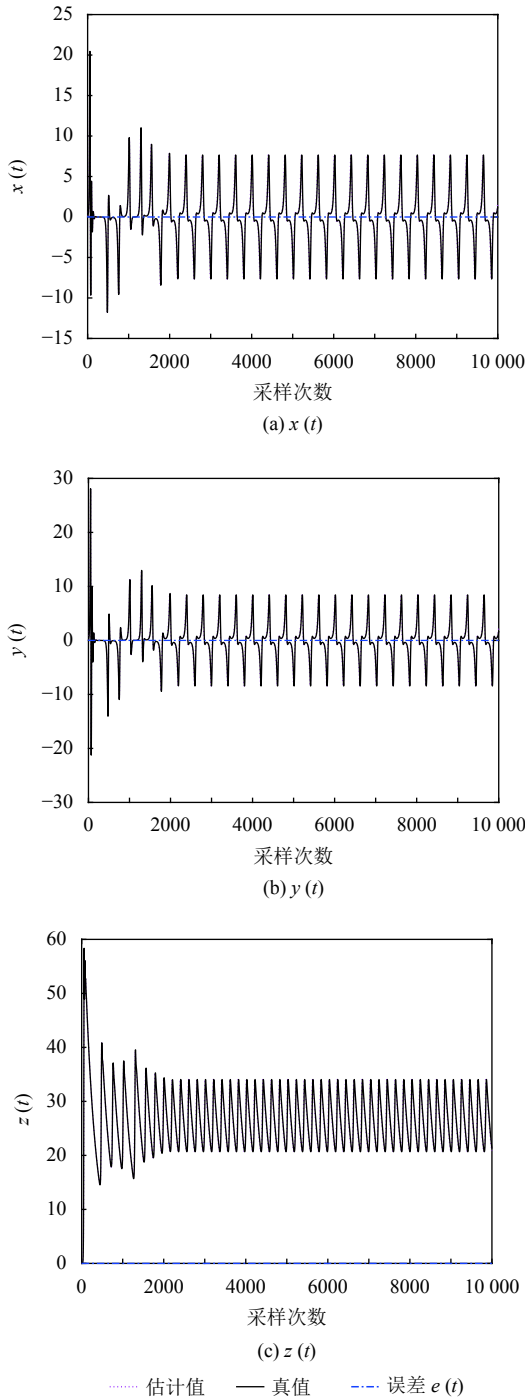


图 8 IABC 算法状态变量

由表 2 可以得出, 在最优值、最差值和平均值上由本文 ABC 算法仿真得出的参数  $a$  趋近于 10、参数  $b$  趋近于 28、参数  $c$  趋近于  $8/3$  的效果明显优于由

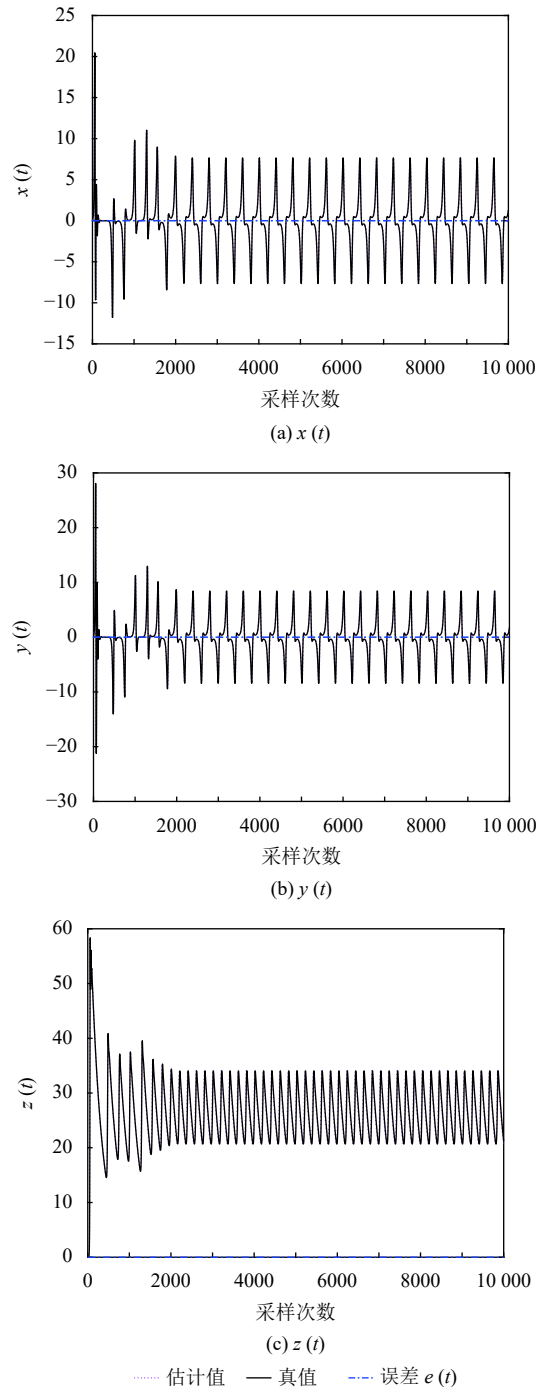


图 9 本文 ABC 算法状态变量

表2 文献[14]ABC和本文ABC算法参数估计结果

值	算法	$a$	$b$	$c$	目标函数值 $J$
最优值	本文ABC	10.0000	28.0001	2.6666	6.12e-12
	ABC	10.0880	28.0209	2.5226	7.31e-05
	IABC	10.0128	27.9568	2.6994	1.54e-06
最差值	本文ABC	9.9439	28.2179	2.5114	2.91e-05
	ABC	9.8926	27.1668	2.2709	1.70e-04
	IABC	10.3007	27.6214	2.8457	1.37e-05
平均值	本文ABC	9.9945	28.0208	2.6511	2.70e-07
	ABC	9.9344	28.0375	2.3706	1.61e-04
	IABC	9.9890	28.1193	2.6072	4.13e-05

## 4 结论

针对人工蜂群算法收敛速度相对较慢,精度不高,本文首先引入了可选择的概率 $p$ 得到新的搜索机制;在此基础上,将混沌系统中复杂的参数估计问题转化为多维问题,利用改进的人工蜂群优化算法求解混沌系统的参数.测试函数优化实验验证了人工蜂群算法改进方案的有效性;Lorenz混沌系统的参数辨识仿真实验结果表明了本文的基于人工蜂群算法的混沌系统参数辨识方法比传统ABC算法及IABC算法具有更高的估计精度,且较快的收敛速度.

## 参考文献

- Wang SB, Na J. Parameter estimation and adaptive control for servo mechanisms with friction compensation. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2020, 16(11): 6816–6825. [doi: [10.1109/TII.2020.2971056](https://doi.org/10.1109/TII.2020.2971056)]
- Zhang B, Ding H, Chen LQ. Super-harmonic resonances of a rotating pre-deformed blade subjected to gas pressure. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 98(4): 2531–2549. [doi: [10.1007/s11071-019-05367-x](https://doi.org/10.1007/s11071-019-05367-x)]
- Zheng HW, Wang RB, Qiao LK, *et al.* The molecular dynamics of neural metabolism during the action potential. *Science China Technological Sciences*, 2014, 57(5): 857–863. [doi: [10.1007/s11431-014-5530-4](https://doi.org/10.1007/s11431-014-5530-4)]
- Peng YX, Sun KH, He SB. An improved return maps method for parameter estimation of chaotic systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2020, 30(4): 2050058. [doi: [10.1142/S0218127420500583](https://doi.org/10.1142/S0218127420500583)]
- Zhuang L, Cao LP, Wu Y, *et al.* Parameter estimation of Lorenz chaotic system based on a hybrid Jaya-Powell algorithm. *IEEE Access*, 2020, 8: 20514–20522. [doi: [10.1109/ACCESS.2020.2968106](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2968106)]
- Yousri D, Allam D, Eteiba MB, *et al.* Chaotic heterogeneous comprehensive learning particle swarm optimizer variants for permanent magnet synchronous motor models parameters estimation. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Electrical Engineering*, 2020, 44(3): 1299–1318. [doi: [10.1007/s40998-019-00294-4](https://doi.org/10.1007/s40998-019-00294-4)]
- Lazzús JA, Rivera M, López-caraballo CH. Parameter estimation of Lorenz chaotic system using a hybrid swarm intelligence algorithm. *Physics Letters A*, 2016, 380(11–12): 1164–1171.
- Kapitaniak T, Mohammadi SA, Mekhilef S, *et al.* A new chaotic system with stable equilibrium: Entropy analysis, parameter estimation, and circuit design. *Entropy*, 2018, 20(9): 670. [doi: [10.3390/e20090670](https://doi.org/10.3390/e20090670)]
- Shekofteh Y, Jafari S, Rajagopal K. Cost function based on hidden Markov models for parameter estimation of chaotic systems. *Soft Computing*, 2019, 23(13): 4765–4776. [doi: [10.1007/s00500-018-3129-6](https://doi.org/10.1007/s00500-018-3129-6)]
- 石建平, 李培生, 刘国平, 等. 基于改进粒子群优化算法的混沌系统参数估计. *华中科技大学学报(自然科学版)*, 2018, 46(9): 70–76.
- Peng YX, Sun KH, He SB, *et al.* Parameter estimation of a complex chaotic system with unknown initial values. *The European Physical Journal Plus*, 2018, 133(8): 305. [doi: [10.1140/epjp/i2018-12091-1](https://doi.org/10.1140/epjp/i2018-12091-1)]
- Ding ZH, Lu ZR, Liu JK. Parameters identification of chaotic systems based on artificial bee colony algorithm combined with cuckoo search strategy. *Science China Technological Sciences*, 2018, 61(3): 417–426. [doi: [10.1007/s11431-016-9026-4](https://doi.org/10.1007/s11431-016-9026-4)]
- Mousavi Y, Alfi A. Fractional calculus-based firefly algorithm applied to parameter estimation of chaotic systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2018, 114: 202–215.
- Liu FC, Li X, Liu X, *et al.* Parameter identification of fractional-order chaotic system with time delay via multi-selection differential evolution. *Systems Science & Control Engineering*, 2017, 5(1): 42–48.
- Xu SH, Wang Y, Liu X. Parameter estimation for chaotic systems via a hybrid flower pollination algorithm. *Neural Computing and Applications*, 2018, 30(8): 2607–2623. [doi: [10.1007/s00521-017-2890-2](https://doi.org/10.1007/s00521-017-2890-2)]
- Huang Y, Guo F, Li YL, *et al.* Parameter estimation of fractional-order chaotic systems by using quantum parallel particle swarm optimization algorithm. *PLoS One*, 2015, 10(1): e0114910. [doi: [10.1371/journal.pone.0114910](https://doi.org/10.1371/journal.pone.0114910)]
- Zhang P, Yang RY, Yang RH, *et al.* Parameter estimation for fractional-order chaotic systems by improved bird swarm optimization algorithm. *International Journal of Modern*



- Physics C, 2019, 30(11): 1950086. [doi: [10.1142/S0129183119500864](https://doi.org/10.1142/S0129183119500864)]
- 18 Biswas S, Chatterjee A, Goswami SK. An artificial bee colony-least square algorithm for solving harmonic estimation problems. *Applied Soft Computing*, 2013, 13(5): 2343–2355. [doi: [10.1016/j.asoc.2012.12.006](https://doi.org/10.1016/j.asoc.2012.12.006)]
- 19 Zhang M, Tan YT, Zhu JH, *et al.* Modeling and simulation of improved artificial bee colony algorithm with data-driven optimization. *Simulation Modelling Practice and Theory*, 2019, 93: 305–321. [doi: [10.1016/j.simpat.2018.06.004](https://doi.org/10.1016/j.simpat.2018.06.004)]
- 20 Karaboga D, Basturk B. A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: Artificial Bee Colony (ABC) algorithm. *Journal of Global Optimization*, 2007, 39(3): 459–471. [doi: [10.1007/s10898-007-9149-x](https://doi.org/10.1007/s10898-007-9149-x)]
- 21 Yildizdan G, Baykan ÖK. A novel modified bat algorithm hybridizing by differential evolution algorithm. *Expert Systems with Applications*, 2020, 141: 112949. [doi: [10.1016/j.eswa.2019.112949](https://doi.org/10.1016/j.eswa.2019.112949)]
- 22 Peng YX, Sun KH, He SB, *et al.* The influence of samples on meta-heuristic algorithm for parameter estimation of chaotic system. *Modern Physics Letters B*, 2019, 33(4): 1950041. [doi: [10.1142/S0217984919500416](https://doi.org/10.1142/S0217984919500416)]
- 23 Shams Z, Shahmansoorian A. Fault estimation based on observer for chaotic lorenz system with bifurcation problem. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2020, 42(3): 576–585. [doi: [10.1177/0142331219879267](https://doi.org/10.1177/0142331219879267)]
- 24 石建平, 李培生, 刘国平. 基于混合群智能优化算法的混沌系统参数估计. *计算物理*, 2019, 36(5): 621–630.
- 25 Cornick M, Hunt B, Ott E, *et al.* State and parameter estimation of spatiotemporally chaotic systems illustrated by an application to Rayleigh-Bénard convection. *Chaos*, 2009, 19(1): 013108. [doi: [10.1063/1.3072780](https://doi.org/10.1063/1.3072780)]
- 26 Chen Y, Pi DC, Wang B. Enhanced global flower pollination algorithm for parameter identification of chaotic and hyper-chaotic system. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 97(2): 1343–1358. [doi: [10.1007/s11071-019-05052-z](https://doi.org/10.1007/s11071-019-05052-z)]