

# 基于排样矩形的直角边零件下料算法<sup>①</sup>



郭百海, 隋毅

(青岛大学 计算机科学技术学院, 青岛 266071)

通讯作者: 隋毅, E-mail: [suiyi@qdu.edu.cn](mailto:suiyi@qdu.edu.cn)

**摘要:** 针对实际操作中直角边零件下料利用率不高的问题, 导入排样矩形的概念, 将直角边零件下料问题分解为若干优化子问题, 在此基础上, 基于动态规划思想通过求解子问题构建全局最优解. 实验表明, 与传统的直角边零件板材切割相比, 使用本文算法能够使板材的利用率提高 30%–50%; 与其他几种典型算法相比, 本算法板材利用率提高显著, 并且排样方案简单, 更适用于实际操作.

**关键词:** 排样矩形; 下料问题; 直角边不规则; 动态规划; 排样方案

引用格式: 郭百海, 隋毅. 基于排样矩形的直角边零件下料算法. 计算机系统应用, 2021, 30(1): 162–167. <http://www.c-s-a.org.cn/1003-3254/7740.html>

## Rectilinear Parts Cutting Algorithm Based on Layout Rectangle

GUO Bai-Hai, SUI Yi

(School of Computer Science and Technology, Qingdao University, Qingdao 266071, China)

**Abstract:** For the rectilinear parts cutting problem of low sheet utilization rate in practice, the concept of layout rectangle is introduced. The rectilinear parts cutting problem is decomposed into several optimization sub-problems. On this basis, the global optimal solution is constructed by solving the sub-problems based on dynamic programming. Experiment shows that compared with the traditional method of rectilinear parts cutting, the sheet utilization rate can be increased by 30%–50%. Compared with other typical algorithms, the sheet utilization rate is significantly improved and the scheme is more practical to layout.

**Key words:** layout rectangle; cutting problems; rectilinear; dynamic programming; layout scheme

直角边零件的轮廓由直角边组成, 并且任意相邻两边之间的夹角都是直角, 对这种零件的排样布局称为直角边零件下料问题. 直角边零件在许多领域中都有广泛的应用, 如普通机械、专业设备等制造行业的型材、金属切割、木材加工、建筑行业的平板玻璃切割等, 但直角边零件加工普遍存在余料剩余较多, 加工效率较低, 原材料浪费等问题<sup>[1,2]</sup>. 因此, 优化直角边零件排样布局, 使直角边零件下料后产生的废料最少, 即板材的利用率最高, 对降低企业生产成本具有重要意义和实用价值.

目前直角边零件下料布局优化问题已有大量相关研究, Gilmore 和 Gomory<sup>[3]</sup> 利用动态规划算法求解矩形零件的布局被认为是解决二维切割问题的基本方法; 张燕玲等<sup>[2]</sup> 基于改进的 Basely 模型<sup>[4]</sup> 设计实现了一种可用于直角边下料问题的整数规划模型; 戚得众等<sup>[5]</sup> 提出了一种基于工艺与形状特征的下料零件分组下料优化模型; Fabio Furini 等<sup>[6]</sup> 通过建立混合整数线性规划模型表示二维切割问题中一般切刀约束的问题; 葛志辉等<sup>[7]</sup> 提出一种基于工艺约束策略的二维不规则排样算法; 张旭等<sup>[8]</sup> 给出了一种基于最大移

① 基金项目: 国家自然科学基金青年基金 (41706198); 山东省高等学校科技计划 (J17KA056)

Foundation item: Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China (41706198); Science and Technology Plan of Higher Education of Shandong Province (J17KA056)

收稿时间: 2020-05-30; 修改时间: 2020-06-23; 采用时间: 2020-06-28; csa 在线出版时间: 2020-12-31

动距离的启发式算法,改善了排样结果.然而,由于直角边零件下料布局优化是 NP-Hard (Non-deterministic Polynomial Hard)<sup>[9]</sup> 问题,不能在多项式时间内解决,多数研究获得的结果只能趋近于最优解而很难达到最优解;即便获得最优解,由于现有研究普遍将材料利用率作为唯一的优化目标,获得的排样结果虽然是理论上的最优,但切割操作难度却较大,依然存在实用性不强的问题.

针对上述问题,本文提出了一种基于排样矩形的动态规划方法,将板材的布局问题转化为若干个优化子问题,而每个子问题的最优解能够通过本文提出的排样矩形得到,在此基础上,基于动态规划思想构建直角边零件下料问题的求解算法,该算法通过将 NP-Hard 问题转换为在多项式时间内可以进行求解的一般问题,降低了算法求解的时间复杂度.实验结果表明,对于一般直角边零件,本算法与传统的直角边零件板材切割相比,板材的利用率提高了 30%~50%;同时,本算法在减少板材余料的同时保证了排样简单操作可行,降低了对工艺的要求,在工厂生产中容易实现.

### 1 问题描述

不失一般性,将板材抽象为  $L \times W$  的长方形  $R$ ,  $L$  和  $W$  表示  $R$  的长与宽,左下角为坐标原点  $(0,0)$ , 右上角坐标为  $(L,W)$ , 将  $R$  在长和宽两个方向上按照单位长度进行划分得到  $L \times W$  个小正方形,称之为格点<sup>[10]</sup>, 格点的角点坐标表示为  $(x,y)$ , 其中  $0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq W$ . 如图 1.

任意直角边零件  $m$  均存在一个最小外接矩形  $r$ , 称  $r$  为零件  $m$  的最小包围矩形<sup>[11]</sup>, 表示为  $r_m = (r_m^{tr}, r_m^{bl})$ , 其中  $r_m^{tr} = (r_m^{trx}, r_m^{try})$ 、 $r_m^{bl} = (r_m^{blx}, r_m^{bly})$  分别为  $r$  的右上角和左下角坐标. 将  $r_m^{trx} - r_m^{blx}$  记为零件的长,  $r_m^{try} - r_m^{bly}$  记为零件的宽, 其中包围矩形  $r$  由其右上角坐标和左下角坐标确定. 直角边不规则零件及其包围矩形如图 2.

定义 1( $m$  在  $R$  上的规范摆放方式). 直角边零件  $m$  在  $R$  上可以有任意种摆放方式, 当  $m$  的各直角边要么与最小包围矩形  $r$  的直角边垂直要么与最小包围矩形  $r$  的直角边平行时, 称为  $m$  在  $R$  上的规范摆放方式.

如图 1 所示, 板材  $R$  上的 T 字型零件的规范摆放方式有 4 种. 易见, 对任何直角边零件  $m$ , 通过旋转, 其在板材  $R$  上规范的摆放方式最多有 4 种. 对给定的板材  $R (L \times W)$ , 寻找一种使得直角边零件按规范方式摆放

个数最多的排样布局, 即切割后余料最少, 这是一个 NP-Hard 问题, 不能在多项式时间内进行求解.

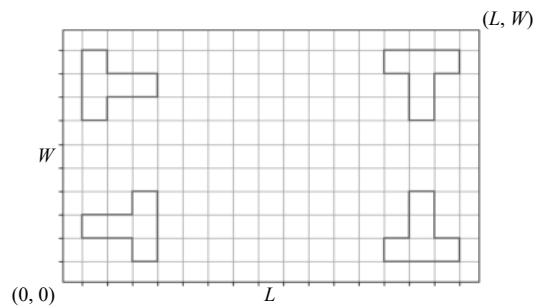


图 1 板材的格点划分



图 2 直角边不规则零件及其包围矩形

设有  $N$  个直角边零件在  $R$  上规范摆放,  $r_i$  表示直角边零件  $i (1 \leq i \leq N)$  的包围矩形, 令  $\cap \{r_i | 1 \leq i \leq N\}$  表示  $N$  个包围矩形在  $R$  上所占区域的交集, 当  $\cap \{r_i | 1 \leq i \leq N\} = \Phi$  时表示  $N$  个包围矩形在  $R$  上不重叠, 反之则表示在  $R$  上存在重叠区域. 类似的, 令  $\cap \{m_i | 1 \leq i \leq N\}$  表示  $N$  个直角边零件在  $R$  上所占区域的交集, 当  $\cap \{m_i | 1 \leq i \leq N\} = \Phi$  时表示  $N$  个直角边零件在  $R$  上不重叠, 显然, 当  $\cap \{r_i | 1 \leq i \leq N\} = \Phi$  时必然有  $\cap \{m_i | 1 \leq i \leq N\} = \Phi$ .

直角边零件下料问题: 求解在给定长为  $L$ , 宽为  $W$  的板材  $R$  上排样  $N$  个直角边零件最省料的排样模式, 即是求解以下目标函数:

$$\begin{aligned} & \max \cap \{r_i | 1 \leq i \leq N\} \\ \text{s.t. } & \left\{ \begin{aligned} & \cap \{m_i | 1 \leq i \leq n\} = \Phi, r_i^{trx} - r_i^{blx} \leq l, 1 \leq i \leq N \\ & \cap \{m_i | 1 \leq i \leq n\} = \Phi, r_i^{try} - r_i^{bly} \leq w, 1 \leq i \leq N \end{aligned} \right\} \quad (1) \end{aligned}$$

优化子问题 1. 求解在  $R$  上给定宽为  $w (w \leq W)$  的局域长方形区域内排样  $p$  个直角边零件最省料的排样模式, 即是求解以下目标函数:

$$\begin{aligned} & \max \cap \{r_i | 1 \leq i \leq p\} \\ \text{s.t. } & \cap \{m_i | 1 \leq i \leq p\} = \Phi, r_i^{try} - r_i^{bly} \leq w, 1 \leq i \leq p \quad (2) \end{aligned}$$

优化子问题 2. 求解在  $R$  上给定长为  $l (l \leq L)$  的局域长方形区域内排样  $q$  个直角边零件最省料的排样模式, 即是求解以下目标函数:

$$\begin{aligned} & \max \cap \{r_i | 1 \leq i \leq q\} \\ \text{s.t. } & \cap \{m_i | 1 \leq i \leq q\} = \Phi, r_i^{trx} - r_i^{blx} \leq l, 1 \leq i \leq q \quad (3) \end{aligned}$$

针对优化子问题 1 和问题 2, 要在全排列中确定一个最优的排列组合, 也是一个 NP-Hard 问题. 但是, 对

于此问题,数据量较少时可以通过合理的穷举进行解决.根据文献 [12],下面给出排样矩形 (Layout Rectangle) 的定义.

定义 2(排样矩形). 根据先验知识对板材  $R$  的某一小块区域进行手动排样, 确定一个排样矩形  $LR$ , 使得按照  $LR$  沿水平或竖直方向进行排样有一定的规律可循. 其中, 沿水平方向有规律可循的称为水平排样矩形 (Horizontal Layout Rectangle,  $HLR$ ),  $HLR$  的宽度为常数  $w$ , 长度为可变参数  $x$ , 零件在  $HLR$  上的排样个数满足规律函数  $G_x(x)$ ; 同样, 沿竖直方向有规律可循的称为竖直排样矩形 (Vertical Layout Rectangle,  $VLR$ ),  $VLR$  的长度为常数  $l$ , 宽度为可变参数  $y$ , 零件在  $VLR$  上的排样个数满足规律函数  $G_y(y)$ .

## 2 基于排样矩形的直角边下料模型

对于直角边零件  $m$ , 假设总共有 4 种不同的规范摆放方式, 对于每种摆放方式, 都分别存在一个  $HLR$  和  $VLR$ , 则直角边零件  $m$  共有 8 个排样矩形. 将直角边零件  $m$  沿第  $j$  ( $j=1, 2, 3, 4$ , 下同) 种规范摆放方式得到的水平排样矩形记为  $HLR_j$ , 排样矩形的宽度记为  $w_j$ ,  $m$  在  $HLR_j$  的排样个数满足的规律函数记为  $G_{x_j}(x)$ ; 同理,  $m$  沿第  $j$  种规范摆放方式得到的竖直排样矩形记为  $VLR_j$ , 排样矩形的长度记为  $l_j$ ,  $m$  在  $HLR_j$  的排样个数满足的规律函数记为  $G_{y_j}(y)$ . 图 3(a) 和图 3(b) 分别是 T 字型零件和工字型零件的水平排样矩形和竖直方向排样矩形, 其中红色和蓝色区域可以进行排样, 浅灰色区域为排样矩形的未利用部分. 基于排样矩形可以确定规律函数  $G_{x_j}(x)$ 、 $G_{y_j}(y)$  的具体形式.

针对于直角边下料问题, 把它分解成若干优化子问题 1 和优化子问题 2, 然后从这些子问题的解得到原问题的解.

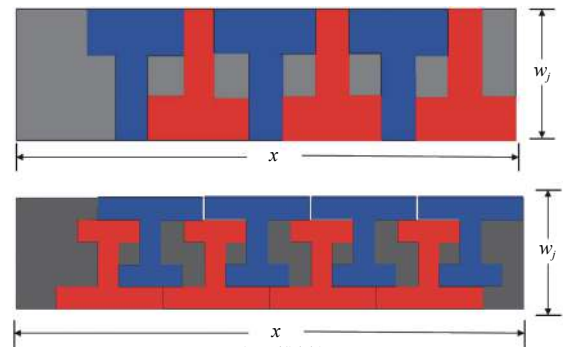
由定义 2 可得, 采用  $HLR$  进行排样可以使得在宽度为  $w$  的矩形中零件  $m$  的数量最多, 因此优化子问题 1 的解转换为:

$$\max\{G_{x_j}(x)\}, j = 1, 2, 3, 4 \quad (4)$$

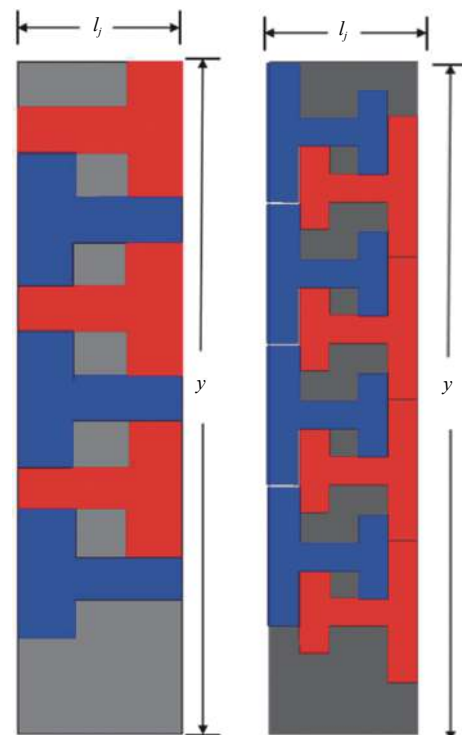
同理可得, 采用  $VLR$  进行排样可以使得在长度为  $l$  的矩形中零件  $m$  的数量最多, 因此优化子问题 2 的解转换为:

$$\max\{G_{y_j}(y)\}, j = 1, 2, 3, 4 \quad (5)$$

按照动态规划<sup>[13]</sup>的思想, 直角边零件在  $(x, y)$  处按照方式  $j$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ) 放置时点  $(x, y)$  的最大放置数量  $N(x, y)$  的有:



(a) 水平排样矩形



(b) 竖直排样矩形

图 3 排样矩形

(1) 如果排样矩形采用  $HLR$ , 当  $y > w_j$  时, 设点  $(x, y)$  的最大放置数量为  $N(x, y)$ , 则  $N(x, y)$  与点  $(x, y - w_j)$  的最大放置数量  $N(x, y - w_j)$  有关. 点  $(x, y)$  的最大放置数量  $N(x, y)$  可表示为:

$$N(x, y) = N(x, y - w_j) + G_{x_j}(x), y > w_j \quad (6)$$

(2) 如果排样矩形采用  $VLR$ , 当  $x > l_j$  时, 点  $(x, y)$  的最大放置数量为  $N(x, y)$ , 则  $N(x, y)$  与点  $(x - l_j, y)$  的最大放置数量  $N(x - l_j, y)$  有关. 点  $(x, y)$  的最大放置数量  $N(x, y)$  可表示为:

$$N(x, y) = N(x - l_j, y) + G_{y_j}(y), x > l_j \quad (7)$$

根据上述讨论可知, 板材在点  $(x, y)$  若要获得最大的零件放置数量, 需要考虑以下 8 种情况:

$$N(x,y) = \max \begin{cases} 0, x < \min\{w_j, l_j\}, j = 1, 2, 3, 4 \\ 0, y < \min\{w_j, l_j\}, j = 1, 2, 3, 4 \\ N(x, y - w_j) + G_{x_j}(x), y > w_j, j = 1, 2, 3, 4 \\ N(x - l_j, y) + G_{y_j}(y), x > l_j, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 0 \leq x \leq L \\ 0 \leq y \leq W \end{cases} \quad (8)$$

采用文献 [14] 的动态规划算法对建立的式 (8) 进行求解, 具体的算法步骤如下:

**Step 1.** 根据特定的直角边零件  $m$ , 确定排样矩形对应的规律函数  $G_{x_j}(x)$ 、 $G_{y_j}(y)$ . 建立两个矩阵  $N_{L \times W}$ 、 $T_{L \times W}$ , 初始化为全 0 矩阵. 其中  $N$  矩阵用来存储各点处的零件最大放置数量,  $T$  矩阵用来记录具体的排样方式.

**Step 2.** 按照由左至右、由上至下的顺序递推出在该点  $(x, y)$  处的零件最大放置数量, 并将  $(x, y)$  处的切割方案记录在  $T(x, y)$  中.

**Step 3.** 判断当前坐标可否放置零件. 将当前坐标记为  $(x, y)$ , 若  $\min(x, y) < \min\{w_j, l_j\} (j=1, 2, 3, 4)$ , 则表示当前坐标不能放置零件,  $N(x, y)=0, T(x, y)=0$ , 转至 Step 2, 否则转至 Step 4.

**Step 4.** 根据动态规划的思想, 如果已经求得当前点的所有子状态的最优解, 那么当前状态的最优解根据式 (8) 可用所有子状态的最优解推导出来.

**Step 5.** 求解得到整块板材的最优解  $N(L, W)$ , 根据矩阵  $T(L, W)$  回溯得到具体的切割方案.

算法的伪代码如算法 1.

算法 1. 切割算法

输入: 问题的实例参数  $N, T, w_j, l_j (j=1, 2, 3, 4)$ , 规律函数  $G_{x_j}, G_{y_j}$   
输出: 问题实例的最优解方案

```

0  初始化  $N, T$ 
1   $N = \text{zeros}(L, W)$ 
2   $T = \text{zeros}(L, W)$ 
3  For  $x$  in range(0, L): #约束个数
4      For  $y$  in range(0, W):
5          If  $y \geq w_j$ :
6               $ty_j = N(x, y - w_j) + G_{x_j}(x)$ 
7          Endif
8          If  $x \geq l_j$ :
9               $tx_j = N(x - l_j, y) + G_{y_j}(y)$ 
10         Endif
11          $N(x, y) = \max(ty_j, tx_j)$ 
12          $T(x, y) = \text{对应 } N(x, y) \text{ 取最大值时的切割方案}$ 
13     Endfor
14 Endfor
    
```





3 算例与结果分析

使用的计算机配置环境为 Win10, intel CORE i5 8th Gen, 8 GB 内存. 选用的软件语言 Python 3.7.

采用几组相关的基准数据进行测试, 基准数据<sup>[2]</sup>由北京铁路信号公司的生产实例中产生.

针对不同的排样零件类型以及不同的板材尺寸, 生成相应地排样方案, 并计算出对应的板材利用率, 与传统排样算法进行比较, 具体结果如表 1 及图 4 至图 11 所示. 如表 1 所示, 针对不同的直角边零件, 本文提出的算法与传统的排样算法相比其材料利用率都有较大的提高.

表 1 不同尺寸板材切割利用率结果

零件样图尺寸(mm)	板材尺寸(mm)	传统排样		本文算法		提高(%)
		排样个数	板材利用率(%)	排样个数	板材利用率(%)	
 (30,30)T字型	(210,150)	35	55.56	50	79.37	42.86
	(2000,940)	2088	55.53	3084	82.02	47.70
 (90,60)凸字型	(1000, 500)	88	63.36	128	92.16	45.45
	(2000,1000)	352	63.36	528	95.04	50.00
 (100,100)十字型	(1200,500)	60	55.56	81	75.00	35.00
	(2000,1000)	200	55.67	273	75.83	36.50
 (50,50)工字型	(320,160)	24	46.87	36	70.31	50.00
	(650,320)	104	50.00	144	69.23	38.46

对于一些常见的直角边零件, 将本文算法与已有研究文献中的算法进行比较, 具体结果如表 2 和表 3 所示. 结果表明, 针对于 T 字型零件、十字型零件、凸字

型零件, 本文提出的算法在材料利用率优于文献 [2,15,16] 阐述的算法, 包括格点改造算法、顶点覆盖算法、以及滚动优化算法. 同时, 排样矩形的引入使得本文算法提

供的排样方案有一定的规律可循,与目前存在的所有算法相比,降低了对机器工艺的要求,更具有实际操作意义。

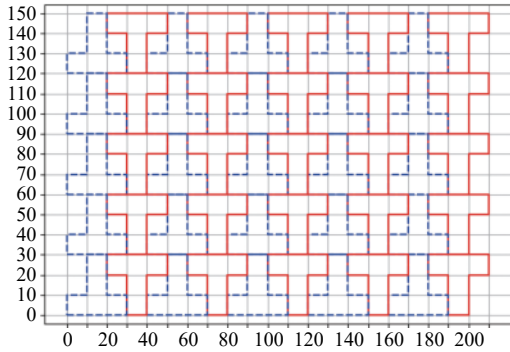


图4 T字型切割方案图(210×150)

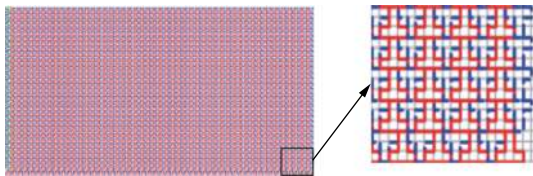


图5 T字型切割方案图(2000×940)

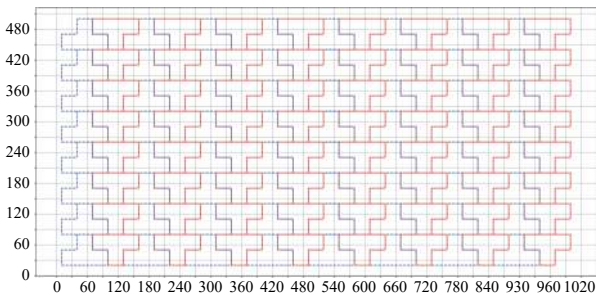


图6 凸字型切割方案图(1000×500)

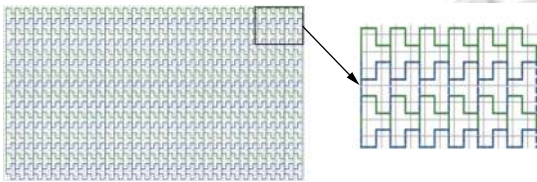


图7 凸字型切割方案图(2000×1000)

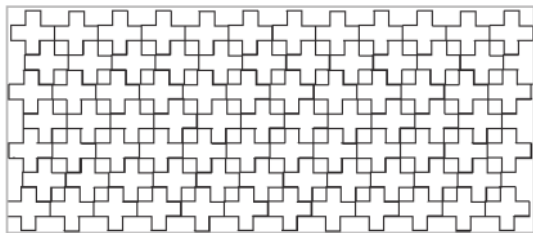


图8 十字型切割方案图(1200×500)

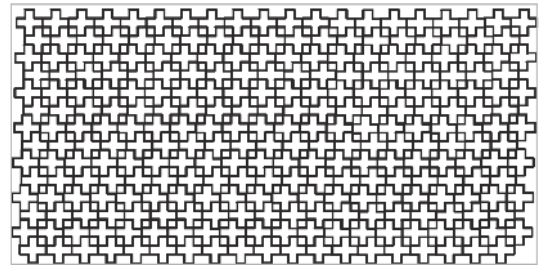


图9 十字型切割方案图(2000×1000)

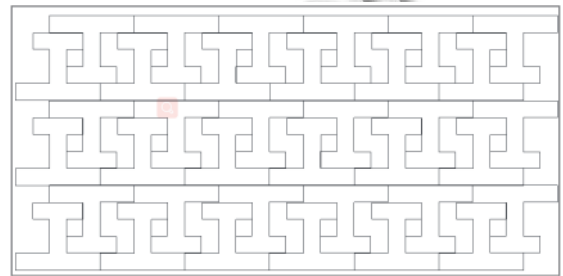


图10 工字型切割方案图(320×160)

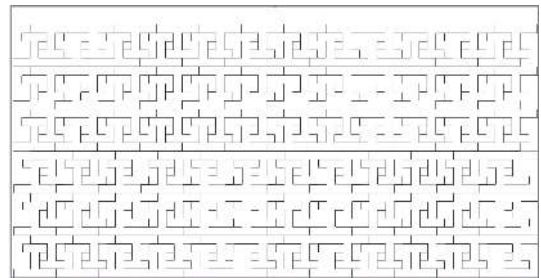


图11 工字型切割方案图(650×320)

表2 T字型和十字型零件板材利用率对比(单位:%)




零件样图 尺寸(mm)	板材尺寸 (mm)	格点改造 算法 <sup>[2,16]</sup>	顶点覆盖 算法 <sup>[15,16]</sup>	本文 算法
 (30,30)T字型	(200,150)	73.4	70.1	78.33
	(400,200)	68.8	71.3	76.88
 (100,100)十字型	(650,530)	60.1	57.6	77.40
	(1200,500)	60.8	62.4	75.00

表3 凸字型零件板材利用率对比(单位:%)

零件样图 尺寸(mm)	板材尺寸(mm)	滚动优化算法 <sup>[16]</sup>	本文算法
	(2000,1000)	92.16	95.04
	(2500,1500)	94.46	94.46

## 4 总结与展望

本文针对直角边零件下料优化布局问题,提出了一种基于排样矩形的动态规划求解算法,该算法通过将整块板材的优化问题转换为若干最小子优化问题,采用动态规划的思想进行模型的建立与求解。实验表明,与现有的排样算法相比,本算法能够显著提高材料利用率,同时减少了复杂排样的产生,便于在生产中进行操作。未来将进一步拓展本文算法将其应用于二维不规则零件的下料布局优化问题。

### 参考文献

- 1 贾志欣. 排样问题的研究现状与趋势. 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, 16(7): 890–897. [doi: 10.3321/j.issn:1003-9775.2004.07.003]
- 2 张燕玲, 陆一平, 吴九蕊, 等. 二维直角边不规则零件下料问题研究. 计算机工程与设计, 2014, 35(6): 2197–2201. [doi: 10.3969/j.issn.1000-7024.2014.06.061]
- 3 Moretti AC, de Salles Neto LL. Nonlinear cutting stock problem model to minimize the number of different patterns and objects. Computational & Applied Mathematics, 2008, 27(1): 61–78.
- 4 Afsharian M, Niknejad A, Wäscher G. A heuristic, dynamic programming-based approach for a two-dimensional cutting problem with defects. OR Spectrum, 2014, 36(4): 971–999. [doi: 10.1007/s00291-014-0363-x]
- 5 戚得众, 饶运清, 余天. 板类零件分组下料优化研究. 机械设计与制造, 2015, (6): 129–133.
- 6 Furini F, Malaguti E, Thomopulos D. Modeling two-dimensional guillotine cutting problems via integer programming. INFORMS Journal on Computing, 2016, 28(4): 736–751. [doi: 10.1287/ijoc.2016.0710]
- 7 葛志辉, 王阳, 潘海鸿, 等. 工艺约束策略下的二维不规则零件排样算法. 广西大学学报(自然科学版), 2018, 43(2): 580–588.
- 8 张旭, 王莉莉, 杨博韬. 带有一刀切约束的二维非规则装箱算法. 计算机科学, 2020, 47(5): 212–216. [doi: 10.11896/jsjcx.190400078]
- 9 Hartmanis J. Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness (Michael R. Garey and David S. Johnson). SIAM Review, 1982, 24(1): 90–91.
- 10 Belov G, Kartak V M, Rohling H, et al. Conservative scales in packing problems. OR Spectrum, 2013, 35(2): 505–542. [doi: 10.1007/s00291-011-0277-9]
- 11 卢蓉, 范勇, 陈念年, 等. 一种提取目标图像最小外接矩形的快速算法. 计算机工程, 2010, 36(21): 178–180. [doi: 10.3969/j.issn.1000-3428.2010.21.064]
- 12 邓国斌, 沈萍, 潘立武. 基于多段排样方式的卷材二维剪切下料算法. 锻压技术, 2019, 44(9): 46–50.
- 13 Cui YD, Huang BX. Reducing the number of cuts in generating three-staged cutting patterns. European Journal of Operational Research, 2012, 218(2): 358–365. [doi: 10.1016/j.ejor.2011.10.047]
- 14 Korte B, Vygen J. The knapsack problem. In: Korte B, Vygen J, eds. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms. Berlin Heidelberg: Springer, 2012. 459–470.
- 15 裘瀚照. 二维不规则下料问题的几何干涉检查及模型简化研究 [硕士学位论文]. 北京: 北京交通大学, 2015.40–70.
- 16 周俊鹏. 不规则钣金零件的下料优化系统研究 [硕士学位论文]. 北京: 北京交通大学, 2016.29–40.