计算机系统应用 ISSN 1003-3254, CODEN CSAOBN
Computer Systems & Applications,2020,29(10):36−43 [doi: 10.15888/j.cnki.csa.007536]
©中国科学院软件研究所版权所有.
E-mail: csa@iscas.ac.cn
http://www.c-s-a.org.cn
Tel: +86-10-62661041

# 考虑风险偏好的概率犹豫模糊多属性决策方法①

骆　华, 王应明

(福州大学 经济与管理学院, 福州 350108)
通讯作者: 骆　华, E-mail: 2981509525@qq.com

**摘　要**: 针对属性值为概率犹豫模糊数以及决策者面对风险的态度存在差异的问题, 提出一种考虑风险偏好的概率犹豫模糊多属性决策方法. 首先考虑到决策者的犹豫程度可能会影响到决策效果, 给出了以概率犹豫模糊元中元素个数差异表示的犹豫度公式, 并且结合元素值之间的差异, 定义拓展的海明和欧式距离公式, 再以决策者给出的期望值为参考点建立前景决策矩阵, 运用离差最大化法计算属性权重. 在此基础上, 计算各个方案的综合前景值并进行排序. 最后通过企业购买 ERP 系统软件的算例分析验证了所提出方法的有效性和合理性.
**关键词**: 多属性决策; 概率犹豫模糊集; 前景理论; 期望值; 离差最大化

引用格式: 骆华,王应明.考虑风险偏好的概率犹豫模糊多属性决策方法.计算机系统应用,2020,29(10):36–43. http://www.c-s-a.org.cn/1003-3254/7536.html

## Probabilistic Hesitant Fuzzy Multi-Attribute Decision-Making Method Considering Risk Preference

LUO Hua, WANG Ying-Ming

(School of Economics and Management, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China)

**Abstract**: Aiming at the problem that the attribute value is a probabilistic hesitant fuzzy number and the decision maker's attitude to risk is different, a probabilistic fuzzy multi-attribute decision-making method considering risk preference is proposed. First, considering the decision maker's hesitation may affect the decision-making effect, a hesitation formula expressed by the difference between the number of elements in the probability hesitant fuzzy element is given. The extended Hamming distance and the extended Euclidean distance are defined based on the hesitation and the difference of element values. Then, a foreground decision matrix is established based on the expected values given by decision makers, and the maximum weight method is used to calculate the attribute weights. Based on this, the comprehensive foreground value of each plan is calculated and ranked. At last, the example analysis of purchasing ERP system software verifies the validity and rationality of the proposed method.
**Key words**: multi-attribute decision-making; probabilistic hesitant fuzzy set; foreground theory; expected value; maximum deviation

决策具有普遍性, 但是近年来由于决策环境的不确定性、信息的不完整性以及人们处理信息能力的限制使得传统的决策方法已经很难解决现实生活中的很多决策问题. 为此, Zadeh[1] 于 1965 年提出了模糊集的概念, 其能够用于刻画模糊现象从而解决许多模糊问题. 但是模糊集理论不允许一个属性同时出现几个不同的隶属度, 因而不能有效地刻画犹豫信息, 从而导致部分决策信息的丢失. 为了能够更好地刻画犹豫信息, Torra[2] 于 2010 年提出了犹豫模糊集的概念, 其允许一个属性可能出现几个不同的隶属度值, 能够反映出人

① 基金项目: 国家自然科学基金 (61773123)
Foundation item: National Natural Science Foundation of China (61773123)
收稿时间: 2020-01-12; 修改时间: 2020-02-08; 采用时间: 2020-02-24; csa 在线出版时间: 2020-09-30



© 中国科学院软件研究所 http://www.c-s-a.org.cn

们在决策时的犹豫程度. 此后, 国内外学者对犹豫模糊集进行了相关的拓展研究, 将其拓展为区间犹豫模糊集[3]、三角犹豫模糊集[4]、犹豫模糊语言集[5] 等. 虽然犹豫模糊集允许一个属性用几个不同的隶属度值表达, 但是它却将每一个隶属度发生的概率看作是相同的. 而在现实生活中, 专家在给出隶属度值时, 认为某一个隶属度出现的概率比另一个隶属度大, 这是很正常的现象. 显然, 仅用犹豫模糊集并不能表示专家的这种偏好, 从而导致某些决策信息的丢失. 为了有效地表示出不同的隶属度值出现的概率可能不同的现象, Xu 等[6] 在犹豫模糊集的基础上提出了概率犹豫模糊集, 其包含的不确定信息更多, 更能表达决策者的偏好. 近年来, 国内外相关学者对概率犹豫模糊集进行了研究, Li 等[7] 提出了概率犹豫模糊元的可能度公式, 将其与 QUALIFLEX 和 PROMETHEE Ⅱ 方法相结合并运用到多属性决策问题中. Zhao 等[8] 基于传统的聚合算子, 给出了概率犹豫模糊集的聚合算子. Gao 等[9] 定义了概率犹豫模糊元的距离测度, 并且提出了考虑时间因素的多阶段动态概率犹豫模糊聚合算子. 朱峰等[10] 提出了概率犹豫模糊元的符号距离测度和交叉熵测度来构建多属性决策模型.

为了更加现实地描述决策者的实际决策过程, Tversky 等[11] 提出了前景理论, 其采用价值函数和概率权重代替期望效用中的效用和概率. 参考点的选择是前景理论中重要的环节, 现有的参考点主要包括零点参考点、中位数参考点、正负理想点参考点以及期望值参考点等[12]. 在这 4 个参考点中, 只有期望值参考点不受准则值的影响, 是决策者对准则值的总体认知, 能够充分反映决策者的偏好. 张晓等[13] 以期望值为参考点, 将前景理论运用于风险型混合多属性决策问题中. 闫书丽等[14] 以期望灰靶为参考点并利用线性变化算子对前景价值进行规范化处理. 龚承柱等[15] 事先给定期望值参考点, 基于前景理论和隶属度建立混合型多属性决策模型.

总体上看, 以概率犹豫模糊数表达属性的隶属度已经非常常见, 在决策过程中, 决策者的预期以及心理行为因素会影响到最终决策效果, 而前景理论能够充分地反映决策者的心理行为. 因此, 本文将前景理论运用到概率犹豫模糊集的环境中, 提出了一种基于前景理论的概率犹豫模糊多属性决策方法. 给出了考虑决策者犹豫度以及元素值之间差异的拓展的海明距离公式和拓展的欧式距离公式并且以决策者的期望值为参考点建立前景决策矩阵, 然后利用离差最大化法计算属性权重, 得出各个方案的综合前景值, 并按其大小进行排序.

## 1 预备知识

### 1.1 概率犹豫模糊集相关知识

文献 [2] 在模糊集的基础上提出了犹豫模糊集的概念, 用于解决在同一个属性中可能存在多个评估值的现象.

定义 1[2]. 设非空集合 $X$ 是一个给定的论域, 则称:

$$H = \{\langle x, h(x)\rangle | x \in X\}$$

为 $X$ 上的一个犹豫模糊集. 其中, $h(x) = \{\gamma^\lambda | \lambda = 1, 2, \cdots, l\}$为其中一个犹豫模糊元, $l$为概率犹豫模糊元$h(x)$中元素的个数, $\gamma^\lambda \in [0,1]$为非空集合 $X$ 中的元素$x$属于犹豫模糊集 $H$ 的隶属度.

定义 2[6]. 设非空集合$X$是一个给定的论域, 则称:

$$H_P = \{\langle x, h(P_x)\rangle | x \in X\}$$

为在 $X$ 上的一个概率犹豫模糊集. 其中, $h(P_x) = \{\gamma^\lambda(P^\lambda) | \lambda = 1, 2, \cdots, l\}$为概率犹豫模糊元, $l$为概率犹豫模糊元$h(P_x)$中元素的个数, $\gamma^\lambda \in [0,1]$为非空集合 $X$ 中的元素$x$属于概率犹豫模糊集$H_P$的隶属度, $P^\lambda \in [0,1]$表示隶属度$\gamma^\lambda$的概率, 且$\sum_{\lambda=1}^{l} P^\lambda \le 1$, 当$\sum_{\lambda=1}^{l} P^\lambda = 1$时, 表示信息完全; 当$\sum_{\lambda=1}^{l} P^\lambda < 1$时, 表示信息不完全.

一般将所有的概率犹豫模糊元$h(P_x)$中的元素按隶属度从小到大排序, $h(P_x)$的补集为:

$$h^c(P_x) = \{[1-\gamma^\lambda](P^\lambda) | \lambda = 1, 2, \cdots, l\}$$

定义 3[7]. 设$h(P_x) = \{\gamma^\lambda(P^\lambda) | \lambda = 1, 2, \cdots, l\}$为概率犹豫模糊元, 则称:

$$E(h(P_x)) = \sum_{\lambda=1}^{l} \gamma^\lambda P^\lambda$$

$$D(h(P_x)) = \sum_{\lambda=1}^{l} (\gamma^\lambda - E(h(P_x)))^2 P^\lambda$$

分别为$h(P_x)$的期望和方差.

定义 4[7]. 设$h_1(P_x)$和$h_2(P_x)$为任意的两个概率犹豫模糊元, $E(h_1(P_x))$、$E(h_2(P_x))$分别为$h_1(P_x)$和$h_2(P_x)$的期望值, $D(h_1(P_x))$、$D(h_2(P_x))$分别为$h_1(P_x)$和$h_2(P_x)$的



© 中国科学院软件研究所 http://www.c-s-a.org.cn

方差. 则:

① 若$E(h_1(P_x)) > E(h_2(P_x))$, 则$h_1(P_x) > h_2(P_x)$.

② 若$E(h_1(P_x)) < E(h_2(P_x))$, 则$h_1(P_x) < h_2(P_x)$.

③ 若$E(h_1(P_x)) = E(h_2(P_x))$且$D(h_1(P_x)) < D(h_2(P_x))$则$h_1(P_x) > h_2(P_x)$;

若$E(h_1(P_x)) = E(h_2(P_x))$且$D(h_1(P_x)) = D(h_2(P_x))$则$h_1(P_x) = h_2(P_x)$;

若$E(h_1(P_x)) = E(h_2(P_x))$且$D(h_1(P_x)) > D(h_2(P_x))$则$h_1(P_x) < h_2(P_x)$.

设概率犹豫模糊元$h_1(P_x)$和$h_2(P_x)$中的元素个数分别为$l_1$和$l_2$, 当$l_1 \neq l_2$时, 在元素较少的集合中添加元素, 使其个数为$l = \max\{l_1, l_2\}$. 决策者可以根据自身对风险的态度选择所添加的元素. 本文中, 采用添加概率犹豫模糊元中隶属度最大的值且添加的隶属度的概率为 0.

定义 5[9]. 设$h_1(P_x) = \left\{\gamma_1{}^{\lambda}(P_1{}^{\lambda}) | \lambda = 1, 2, \cdots, l_1\right\}$、$h_2(P_x) = \left\{\gamma_2{}^{\lambda}(P_2{}^{\lambda}) | \lambda = 1, 2, \cdots, l_2\right\}$为任意两个概率犹豫模糊元, 则称:

$$D(h_1(P), h_2(P)) = \sum_{\lambda=1}^{l} \left|\gamma_1^{\lambda} P_1^{\lambda} - \gamma_2^{\lambda} P_2^{\lambda}\right| \tag{1}$$

为概率犹豫模糊元$h_1(P_x)$和$h_2(P_x)$之间的海明距离, $l = \max(l_1, l_2)$.

### 1.2 前景理论相关知识

根据前景理论思想[11], 前景理论主要由综合前景值的大小来确定最优决策方案, 而综合前景值包括前景价值函数$v(x_i)$和概率权重函数$w(P_i)$, 具体表示为:

$$U = \sum_{i=1}^{n} w(P_i) v(x_i)$$

Tversky 等[16] 给出了价值函数为幂函数:

$$v(\Delta x) = \begin{cases} \Delta x^{\alpha} & \Delta x \geq 0 \\ -\theta(-\Delta x)^{\beta} & \Delta x < 0 \end{cases}$$

其中, $\Delta x$表示属性值$x$偏离某一参考点的大小, $\Delta x \geq 0$表示获得收益, $\Delta x < 0$表示遭受损失; $\alpha$、$\beta$分别表示偏好风险和厌恶风险的系数, 且$0 < \alpha$、$\beta < 1$; $\theta$表示损失规避系数, 且$\theta > 1$.

王应明等[17] 基于犹豫模糊欧式距离定义了前景价值函数.

定义 6[17]. 设$h_1 = \left\{\gamma_1^i | i = 1, 2, \cdots, l_1\right\}$和$h_2 = \left\{\gamma_2^i | i = 1, 2, \cdots, l_2\right\}$为两个犹豫模糊数, 通过增加相应的元素, 使$h_1$和$h_2$标准化为具有相同的个数, 若以$h_1$为参考点, 则$h_2$的前景价值函数为:

$$v(h_2) = \begin{cases} (d_H(h_1, h_2))^{\alpha} & h_2 \geq h_1 \\ -\theta(d_H(h_1, h_2))^{\beta} & h_2 < h_1 \end{cases}$$

## 2 确定前景决策矩阵及属性权重

在前景理论中, 决策者首先要对各个方案的属性进行衡量, 以确定各个方案的“收益”或者“损失”, 而在衡量的过程中一般要选取某个参考点, 选取参考点的不同, 可能会带来不同的衡量结果. 本文采用决策者对各个属性的期望向量作为参考点, 并且各个期望值以概率犹豫模糊元的形式给出, 把期望值作为参考点可以很好的与前景理论中充分考虑决策者心理行为的性质相结合, 然后通过各个方案的属性值与参考点之间的比较, 来确定各个属性与参考点之间的大小关系, 并且计算各个属性与参考点之间的距离, 确定前景决策矩阵.

### 2.1 距离公式

由于传统的海明距离和欧式距离公式只考虑了概率犹豫模糊元中元素值之间的差异, 没有将概率犹豫模糊元中元素个数的差异考虑进去, 可能会导致决策信息的丢失. 为了充分考虑决策者之间意见犹豫不决的程度, 本文针对犹豫值的个数, 给出了犹豫度; 综合考虑犹豫度以及元素值之间的差异, 提出拓展的海明距离公式、拓展的标准欧式距离公式、拓展的一般欧式距离公式、拓展的加权海明距离公式、拓展的加权标准欧式距离公式以及拓展的加权一般欧式距离公式.

定义 7. 设非空集合$X$为一个给定的论域, $H_P$为集合$X$上的一个概率犹豫模糊集, $l$为概率犹豫模糊元$h(P_x)$中元素的个数, 令:

$$u(h(P_x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \ln l}}, \quad u(H_P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u(h_i(P_x))$$

称$u(h(P_x))$为概率犹豫模糊元$h(P_x)$的犹豫度, $u(H_P)$为概率犹豫模糊集$H_P$的犹豫度. 概率犹豫模糊元中元素的个数越多, 犹豫程度越大. 当且仅当概率犹豫模糊元中元素个数为 1 时, 其犹豫度为 0.

定义 8. 设$h_1(P_x) = \left\{\gamma_1{}^{\lambda}(P_1{}^{\lambda}) | \lambda = 1, 2, \cdots, l_1\right\}$、$h_2(P_x) = \left\{\gamma_2{}^{\lambda}(P_2{}^{\lambda}) | \lambda = 1, 2, \cdots, l_2\right\}$为两个概率犹豫模糊元, 则:

(1) 概率犹豫模糊元$h_1(P_x)$与$h_2(P_x)$之间拓展的海



© 中国科学院软件研究所 http://www.c-s-a.org.cn

明距离为:

$$D_H(h_1(P_x),h_2(P_x))=\frac{1}{2}(|u(h_1(P_x))-u(h_2(P_x))|+\frac{1}{l}\sum_{\lambda=1}^{l}|\gamma_1^\lambda p_1^\lambda-\gamma_2^\lambda p_2^\lambda|) \tag{2}$$

(2) 概率犹豫模糊元$h_1(P_x)$与$h_2(P_x)$之间拓展的标准欧式距离为:

$$D_H(h_1(P_x),h_2(P_x))=\left(\frac{1}{2}\left(|u(h_1(P_x))-u(h_2(P_x))|^2+\frac{1}{l}\sum_{\lambda=1}^{l}|\gamma_1^\lambda p_1^\lambda-\gamma_2^\lambda p_2^\lambda|^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

(3) 概率犹豫模糊元$h_1(P_x)$与$h_2(P_x)$之间拓展的一般欧式距离为:

$$D_H(h_1(P_x),h_2(P_x))=\left[\frac{1}{2}(|u(h_1(P_x))-u(h_2(P_x))|^\varphi+\frac{1}{l}\sum_{\lambda=1}^{l}|\gamma_1^\lambda p_1^\lambda-\gamma_2^\lambda p_2^\lambda|^\varphi)\right]^{\frac{1}{\varphi}} \tag{4}$$

(4) 概率犹豫模糊元$h_1(P_x)$与$h_2(P_x)$之间的拓展的加权海明距离为:

$$D_H(h_1(P_x),h_2(P_x))=\mu|u(h_1(P_x))-u(h_2(P_x))|+\nu\frac{1}{l}\sum_{\lambda=1}^{l}|\gamma_1^\lambda p_1^\lambda-\gamma_2^\lambda p_2^\lambda| \tag{5}$$

(5) 概率犹豫模糊元$h_1(P_x)$与$h_2(P_x)$之间拓展的加权标准欧式距离为:

$$D_H(h_1(P_x),h_2(P_x))=\left(\mu|u(h_1(P_x))-u(h_2(P_x))|^2+\nu\frac{1}{l}\sum_{\lambda=1}^{l}|\gamma_1^\lambda p_1^\lambda-\gamma_2^\lambda p_2^\lambda|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

(6) 概率犹豫模糊元$h_1(P_x)$与$h_2(P_x)$之间拓展的加权一般欧式距离为:

$$D_H(h_1(P_x),h_2(P_x))=\left(\mu|u(h_1(P_x))-u(h_2(P_x))|^\varphi+\nu\frac{1}{l}\sum_{\lambda=1}^{l}|\gamma_1^\lambda p_1^\lambda-\gamma_2^\lambda p_2^\lambda|^\varphi\right)^{\frac{1}{\varphi}} \tag{7}$$

其中, $l=\max(l_1,l_2)$, $0\le\mu,\nu\le1$且$\mu+\nu=1$, $\varphi>0$. 特别的, 当$\varphi=1$且$\mu=\nu=0.5$时, 式 (7) 退化为拓展的海明距离, 即式 (2); 当$\varphi=2$且$\mu=\nu=0.5$时, 式 (7) 退化为拓展的标准欧式距离, 即式 (3); 当$\mu=\nu=0.5$时, 式 (7) 退化为拓展的一般欧式距离, 即式 (4); 当$\varphi=1$时, 式 (7) 退化为拓展的加权海明距离, 即式 (5); 当$\varphi=2$时, 式 (7) 退化为拓展的加权标准欧式距离, 即式 (6).

性质 1. 式 (2) 中的距离$D(h_1(P_x),h_2(P_x))$满足:

① $0\le D(h_1(P_x),h_2(P_x))\le1$;

② $D(h_1(P_x),h_2(P_x))=0$, 当且仅当$h_1(P_x)$=$h_2(P_x)$;

③ $D(h_1(P_x),h_2(P_x))$=$D(h_2(P_x),h_1(P_x))$.

证明:

① 因为$0\le u(h_1(P_x))\le1$, $0\le u(h_2(P_x))\le1$, 则$0\le|u(h_1(P_x))-u(h_2(P_x))|\le1$; 又因为$0\le\gamma_1{}^\lambda\cdot P_1{}^\lambda\le1$, $0\le\gamma_2{}^\lambda\cdot P_2{}^\lambda\le1$, 因此$0\le\left|\gamma_1{}^\lambda\cdot P_1{}^\lambda-\gamma_2{}^\lambda\cdot P_2{}^\lambda\right|\le1$, 故$0\le D(h_1(P_x),h_2(P_x))\le1$.

② 若 $h_1(P_x)$=$h_2(P_x)$, 则$u(h_1(P_x))=u(h_2(P_x))$ 且$\gamma_1{}^\lambda\cdot P_1{}^\lambda$=$\gamma_2{}^\lambda\cdot P_2{}^\lambda$, 因此$|u(h_1(P_x))-u(h_2(P_x))|=0$ 且$\left|\gamma_1{}^\lambda\cdot P_1{}^\lambda-\gamma_2{}^\lambda\cdot P_2{}^\lambda\right|=0$, 故$D(h_1(P_x),h_2(P_x))=0$;

若$D(h_1(P_x),h_2(P_x))=0$, 则$|u(h_1(P_x))-u(h_2(P_x))|=0$且$\left|\gamma_1{}^\lambda\cdot P_1{}^\lambda-\gamma_2{}^\lambda\cdot P_2{}^\lambda\right|=0$, 因此$u(h_1(P_x))=u(h_2(P_x))$且$\gamma_1{}^\lambda\cdot P_1{}^\lambda$=$\gamma_2{}^\lambda\cdot P_2{}^\lambda$, 故$h_1(P_x)$=$h_2(P_x)$.

③ $$D_H(h_1(P_x),h_2(P_x))=\frac{1}{2}(|u(h_1(P_x))-u(h_2(P_x))|+\frac{1}{l}\sum_{\lambda=1}^{l}|\gamma_1^\lambda p_1^\lambda-\gamma_2^\lambda p_2^\lambda|)$$

$$D_H(h_2(P_x),h_1(P_x))=\frac{1}{2}(|u(h_2(P_x))-u(h_1(P_x))|+\frac{1}{l}\sum_{\lambda=1}^{l}|\gamma_2^\lambda p_2^\lambda-\gamma_1^\lambda p_1^\lambda|)$$

因为$|u(h_1(P_x))-u(h_2(P_x))|=|u(h_2(P_x))-u(h_1(P_x))|$且$\left|\gamma_1{}^\lambda\cdot P_1{}^\lambda-\gamma_2{}^\lambda\cdot P_2{}^\lambda\right|=\left|\gamma_2{}^\lambda\cdot P_2{}^\lambda-\gamma_1{}^\lambda\cdot P_1{}^\lambda\right|$, 故D({h_1}({P_x}),{h_2}({P_x}))=$D(h_2(P_x),h_1(P_x))$

同理可得式 (3)～式 (7) 也满足性质 1 的内容, 此处不再赘述.

### 2.2 建立前景决策矩阵

在多属性决策问题中, 设方案集$A$=$\{A_i|i=1,2,\cdots,m\}$, 属性集$C=\left\{C_j|j=1,2,\cdots,n\right\}$, 决策矩阵为$B=[B_{ij}]_{m\times n}$, 其中, $B_{ij}$表示第$i$个方案的第$j$个属性值, 决策者根据已经获得的信息以及对未来的预期给出了关于属性的期望向量$E=\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$.

根据定义 4 中通过计算概率犹豫模糊元的得分函数以及方差来确定两个概率犹豫模糊元之间的大小关系的比较方法, 确定$B_{ij}$与$E_j$之间的大小关系, 从而判断各个方案在该属性下相对于期望是"收益"还是"损失".



© 中国科学院软件研究所 http://www.c-s-a.org.cn

当$B_{ij} \ge E_j$时, 表示第$i$个方案的第$j$个属性相对于期望值$E_j$是获得收益的; 当$B_{ij} < E_j$时, 表示第$i$个方案的第$j$个属性相对于期望值$E_j$是遭受损失的.

以$E_j$为参考点, 则$B_{ij}$的前景价值函数为:

$$v(B_{ij}) = \begin{cases} (D_H(E_j, B_{ij}))^{\alpha} & B_{ij} \ge E_j \\ -\theta(D_H(E_j, B_{ij}))^{\beta} & B_{ij} < E_j \end{cases} \tag{8}$$

其中, $\alpha$、$\beta$分别表示偏好风险和厌恶风险的系数, 且$0<\alpha$、$\beta<1$; $\theta$表示损失规避系数, 且$\theta>1$. $\alpha$、$\beta$越大, 表示决策者越倾向于冒险; $\theta$越大, 表示决策者面对损失时的规避程度越大.

关于 3 个参数$\alpha$、$\beta$以及$\theta$的取值, Tversky 等[16] 通过大量的实验测试以及相关分析, 得出一组能够表示任意决策者心理行为的参数值$\alpha=\beta=0.88$, $\theta=2.25$. 另外, 文献 [18,19] 通过实验对这 3 个参数的取值进行了相关的分析研究, 得到了与上述取值非常相近的参数值. 此外, 文献 [13,20] 在研究应用中也采用上述的参数值, 可见上述参数值在实际的决策中具有非常重要的意义. 因此, 本文在后续的算例分析中也采用上述参数值进行计算.

最后通过计算前景价值函数, 建立前景决策矩阵$V=[v(B_{ij})]_{m\times n}$.

### 2.3 确定属性权重

设方案集$A=\{A_i|i=1,2,\cdots,m\}$,属性集$C=\{C_j|j=1,2,\cdots,n\}$, 属性权重为$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$, $w_j\in[0,1]$且$\sum_{j=1}^{n} w_j=1$. 本文基于离差最大化思想构建在概率犹豫模糊集环境下的属性权重确定模型. 具体模型如下[6]:

$$\max\ f(w)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|D_H(E_j,B_{ij})-D_H(E_j,B_{kj})\right|w_j$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases}\sum_{j=1}^{n}(w_j)^2=1\\ 0\le w_j\le 1\end{cases}$$

构造拉格朗日函数来求解上述模型:

$$L(w,\eta)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|D_H(E_j,B_{ij})-D_H(E_j,B_{kj})\right|w_j + \frac{\eta}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}{w_j}^2-1\right) \tag{9}$$

对式 (9) 分别关于$w_j$、$\eta$求偏导, 并设其为 0, 获得等式如下:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(w_j,\eta)}{\partial w_j}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\left|D_H(E_j,B_{ij})-D_H(E_j,B_{kj})\right|+\eta w_j=0\\ \dfrac{\partial L(w_j,\eta)}{\partial \eta}=\sum_{j=1}^{n}w_j^2-1=0\end{cases} \tag{10}$$

求解式 (10) 得:

$$w_j=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\left|D_H(E_j,B_{ij})-D_H(E_j,B_{kj})\right|}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\left|D_H(E_j,B_{ij})-D_H(E_j,B_{kj})\right|\right)^2}} \tag{11}$$

对$w_j$进行单位化得属性权重为:

$$w_j^*=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\left|D_H(E_j,B_{ij})-D_H(E_j,B_{kj})\right|}{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\left|D_H(E_j,B_{ij})-D_H(E_j,B_{kj})\right|\right)} \tag{12}$$

## 3 决策步骤

对于概率犹豫模糊多属性决策问题, 根据上述的定义、性质以及分析, 本文提出基于前景理论的概率犹豫模糊多属性决策方法, 具体步骤如下:

步骤 1. 专家以概率犹豫模糊元的形式给出每个方案在各个属性下的评价值, 得到概率犹豫模糊决策矩阵$B=[B_{ij}]_{m\times n}$.

步骤 2. 对决策矩阵进行标准化处理, 得到标准化概率犹豫模糊决策矩阵$B'=[B'_{ij}]_{m\times n}$, 标准化方法如下:

将属性分类为效益性属性以及成本型属性, 若属性$C_j$为效益性属性, 则原决策矩阵中的概率犹豫模糊元保持不变; 若属性$C_j$为成本型属性, 则原决策矩阵中的概率犹豫模糊元为其补集. 即:

$$B'_{ij}=\begin{cases}B_{ij}=\left\{\gamma_{ij}^{\lambda}(P_{ij}^{\lambda})|\lambda=1,2,\cdots,l\right\} & C_j\in\text{效益型}\\ B_{ij}^{C}=\left\{[1-\gamma_{ij}^{\lambda}](P_{ij}^{\lambda})|\lambda=1,2,\cdots,l\right\} & C_j\in\text{成本型}\end{cases}$$

步骤 3. 决策者给出属性期望向量$E=\{E_1,E_2,\cdots,E_n\}$, 并且采用定义 8 中的公式计算$B'_{ij}$与$E_j$之间拓展的距离, 得到距离矩阵$D_{ij}=[D_H(E_j,B'_{ij})]_{m\times n}$.

步骤 4. 结合距离矩阵以及式 (8), 建立前景决策矩阵$V=[v(B'_{ij})]_{m\times n}$.

步骤 5. 运用式 (12) 计算各个属性的权重, 得到属



© 中国科学院软件研究所 http://www.c-s-a.org.cn

性权重向量$w^* = [w_1^*, w_2^*, \cdots, w_n^*]^{\mathrm{T}}$.

步骤 6. 计算各个方案的综合前景值:

$$V_i^* = \sum_{j=1}^{n} v(B'_{ij}) w_j^* \tag{13}$$

再进行排序并选择最优方案, $V_{ij}^*$的值越大, 表示方案越优.

## 4 算例分析

### 4.1 算例分析

某企业现需要购买 ERP 系统软件且利用评价指标对 ERP 系统进行选择, 评价指标从独立性、可测性、层次性、简明性和经济性 5 个原则出发进行设立. 现有 4 个 ERP 系统软件品牌$A_1$、$A_2$、$A_3$、$A_4$可供选择, 通过建立 4 个属性$C_1$(软件信誉和服务水平)、$C_2$(成本体系)、$C_3$(功能满足程度) 和$C_4$(系统性能) 作为 ERP 系统软件评价指标体系. 其中, $C_2$属于成本型属性, $C_1$、$C_3$和$C_4$属于效益型属性. 四个属性对应的权重向量为$w^* = \left(w_1^*, w_2^*, w_3^*, w_4^*\right)$未知. 决策者以概率犹豫模糊数的形式给出各个属性的期望向量为:

$$\begin{aligned} Q = (&\{0.6(0.5), 0.8(0.5)\}, \{0.5(0.3), 0.6(0.5), 0.7(0.2)\}, \\ &\{0.6(0.6), 0.7(0.4)\}, \{0.6(0.4), 0.8(0.4), 0.9(0.2)\}) \end{aligned}$$

运用本文方法选择最优方案的步骤如下:

步骤 1. 决策者以概率犹豫模糊数的形式给出决策值, 构建决策矩阵$B = [B_{ij}]_{m\times n}$如表 1 所示.

表 1　决策矩阵

| 软件品牌 | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | {0.6(0.8),0.7(0.2)} | {0.6(1) } | {0.6(0.8),0.7(0.2)} | {0.6(0.3),0.7(0.3),0.8(0.4)} |
| $A_2$ | {0.5(1) } | {0.3(0.2),0.4(0.4),0.5(0.4)} | {0.5(0.2),0.6(0.8)} | {0.7(0.5),0.8(0.5)} |
| $A_3$ | {0.7(0.3),0.8(0.7)} | {0.3(0.6),0.5(0.2),0.6(0.2)} | {0.7(1)} | {0.6(0.3),0.8(0.2),0.9(0.5)} |
| $A_4$ | {0.8(0.6),0.85(0.4)} | {0.5(0.4),0.7(0.6)} | {0.7(0.3),0.8(0.7)} | {0.8(1) } |

步骤 2. 对决策矩阵进行标准化处理, 得到标准化概率犹豫模糊决策矩阵$B' = [B'_{ij}]_{m\times n}$如表 2 所示.

表 2　标准化后的决策矩阵

| 软件品牌 | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | {0.6(0.8),0.7(0.2)} | {0.4(1) } | {0.6(0.8),0.7(0.2)} | {0.6(0.3),0.7(0.3),0.8(0.4)} |
| $A_2$ | {0.5(1) } | {0.5(0.4),0.6(0.4),0.7(0.2)} | {0.5(0.2),0.6(0.8)} | {0.7(0.5),0.8(0.5) } |
| $A_3$ | {0.7(0.3),0.8(0.7)} | {0.4(0.2),0.5(0.2),0.7(0.6)} | {0.7(1)} | {0.6(0.3),0.8(0.2),0.9(0.5)} |
| $A_4$ | {0.8(0.6),0.85(0.4)} | {0.3(0.6),0.5(0.4) } | {0.7(0.3),0.8(0.7)} | {0.8(1) } |

步骤 3. 运用概率犹豫模糊拓展的标准欧式距离公式 (3) 计算决策值与期望值之间的距离, 得到距离矩阵如表 3 所示.

表 3　距离矩阵

| 软件品牌 | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0.1581 | 0.5389 | 0.0922 | 0.0767 |
| $A_2$ | 0.5047 | 0.0319 | 0.1640 | 0.1095 |
| $A_3$ | 0.0918 | 0.1434 | 0.5032 | 0.1304 |
| $A_4$ | 0.0949 | 0.0927 | 0.1588 | 0.5801 |

步骤 4. 结合距离矩阵以及式 (8), 计算属性值相对于参照点的收益或损失, 建立前景决策矩阵如表 4.

表 4　前景决策矩阵

| 软件品牌 | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | –0.4439 | –1.3059 | –0.2761 | –0.2349 |
| $A_2$ | –1.2326 | –0.1085 | –0.4584 | 0.1428 |
| $A_3$ | 0.1223 | 0.1810 | 0.5464 | 0.1666 |
| $A_4$ | 0.1259 | –0.2774 | 0.1981 | 0.6192 |

步骤 5. 运用式 (12) 计算各个属性的权重, 得到属性权重向量:

$$W^* = (0.2307, 0.2785, 0.2195, 0.2713)$$

步骤 6. 运用式 (13) 计算各个方案的综合前景值:

$V_1 = -0.5904$;　$V_2 = -0.3765$;　$V_3 = 0.2437$;　$V_4 = 0.1633$.

最后, 根据各个方案的综合前景值, 将方案进行排序为$A_3 > A_4 > A_2 > A_1$.

### 4.2 比较分析

如果采用文献 [21] 提供的方法, 参考点全部取为各个属性下的中位数, 计算相应的决策参考点和综合前景值, 得到方案的综合前景值为:

$V_1 = -0.3429$;　$V_2 = -0.4119$;　$V_3 = 0.2620$;　$V_4 = 0.1984$.

将方案进行排序为$A_3 > A_4 > A_1 > A_2$.

从结果可以看出, 文献 [21] 提出的方法与本文提出的方法虽然最优方案都是$A_3$, 但是总体排列顺序不



© 中国科学院软件研究所 http://www.c-s-a.org.cn

同, 本文方法得出的结果是方案$A_2$优于方案$A_1$, 而文献 [21] 得出的结果是方案$A_1$优于方案$A_2$, 并且从综合前景值的具体数值来看, 文献 [21] 方法的数值之间相隔较近, 与本文方法相比其区分度较不明显, 这主要是因为采用中位数作为决策参考点时, 不能很好地反映决策者的心理预期, 而用期望值作为决策参考点得出的结果能够充分考虑决策者的心理行为, 更能有效地和前景理论相结合.

若假设决策矩阵中的每个隶属度属于给定集合的概率相同, 即以犹豫模糊集的形式给出决策矩阵中的元素, 并运用本文的方法计算出各个方案的综合前景值为:

$V_1 = -0.4949$; $V_2 = -0.6450$; $V_3 = 0.0975$; $V_4 = 0.0642$.

将方案进行排序为$A_3 > A_4 > A_1 > A_2$

从排序结果可以看出, 在以犹豫模糊集形式给出决策信息的环境下与本文中以概率犹豫模糊集形式给出决策信息的环境下虽然最优方案都是$A_3$, 但是总体排列顺序不同, 以概率犹豫模糊集形式表示决策信息得出的结果是方案$A_2$优于方案$A_1$, 而以犹豫模糊集形式表示决策信息得出的结果是方案$A_1$优于方案$A_2$, 原因在于在以犹豫模糊集形式表示决策信息, 只体现了每个隶属度的值, 认为每个隶属度属于给定集合的概率是相同的, 而在实际决策过程中, 决策者认为某些隶属度属于给定集合的概率大于其他隶属度, 这是很正常的现象. 因此在没有考虑每个隶属度属于给定集合的概率的犹豫模糊集环境下, 得出的排序结果相对而言没有很好地符合决策者的预期.

## 5 结论

本文将前景理论运用到概率犹豫模糊集的环境中, 提出了一种基于前景理论的概率犹豫模糊多属性决策方法. 首先根据每个概率犹豫模糊元中的元素个数的不同, 给出能够表现出决策者的犹豫程度的犹豫度公式, 再结合元素值之间的差异, 给出了拓展的海明距离以及欧式距离, 其更能够表示出决策者的心理偏好, 并且基于距离矩阵采用离差最大化法计算属性权重; 然后以决策者的期望值为参考点建立前景决策矩阵, 这能够将决策者的心理风险因素引入到概率犹豫模糊集的多属性决策中. 该方法能够将心理学与管理决策过程有机地结合起来, 更能够反映出人们在面对模糊信息时的决策行为, 能够为概率犹豫模糊环境下的多属性研究提供一种新的思路, 是概率犹豫模糊集的有益扩展, 可以用于应急决策、创新投资决策等实际问题中. 在后面的研究中, 重点研究将前景理论放在动态的概率犹豫模糊集环境中, 反映出每个时间段由于获得信息的不同, 决策者对于风险的态度是不同的, 从而选择的决策方案可能也会存在不同的决策问题.

## 参考文献


1 Zadeh LA. Fuzzy sets. Information and Control, 1965, 8(3): 338–353. [doi: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X]

2 Torra V. Hesitant fuzzy sets. International Journal of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529–539.

3 Chen N, Xu ZS, Xia MM. Interval-valued hesitant preference relations and their applications to group decision making. Knowledge-Based Systems, 2013, 37: 528–540. [doi: 10.1016/j.knosys.2012.09.009]

4 Wei GW, Wang HJ, Zhao XF, *et al*. Hesitant triangular fuzzy information aggregation in multiple attribute decision making. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2014, 26(3): 1201–1209.

5 Lin R, Zhao XF, Wei GW. Models for selecting an ERP system with hesitant fuzzy linguistic information. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2014, 26(5): 2155–2165.

6 Xu ZS, Zhou W. Consensus building with a group of decision makers under the hesitant probabilistic fuzzy environment. Fuzzy optimization and Decision Making, 2017, 16(4): 481–503. [doi: 10.1007/s10700-016-9257-5]

7 Li J, Wang JQ. Multi-criteria outranking methods with hesitant probabilistic fuzzy sets. Cognitive Computation, 2017, 9(5): 611–625. [doi: 10.1007/s12559-017-9476-2]

8 Zhang S, Xu ZS, He Y. Operations and integrations of probabilistic hesitant fuzzy information in decision making. Information Fusion, 2017, 38: 1–11. [doi: 10.1016/j.inffus.2017.02.001]

9 Gao J, Xu ZS, Liao HC. A dynamic reference point method for emergency response under hesitant probabilistic fuzzy environment. International Journal of Fuzzy Systems, 2017, 19(5): 1261–1278. [doi: 10.1007/s40815-017-0311-4]

10 朱峰, 徐济超, 刘玉敏, 等. 基于符号距离和交叉熵的概率犹豫模糊多属性决策方法. 控制与决策, 2020, 35(8): 1977–1986.

11 Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk. Econometrica, 1979, 47(2): 263–292. [doi: 10.2307/1914185]




© 中国科学院软件研究所 http://www.c-s-a.org.cn

12 Liu PD, Jin F, Zhang X, *et al*. Research on the multi-attribute decision-making under risk with interval probability based on prospect theory and the uncertain linguistic variables. Knowledge-Based Systems, 2011, 24(4): 554–561. [doi: 10.1016/j.knosys.2011.01.010]
13 张晓, 樊治平. 基于前景理论的风险型混合多属性决策方法. 系统工程学报, 2012, 27(6): 772–781. [doi: 10.3969/j.issn.1000-5781.2012.06.006]
14 江文奇. 基于前景理论和统计推断的区间数多准则决策方法. 控制与决策, 2015, 30(2): 375–379.
15 龚承柱, 李兰兰, 卫振锋, 等. 基于前景理论和隶属度的混合型多属性决策方法. 中国管理科学, 2014, 22(10): 122–128.
16 Tversky A, Kahneman D. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. Journal of Risk and Uncertainty, 1992, 5(4): 297–323. [doi: 10.1007/BF00122574]
17 王应明, 阙翠平, 蓝以信. 基于前景理论的犹豫模糊 TOPSIS 多属性决策方法. 控制与决策, 2017, 32(5): 864–870.
18 Abdellaoui M. Parameter-free elicitation of utility and probability weighting functions. Management Science, 2000, 46(11): 1497–1512. [doi: 10.1287/mnsc.46.11.1497.12080]
19 Xu HL, Zhou J, Xu W. A decision-making rule for modeling travelers' route choice behavior based on cumulative prospect theory. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 2011, 19(2): 218–228. [doi: 10.1016/j.trc.2010.05.009]
20 王正武, 罗大庸, 黄中祥, 等. 不确定性条件下的多目标多路径选择. 系统工程学报, 2009, 24(3): 355–359. [doi: 10.3969/j.issn.1000-5781.2009.03.015]
21 江文奇. 基于前景理论和 VIKOR 的风险型模糊多准则决策方法. 控制与决策, 2014, 29(12): 2287–2291.



© 中国科学院软件研究所 http://www.c-s-a.org.cn