计算机系统应用 ISSN 1003-3254, CODEN CSAOBN
Computer Systems & Applications,2019,28(9):33−40 [doi: 10.15888/j.cnki.csa.007051]

E-mail: csa@iscas.ac.cn
http://www.c-s-a.org.cn
Tel: +86-10-62661041

基于前景理论和证据推理的区间灰数多属性决策①

熊宁欣, 王应明

(福州大学 经济与管理学院, 福州 350108)
通讯作者: 熊宁欣, E-mail: 531626142@qq.com

摘　要: 针对不确定背景下的多属性决策问题, 提出基于前景理论和证据推理的区间灰数多属性决策方法. 首先,考虑区间灰数在区间内取值概率不相等的特性, 提出一种改进的区间灰数距离公式, 在此基础上, 以方案的正负理想解为参考点, 计算属性值与正负理想解之间的距离集. 其次, 将决策者的风险心理因素引入区间灰数多属性决策中, 结合前景理论构建基于区间灰数距离的前景价值函数. 再次, 通过证据推理算法和区间数可能度大小比较规则对方案做出排序. 最后, 通过算例分析验证所提方法的有效性.

关键词: 区间灰数; 前景理论; 证据推理; 距离测度; 多属性决策

引用格式: 熊宁欣,王应明.基于前景理论和证据推理的区间灰数多属性决策.计算机系统应用,2019,28(9):33–40. http://www.c-s-a.org.cn/1003-3254/7051.html

Multi-Attribute Decision-Making Method of Interval Grey Number Based on Prospect Theory and Evidential Reasoning

XIONG Ning-Xin, WANG Ying-Ming

(School of Economics and Management, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China)

Abstract: In terms of the problem of Multi-Attribute Decision-Making (MADM) under the uncertain background, the interval grey number MADM method based on the prospect theory and Evidential Reasoning (ER) is put forward. Firstly, considering the property of interval grey number, an improved distance formula of interval grey number is developed. On this basis, taking the positive and negative ideal solutions as the reference point, the distance set between the attribute value and the positive and negative ideal solution is calculated. Secondly, the decision makers' psychological risk factors are introduced into the interval grey number MADM to develop a prospect value function based on the improved distance formula. Thirdly, the alternatives are selected by ER and the comparison rule of interval numbers. Finally, an illustrative example shows that the proposed method has rationality and feasibility.

Key words: interval grey number; prospect theory; evidential reasoning; distance measure; multi-attribute decision-making

由于客观现实的复杂性和信息的模糊性, 决策问题研究面临着大量的不确定性. 在不确定性多属性决策领域, 通过模糊数学[1]、概率统计等经典方法处理不确定性问题的研究已趋于成熟, 而灰色系统理论[2,3]自80 年代由中国学者邓聚龙教授创立以来, 产生了广泛的国际影响, 得到了众多学者广泛的关注和深入的研究. 灰数是灰色系统理论的基本单元, 针对模糊数学与统计概率难以描述的不确定信息, 主要通过对部分已

① 基金项目: 国家自然科学基金 (61773123)
Foundation item: National Natural Science Foundation of China (61773123)
收稿时间: 2019-02-27; 修改时间: 2019-03-15; 采用时间: 2019-03-25; csa 在线出版时间: 2019-09-05

知信息进行生成和开发以提取和分析有价值的信息,实现对不确定系统的准确描述.

针对属性值为区间灰数的不确定多熟悉决策问题,谢乃明和刘思峰[4]深入研究了灰数的排序问题,针对连续型灰数与区间型灰数分别给出排序规则. 王坚强等[5]针对概率和信息值均为区间灰数的灰色风险型多属性决策问题,提出一种基于前景理论的决策方法,采用离差最大化思想对方案进行排序. 闫书丽等人[6]研究了信息值为区间灰数,指标权重未知的动态风险决策问题,提出一种基于累积前景理论和灰靶思想的决策方法. 王俊杰和党耀国[7]构建了两个区间灰数间比较的可能度函数,通过在灰数区间上积分,求得两区间灰数间排序的可能度大小. 刘中侠和刘思峰等[8]利用基于区间灰数相离度的灰色关联分析法解决属性值为区间灰数的多属性决策问题,计算综合关联相对贴近度,以给出备选方案的优劣排序. 在目前已有的研究中,许多方法仍是参照区间数排序问题提出,或将区间灰数转化为区间数或实数进行计算,这些方法忽视了区间灰数的本质特征,无法充分利用区间灰数的原始信息.

综上,本文针对属性值为区间灰数,考虑决策者主观风险偏好的多属性决策问题,提出了基于前景理论和证据推理的区间灰数决策方法. 首先,定义保留区间灰数特性的距离测度公式,计算方案属性值与正负理想解之间的偏差程度. 其次,构建基于距离测度的前景价值函数,依据相对于参照点的收益和损失建立前景价值矩阵. 最后,运用证据推理算法综合前景值,通过实例验证该方法的有效性.

1 预备知识

1.1 区间灰数

定义 1[9]. 灰数$\otimes$是指依赖于某一背景或命题P下的命题信息$p(\theta)$,在某一个覆盖集合D内取值的不知其确切取值的实数,取值范围内包含其唯一真值d^*.灰数的定义为:

$$\forall\otimes \Rightarrow d^* \in D, \theta \in D, D=[a,b], p(\theta)$$

定义 2[4]. 设D为灰数$\otimes$的覆盖集合,集合D可能是某个区间或一般的数集,根据数值覆盖集合可将灰数分为离散型和连续型两类.

1) 若D为一个离散集合,称灰数$\otimes$为离散型灰数,记为$\forall\otimes \Rightarrow d^* \in D, D=[d_1,d_2,\cdots,d_n], \theta\in D, p(\theta)$.

2) 既有下界又有上界的灰数称为连续型灰数,也称为区间灰数. 若D为一个连续集合 (即区间集合),记$\forall\otimes \Rightarrow d^* \in D, D=[a,b], \theta\in D, p(\theta)$, a和b分别称为区间灰数$\otimes$的下界和上界.

相较于区间数,区间灰数内每一点的取值可能性不相等,依据决策者掌握的信息,区间内最可能为真值的点的取值可能性最大,当区间内每一点的取值可能性都相等,即对于任意$\theta_i,\theta_j\in D$,有$p(\theta_i)=p(\theta_j)$,区间灰数退化为传统的区间数.

在实际灰色决策问题中,灰数最常见的表现形式为区间灰数,本文以讨论区间灰数为主.

定义 3[10]. 区间灰数$\otimes\in[a,b]$的最大可能取值称为白化值,用符号$\tilde{\otimes}$表示.

$$\tilde{\otimes}=\alpha a+(1-\alpha)b, \alpha\in[0,1]$$

其中α称为灰数的定位系数. 当$\alpha=0.5$时得到的白化值称为均值白化值. 对于区间灰数,灰数的均值白化值称为核$\hat{\otimes}$:

$$\hat{\otimes}=\frac{1}{2}(a+b) \tag{1}$$

定义 4. 设区间灰数$\otimes\in[a,b]$,称$l(\otimes)=b-a$ 为区间灰数的信息域.

定义 5. 假设两个区间灰数$\otimes_1=[a_1,b_1]\subset[0,1]$和$\otimes_2=[a_2,b_2]\subset[0,1]$,两个区间灰数之间的距离为:

$$d(\otimes_1,\otimes_2)=2^{-1/2}\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2} \tag{2}$$

定义 6[6]. 假设两个区间灰数$\otimes_1=[a_1,b_1]\subset[0,1]$和$\otimes_2=[a_2,b_2]\subset[0,1]$,信息域分别记为$l(\otimes_1)=b_1-a_1$和$l(\otimes_2)=b_2-a_2$,$\hat{\otimes}_1$和$\hat{\otimes}_2$分别表示区间灰数的核,若

$$\frac{\hat{\otimes}_1}{1+l(\otimes_1)}>\frac{\hat{\otimes}_2}{1+l(\otimes_2)} \tag{3}$$

则$\otimes_1>\otimes_2$,否则$\otimes_1<\otimes_2$.

定义 7. 假设两个区间灰数$\otimes_1=[a_1,b_1]\subset[0,1]$和$\otimes_2=[a_2,b_2]\subset[0,1]$,区间灰数$\otimes_1$和$\otimes_2$的并表示为:

$$\otimes_1\cup\otimes_2=\left\{\zeta\,\middle|\,\zeta\in[a_1,b_1]\text{或}\zeta\in[a_2,b_2]\right\}.$$

定义 8. 假设两个区间灰数$\otimes_1=[a_1,b_1]\subset[0,1]$和$\otimes_2=[a_2,b_2]\subset[0,1]$,区间灰数$\otimes_1$和$\otimes_2$的交表示为:

$$\otimes_1\cap\otimes_2=\left\{\zeta\,\middle|\,\zeta\in[a_1,b_1]\text{且}\zeta\in[a_2,b_2]\right\}.$$

1.2 前景理论

前景理论由 Kahneman 和 Tversky[11]在 1979 年提

出, 它以人的"有限理性"为前提, 反映了决策者的主观风险偏好.

定义 9[12]. Tversky 和 Kahneman 给出了价值函数的具体形式是:

$$\upsilon(\Delta x) = \begin{cases} \Delta x^{\alpha} & \Delta x \geq 0 \\ -\sigma(-\Delta x)^{\beta} & \Delta x < 0 \end{cases} \tag{4}$$

上述公式中, α和β称为风险态度系数, 分别表示价值函数在收益和损失区域的凹凸程度, 满足条件$0 \leq \alpha,\beta \leq 1$. σ为损失规避 (厌恶) 系数, 表示相对于收益, 决策者对损失更加敏感, $\sigma > 1$.Δx表示结果相对于参照点的收益或损失, $\Delta x \geq 0$表示收益, $\Delta \leq 0$表示损失.

1.3 证据推理理论

证据推理方法建立在证据理论[13,14]和不确定决策理论的基础上, 自 Yang[15]首次提出以来, 经过 20 多年的发展已称为处理不确定信息的重要工具. 证据推理算法具体如下所示:

Step 1.在证据推理框架中, 方案$a_i(i = 1,2,\cdots,m)$在属性$c_j(j = 1,2,\cdots,n)$下的属性值表示证据, 在使用证据推理算法前需要将证据转换为统一的信度结构.定义一组评价集$H = \{H_n|H_n \prec H_{n+1}, n = 1,2,\cdots,N\}$, 假设$\beta_{n,i}$表示方案在属性$c_j$下被评价为等级$H_n$的信任度, 方案在属性$c_j$下的置信度分布评价表示为:

$$S(e_i) = \{(H_n,\beta_{n,i})|n = 1,2,\cdots,N\} 0 \leq \beta_{n,i} \leq 1, \sum_{n=1}^{N}\beta_{n,i} \leq 1 \tag{5}$$

Step 2. 计算基本概率分配及未分配概率.

定义 10[16]. 令$m_{n,i}$为基本概率分配函数, 表示方案在属性c_j下属于评价等级H_n的信任度, 计算公式如下:

$$m_{n,i} = w_i\beta_{n,i}, n = 1,2,\cdots,N \tag{6}$$

定义 11[16]. 令$m_{H,i}$为未分配概率指派函数, 表示方案在属性c_j下未分配给任何评价等级H_n的信任度, 计算公式如下:

$$m_{H,i} = 1 - \sum_{n=1}^{N} m_{n,i} = 1 - w_i\sum_{n=1}^{N}\beta_{n,i} \tag{7}$$

$$m_{H,i} = \bar{m}_{H,i} + \tilde{m}_{H,i} \tag{8}$$

未分配的概率指派函数$m_{H,i}$从源头上可分解为$\bar{m}_{H,i}$和$\tilde{m}_{H,i}$两个部分, 其中$\bar{m}_{H,i}$表示由于权重而未分配的概率函数, $\tilde{m}_{H,i}$表示由于无知而未分配的概率函数, 它是因不完全评价引起的. 具体计算公式如下:

$$\bar{m}_{H,i} = 1 - w_i \tag{9}$$

$$\tilde{m}_{H,i} = w_i\left(1 - \sum_{n=1}^{N}\beta_{n,i}\right) \tag{10}$$

Step 3. 采用解析合成算法[17]对基本概率分配函数实现证据集成. 具体算法如下所示:

$$\begin{cases} \{H_n\}: m_n = k\left[\prod_{i=1}^{L}(m_{n,i} + \bar{m}_{H,i} + \tilde{m}_{H,i}) - \prod_{i=1}^{L}(\bar{m}_{H,i} + \tilde{m}_{H,i})\right], \\ n = 1,2,\cdots,N \\ \{H\}: \tilde{m}_H = k\left[\prod_{i=1}^{L}(\bar{m}_{H,i} + \tilde{m}_{H,i}) - \prod_{i=1}^{L}\bar{m}_{H,i}\right] \\ \{H\}: \bar{m}_H = k\left[\prod_{i=1}^{L}\bar{m}_{H,i}\right] \\ k = \left[\sum_{n=1}^{N}\prod_{i=1}^{L}(m_{n,i} + \bar{m}_{H,i} + \tilde{m}_{H,i}) - (N-1)\prod_{i=1}^{L}(\bar{m}_{H,i} + \tilde{m}_{H,i})\right]^{-1} \\ \{H_n\}: \beta_n = \dfrac{m_n}{1 - \bar{m}_H}, n = 1,2,\cdots,N \\ \{H\}: \beta_H = \dfrac{\tilde{m}_H}{1 - \bar{m}_H} \end{cases} \tag{11}$$

β_n表示方案被评价为等级H_n的置信度, β_H表示分配到确定评价等级的不确定性, 综合置信度为:

$$S(y) = \{(H_n,\beta_n), n = 1,2,\cdots,N\}$$

其中, 评价等级H_n上的置信度范围为$[\beta_n, (\beta_n + \beta_H)]$.

2 决策模型

2.1 问题描述

考虑某属性值为区间灰数的不确定多属性决策问题由m个候选方案$A = \{a_1,a_2,\cdots,a_m\},(i = 1,2,\cdots,m)$及$n$个评价属性$C = \{c_1,c_2,\cdots,c_n\},(j = 1,2,\cdots,n)$组成. 由于决策信息的不确定性, 方案$a_i$在属性$c_j$下的属性值表现为区间灰数形式$x_{ij}(\otimes) \in [\underline{x}_{ij}, \bar{x}_{ij}]$, 构成原始区间灰数决策矩阵$D = [x_{ij}(\otimes)]_{m\times n}$.

2.2 改进的区间灰数距离公式

如式 (2) 所示, 传统的区间灰数距离公式只考虑了灰区间的上下界测度, 与区间数距离计算方法较为类似, 忽略了区间数与区间灰数之间的本质区别, 得到的结果并不理想. 设 3 个区间灰数为$\otimes_1 = [-3,2]$, $\otimes_2 = [0,1]$, $\otimes_3 = [1,4]$, 根据式 (2) 可得:

$$d(\otimes_1,\otimes_2) = 2^{-1/2}[(-3-0)^2 + (2-1)^2]^{1/2} = \sqrt{5}$$

$$d(\otimes_3,\otimes_2)=2^{-1/2}[(1-0)^2+(4-1)^2]^{1/2}=\sqrt{5}$$

从上述结果可知, $d(\otimes_1,\otimes_2)=d(\otimes_3,\otimes_2)$. 实际上, $\otimes_2$的取值区间在$\otimes_1$内且在$\otimes_3$外, 应该与$\otimes_1$的距离更为接近, 理应由$d(\otimes_1,\otimes_2)<d(\otimes_3,\otimes_2)$, 因此该结果与实际不符.

文献[6]认为, 区间灰数的真实值可能取在核的左右半个区间内的任一点, 因此距离公式应考虑核之间的距离和两个灰数半区间长度的不确定影响. 基于此定义了如下区间灰数距离公式.

定义 12[6]. 假设两个区间灰数$\otimes_1=[a_1,b_1]\subset[0,1]$和 $\otimes_2=[a_2,b_2]\subset[0,1]$, 区间灰数距离公式为:

$$d(\otimes_1,\otimes_2)=|\hat{\otimes}_1-\hat{\otimes}_2|+\frac{1}{2}|l(\otimes_1)-l(\otimes_2)| \tag{12}$$

该公式考虑了区间灰数的特性, 主要根据灰数的核与信息域定义距离公式, 但未考虑到区间灰数内每一点的差值, 容易造成信息的丢失.

因此, 本文针对以上距离公式的不足, 考虑区间灰数的内在特性, 通过信息补充, 基于灰数的核和信息域, 将两个区间灰数内的每一个对应点的偏差值都考虑在内, 同时剔除两区间灰数重叠部分中任意两点之间的偏差, 给出一种改进的区间灰数距离公式.

定义 13. 设两个区间灰数$\otimes_1=[a_1,b_1]\subset[0,1]$和$\otimes_2=[a_2,b_2]\subset[0,1]$, $\otimes_1$的核表示为$\hat{\otimes}_1$, $\otimes_2$的核表示为$\hat{\otimes}_2$, $l(\otimes_1)$和$l(\otimes_2)$分别表示俩区间灰数的信息域, $\zeta_1=\otimes_1\cap\otimes_2$为两个区间灰数的交. 令:

$$\begin{aligned}
&d^2(\otimes_1,\otimes_2)\\
&=\int_0^1\int_0^1\{[\hat{\otimes}_1+\alpha(l(\otimes_1))]-[\hat{\otimes}_2+\beta(l(\otimes_2))]\}^2\,d\alpha d\beta\\
&-\int_0^1\int_0^1\left\{\left[\hat{\zeta}_1+\alpha l(\zeta_1)\right]-\left[\hat{\zeta}_1+\beta l(\zeta_1)\right]\right\}^2 d\alpha d\beta\\
&=[(\hat{\otimes}_1)-(\hat{\otimes}_2)]^2+\frac{1}{12}\left\{[l(\otimes_1)]^2+[l(\otimes_2)]^2\right\}-\frac{1}{6}[l(\zeta_1)]^2
\end{aligned} \tag{13}$$

则称$d(\otimes_1,\otimes_2)=\sqrt{d^2(\otimes_1,\otimes_2)}$为区间灰数$\otimes_1$和$\otimes_2$的距离.

定理 1. 设$d(\otimes_1,\otimes_2)$为区间灰数$\otimes_1$与$\otimes_2$之间的距离, 则具有如下性质:

(1) 非负性: $d(\otimes_1,\otimes_2)\geq 0$.

(2) 对称性: $d(\otimes_1,\otimes_2)=d(\otimes_2,\otimes_1)$.

(3) 三角不等式: $d(\otimes_1,\otimes_2)\leq d(\otimes_1,\otimes_3)+d(\otimes_2,\otimes_3)$.

易证本文提出的区间灰数距离公式满足定理 1 中的 3 条性质.

2.3 决策模型构建

因决策者自身认知的局限性和外部环境的不确定性, 考虑决策者主观偏好, 本文提出一种基于前景理论和证据融合的区间灰数多属性决策方法, 具体步骤如下所示:

Step 1. 数据规范化

已知给定样本数据, 为消除效益型、成本型属性值, 以及不同物理量纲之间的差异可能会对决策结果造成的影响, 避免数量级相差过大, 使各个属性值之间具有可比性, 首先需要对原始样本进行规范化处理. 使属性值$x_{ij}(\otimes)$规范化后变为$x_{ij}(\otimes)$.

当评价指标为效益型时, 对区间灰数的上界与下界处理如下:

$$\bar{x}_{ij}(\otimes)=\frac{\bar{x}_{ij}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\underline{x}_{ij}\right)^2}},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{14}$$

$$\underline{x}_{ij}(\otimes)=\frac{\underline{x}_{ij}}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\bar{x}_{ij}\right)^2}},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{15}$$

当评价指标为成本型时, 对区间灰数的上界与下界处理如下:

$$\bar{x}_{ij}(\otimes)=\frac{\left(1/\underline{x}_{ij}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(1/\bar{x}_{ij}\right)^2}},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{16}$$

$$\underline{x}_{ij}(\otimes)=\frac{\left(1/\bar{x}_{ij}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(1/\underline{x}_{ij}\right)^2}},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{17}$$

可得到规范化区间灰数决策矩阵$\bar{D}=[x_{ij}(\otimes)]_{m\times n}$.

Step 2. 选取决策参考点

前景理论是描述性范式的决策模型, 考虑了不确定条件下决策者的心理行为因素. 决策者根据参考点来衡量各个方案的收益和损失情况, 体现出决策者损失规避与参照依赖等心理行为特征. 因此决策参考点的选取对结果有着重要影响. 本文在处理区间灰数多属性决策问题过程中, 借鉴 TOPSIS 理论思想, 以区间灰数正理想解和负理想解作为决策过程中的参考点.设$X^+(\otimes)$为正理想解, $X^-(\otimes)$为负理想解, 定义如下:

$$X^{+}(\otimes)=\left\{\max_{i} x_{i1}(\otimes),\max_{i} x_{i2}(\otimes),\cdots,\max_{i} x_{in}(\otimes)\right\}=\left\{x_1^{+}(\otimes),x_2^{+}(\otimes),\cdots,x_n^{+}(\otimes)\right\} \tag{18}$$

$$X^{-}(\otimes)=\left\{\min_{i} x_{i1}(\otimes),\min_{i} x_{i2}(\otimes),\cdots,\min_{i} x_{in}(\otimes)\right\}=\left\{x_1^{-}(\otimes),x_2^{-}(\otimes),\cdots,x_n^{-}(\otimes)\right\} \tag{19}$$

采用定义 6 中的区间灰数大小比较规则确定正负理想解, 该公式考虑了区间灰数在区间内取值概率不相等的特点.

Step 3. 计算距离测度

采用本文开发的区间灰数距离测度计算各个方案偏离正负理想解的大小.

由于区间灰数决策矩阵的正负理想方案也是以区间灰数的形式表示, 因此可以使用本文定义的区间灰数距离公式计算方案在属性下各方案与正负理想方法之间的偏离程度.

令$D(x_i,x_i^{+})$和$D(x_i,x_i^{-})$分别表示方案x_{ij}与正理想解$X^{+}(\otimes)$和负理想解$X^{-}(\otimes)$之间的距离集, 即:

$$D\left(x_i,x_i^{+}\right)=\left\{d\left(x_{i1}(\otimes),x(\otimes)\right),d\left(x_{i2}(\otimes),x_2^{+}(\otimes)\right),\cdots,d\left(x_{in}(\otimes),x_n^{+}(\otimes)\right)\right\} \tag{20}$$

$$D\left(x_i,x_i^{-}\right)=\left\{d\left(x_{i1}(\otimes),x_1^{-}(\otimes)\right),d\left(x_{i2}(\otimes),x_2^{-}(\otimes)\right),\cdots,d\left(x_{in}(\otimes),x_{in}^{-}(\otimes)\right)\right\} \tag{21}$$

Step 4. 构建前景价值矩阵

上文利用区间灰数距离测度公式, 计算各方案偏离正负理想解的程度, 再结合前景理论的定义及前景价值函数, 根据偏离程度定义了区间灰数环境下, 方案a_i下属性c_j相对于决策参考点距离的前景价值函数为:

$$v_{ij}=\begin{cases}(D(x_{ij}(\otimes),x_j^{-}(\otimes)))^{\alpha}\\ -\sigma(D(x_{ij}(\otimes),x_j^{+}(\otimes)))^{\beta}\end{cases} \tag{22}$$

根据实验结果, 取参数$\alpha=\beta=0.88,\lambda=2.25$.

若以正理想解为参考点, 则各个方案相对于正理想解是损失的:

$$v^{-}=-\sigma(D(x_{ij}(\otimes),x_j^{+}(\otimes)))^{\beta} \tag{23}$$

反之, 若以负理想解为参考点, 则各个方案是获益的:

$$v^{+}=(D(x_{ij}(\otimes),x_j^{-}(\otimes)))^{\alpha} \tag{24}$$

由公式 (22) 和 (23) 可得负前景价值矩阵和正前景价值矩阵, 以负前景和正前景分为作为区间前景值的下界和上界, 构建前景价值区间矩阵$V_{ij}=[v_{ij}^{-},v_{ij}^{+}]$.

Step 5. 规范化前景决策矩阵

根据区间数无量纲化的差异不变性和规范化公式, 对前景决策矩阵进行规范化处理, 得到规范化前景价值区间矩阵$\bar{V}_{ij}=[\bar{v}_{ij}^{-},\bar{v}_{ij}^{+}]$.

$$\bar{v}_{ij}^{-}=\frac{v_{ij}^{-}-\min v_{ij}^{-}}{\max v_{ij}^{+}-\min v_{ij}^{-}} \tag{25}$$

$$\bar{v}_{ij}^{+}=\frac{v_{ij}^{+}-\min v_{ij}^{-}}{\max v_{ij}^{+}-\min v_{ij}^{-}} \tag{26}$$

Step 6. 融合前景值

区间灰数很大程度上描述了信息的不确定性, 为得到各方案的综合前景值, 本文采用证据推理算法计算综合前景值.

对于规范化前景价值区间矩阵$\bar{V}_{ij}=[\bar{v}_{ij}^{-},\bar{v}_{ij}^{+}]$, 假设前景评价等级$H=\{H_n|n=1,2\}$, H_1表示属性值接近正理想解的程度, H_2表示属性值远离负理想解的程度. 因此在证据推理框架下, 方案a_i在属性c_j下的前景价值置信度可表示为:

$$S(e_i)=\left\{(H_n,\beta_{n,ij})|n=1,2\right\}$$

其中, $\beta_{1,ij}=\bar{v}_{ij}^{-},\beta_{2,ij}=1-\bar{v}_{ij}^{+}$.

令$m_{n,ij}$为基本概率分配, 表示$x_{ij}(\otimes)$支持a_i接近正理想解的程度, $m_{H,ij}$为未分配概率, 根据公式 (6-10) 可得:

$$m_{1,ij}=w_j\bar{v}_{ij}^{-},m_{2,ij}=w_i(1-\bar{v}_{ij}^{+}) \tag{27}$$

$$m_{H,ij}=1-\sum_{n=1}^{N}m_{n,ij}=w_j(\bar{v}_{ij}^{+}-\bar{v}_{ij}^{-}) \tag{28}$$

结合式 (11), 利用证据推理解析合成算法融合正负前景值, 可得方案a_i被评为等级H_n的综合置信度β_n. 因此综合前景值表示为方案a_i在评价等级H_1上的综合置信度, 即: $V(a_i)=[\beta_1,(\beta_1+\beta_H)]$.

Step 7. 根据文献[18]提出的区间数大小可能度比较公式确定综合前景值的大小, 并对方案做出排序.

对于任意两个综合前景值分别为$V(a)=[a^L,a^R]$和$V(b)=[b^L,b^R]$, 记$l(a)=a^R-a^L$, $l(b)=b^R-b^L$, 则称$V(a)\prec V(b)$的可能度为:

$$p(V(a)\succ V(b))=\frac{\min\{l(a)+l(b),\max(a^R-b^L,0)\}}{l(a)+l(b)} \tag{29}$$

若$p(V(a)>V(b))\geq\frac{1}{2}$, 则称$V(a)>V(b)$, 否则反之.

3 算例分析

3.1 问题描述

某部队计划采购火炮武器, 现有 4 种火炮方案可供选择$a_i(i=1,2,3,4)$. 选择时主要考虑火炮的 5 项指标$c_j(j=1,2,3,4,5)$, c_1为火力突击能力指数:c_2为反应能力指数: c_3为机动能力指数: c_4为生存能力指数:c_5为成本(元). 除成本指标为成本型指标外, 其余均为效益性指标.决策者给出的各属性权重为 w=(0.19, 0.21, 0.22, 0.23). 各指标属性值以区间灰数形式表示, 算例来自于文献[19], 具体数值如表 1 所示.

表 1 原始区间灰数决策矩阵

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
a_1	[26 000, 27 000]	[2, 4]	[18 000, 19 000]	[0.7,0.8]	[15 000, 16 000]
a_2	[60 000, 70 000]	[3, 4]	[16 000, 17 000]	[0.3,0.4]	[27 000, 28 000]
a_3	[50 000, 60 000]	[2, 3]	[15 000, 16 000]	[0.7,0.8]	[24 000, 26 000]
a_4	[40 000, 50 000]	[1, 2]	[28 000, 29 000]	[0.4,0.5]	[15 000, 17 000]

3.2 决策过程

Step 1. 数据规范化

对效益型指数采用式 (12) 和式 (13) 进行规范化处理. 对成本型属性采用式 (14) 和式 (15) 进行规范化处理.可得到规范化后的区间灰数决策矩阵, 最终结果如表 2 所示.

表 2 规范化后的区间灰数决策矩阵

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
a_1	[0.240,0.295]	[0.298,0.943]	[0.431,0.477]	[0.538,0.721]	[0.571,0.663]
a_2	[0.554,0.765]	[0.447,0.943]	[0.383,0.426]	[0.231,0.361]	[0.326,0.368]
a_3	[0.462,0.656]	[0.298,0.707]	[0.359,0.401]	[0.538,0.721]	[0.351,0.414]
a_4	[0.369,0.546]	[0.149,0.471]	[0.670,0.782]	[0.308,0.451]	[0.537,0.663]

Step 2. 选取决策参考点

采用式 (3) 的区间灰数大小比较规则可确定正理想解和负理想解分别为:

$$X^+(\otimes)=\{[0.554,0.765],[0.447,0.943],[0.670,0.782],[0.538,0.721],[0.571,0.663]\}$$

$$X^-(\otimes)=\{[0.240,0.295],[0.149,0.471],[0.359,0.401],[0.231,0.361],[0.326,0.368]\}$$

Step 3. 计算距离测度

采用式 (18) 分别计算各个方案属性值与正理想和负理想解的距离集, 结果如下所示.

$$D\left(x_i,x_i^+\right)=\begin{bmatrix}0.397 & 0.140 & 0.274 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.328 & 0.340 & 0.272\\ 0.123 & 0.245 & 0.354 & 0 & 0.237\\ 0.217 & 0.421 & 0 & 0.259 & 0.030\end{bmatrix}$$

$$D(x_i,x_i^-)=\begin{bmatrix}0 & 0.367 & 0.076 & 0.340 & 0.272\\ 0.397 & 0.421 & 0.029 & 0 & 0\\ 0.297 & 0.234 & 0 & 0.340 & 0.041\\ 0.197 & 0 & 0.348 & 0.098 & 0.256\end{bmatrix}$$

Step 4. 构建前景价值矩阵

根据式 (22) 和式 (23) 中的基于区间灰数距离的前景价值函数, 可分别确定各个方案的负前景值和正前景值, 以负前景值作为区间前景价值的下界, 以正前景值作为区间前景价值的上界, 构建前景价值区间矩阵, 并采用式 (24) 和式 (25) 得到规范化前景价值矩阵, 结果如表 3 所示.

Step 5. 综合前景值

根据式 (6)–式 (11) 得到综合前景值:

$$V(a_1)=[0.516,0.902]$$

$$V(a_2)=[0.341,0.799]$$

$$V(a_3)=[0.383,0.843]$$

$$V(a_4)=[0.404,0.850]$$

Step 6. 方案排序

根据区间数大小比较式 (28) 对综合前景值进行排序. 最终各方案的排序结果为:$a_1>a_4>a_3>a_2$.

3.3 分析比较

为说明本文所提方法的有效性, 将其与文献[19]与[20]中所提的决策方法进行比较, 这两种区间灰数决策方法分别分为以下两种情况:

表 3　规范化前景价值矩阵

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
a_1	[0,0.692]	[0.429,0.965]	[0.140,0.776]	[0.692,1]	[0,0.308]
a_2	[0.692,1]	[0.692,1]	[0.045,0.730]	[0,0.692]	[0.308,1]
a_3	[0.445,0.931]	[0.262,0.876]	[0,0.696]	[0.692,1]	[0.249,0.921]
a_4	[0.285,0.859]	[0,0.692]	[0.696,1]	[0.147,0.795]	[0.016,0.408]

(1) 未考虑决策面对损失和收益时的风险态度, 文献[19]提出基于正负靶心的灰靶决策模型, 定义最优和最劣方案分别作为灰靶的正负靶心, 在综合考虑方案与正负靶心的距离基础上, 建立单目标优化方程, 再根据综合靶心距ε_i对方案排序. 采用文献[19]对 4 种火炮方案进行综合靶心距求解的结果为$\varepsilon_1 = 0.287\,005$, $\varepsilon_2 = 0.334\,964$, $\varepsilon_3 = 0.325\,629$, $\varepsilon_4 = 0.404\,164$.该方法未考虑决策者的心理因素, 可与本文考虑决策者心理因素下的结果进行比较.

(2) 考虑决策的心理行为, 文献[20]提出一种基于改进的 TODIM 方法的区间灰数多属性决策模型, TODIM 方法在前景理论的基础上提出的一种多属性决策方法, 根据两两方案相比较时的收益和损失求解优势度$\Phi(a_i)$, 并对方案做出选择, 该方法与前景理论方法有类似之处, 因此具有可比性. 采用文献[20]的方法得到 4 种火炮方案的总优势度为$\Phi(a_1) = 0.5665$, $\Phi(a_2) = -0.2791$, $\Phi(a_3) = -0.1107$, $\Phi(a_4) = -0.1767$.

对比不同决策方法下的方案排序结果, 如表 4 所示.

表 4　不同决策方法的排序结果对比

不同决策方法	方案排序结果
本文方法	$a_1 > a_4 > a_3 > a_2$
文献[19]灰靶决策法	$a_1 > a_3 > a_2 > a_4$
文献[20]改进的 TODIM 法	$a_1 > a_3 > a_4 > a_2$

由表 4 可知, 三种不同决策方法下的排序结果不完全一致, 但最优方案均为a_1, 说明了本文方法的有效性. 与文献[19]相比, 最大的不同在于方案a_4的排序位置. 直观看来, 方案a_4在c_3和c_5两个指标上均远远优于方案a_2和a_3, 且加上属性权重的影响, 方案a_4理应优于a_2和a_3. 此外, 该方法未考虑决策者的心理因素, 也对决策结果造成了一定影响. 与文献[20]相比, 前景理论和 TOMID 方法均考虑了决策者心理因素, 从排序结果上看仅中间两个方案的排序存在差异, 文献[20]直接使用方案间两两比较的优势度, 本文采用证据推理方法对不确定信息进行融合, 能够减少信息丢失, 更好地处理决策信息.

综上所述, 本文方法与文献[19]中的方法进行比较,本文在决策过程中考虑了决策者对收益和损失的风险态度, 更加贴近实际决策情况, 更具优越性. 与文献[20]中的方法进行比较, 本文基于区间灰数距离公式定义前景价值函数, 并采用不确定推理方法融合信息, 较大程度地保留了原始信息, 使决策过程更加合理和科学, 为解决区间灰数多属性决策提供了一种有效方法.

4　结论与展望

本文提出了一种前景理论和证据推理相结合的区间灰数多属性决策方法. 该方法中的区间灰数距离测度公式采用区间灰数的核和信息域进行定义, 保留了区间灰数的特性. 采用前景理论和证据推理算法解决区间灰数多属性决策问题, 一方面前景理论考虑了决策者面临收益和损失的差异性, 更加符合实际. 另一方证据推理算法在面对不确定信息时能够进行有效处理, 融合过程避免了原始信息的丢失. 综上, 本文提出的方法为处理区间灰数多属性决策问题提供了新的思路及有效途径, 具有一定应用价值.

参考文献

1 Zadeh LA. Fuzzy sets. Information and Control, 1965, 8(3): 338–353. [doi: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X]

2 Deng JL. Control problem of grey systems. Systems & Control Letters, 1982, 1(5): 288–294.

3 邓聚龙. 灰色控制系统. 华中工学院学报, 1982, 10(3): 9–18.

4 谢乃明, 刘思峰. 考虑概率分布的灰数排序方法. 系统工程理论与实践, 2009, 29(4): 169–175. [doi: 10.3321/j.issn:1000-6788.2009.04.021]

5 王坚强, 周玲. 基于前景理论的灰色随机多准则决策方法. 系统工程理论与实践, 2010, 30(9): 1658–1664. [doi: 10.12011/1000-6788(2010)9-1658]

6 闫书丽, 刘思峰, 方志耕, 等. 基于累积前景理论的动态风险灰靶决策方法. 控制与决策, 2013, 28(11): 1655–1660.

7 王俊杰, 党耀国, 李雪梅. 连续型区间灰数排序的应用研究. 系统工程, 2014, 32(8): 148–152. [doi: 10.3969/j.issn.1001-

2362.2014.08.098]
8 刘中侠, 刘思峰, 蒋诗泉, 等. 基于区间灰数相离度的灰色关联决策模型. 统计与信息论坛, 2017, 32(9): 24–28.
9 刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用. 北京: 科学出版社, 2010. 15–16.
10 刘思峰, 方志耕, 谢乃明. 基于核和灰度的区间灰数运算法则. 系统工程与电子技术, 2010, 32(2): 313–316.
11 Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk. Econometrica, 1979, 47(2): 263–291. [doi: 10.2307/1914185]
12 Tversky A, Kahneman D. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. Journal of Risk and Uncertainty, 1992, 5(4): 297–323. [doi: 10.1007/BF00122574]
13 Dempster AP. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. Annals of Mathematical Statistics, 1967, 38(2): 325–339. [doi: 10.1214/aoms/1177698950]
14 Shafer G. A Mathematical Theory of Evidence. Princeton: Princeton University Press, 1976.
15 Yang JB, Singh MG. An evidential reasoning approach for multiple-attribute decision making with uncertainty. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1994, 24(1): 1–18. [doi: 10.1109/21.259681]
16 Yang JB, Xu DL. On the evidential reasoning algorithm for multiple attribute decision analysis under uncertainty. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans, 2002, 32(3): 289–304. [doi: 10.1109/TSMCA.2002.802746]
17 Wang YM, Yang JB, Xu DL. Environmental impact assessment using the evidential reasoning approach. European Journal of Operational Research, 2006, 174(3): 1885–1913. [doi: 10.1016/j.ejor.2004.09.059]
18 徐泽水, 达庆利. 区间数排序的可能度法及其应用. 系统工程学报, 2003, 18(1): 67–70. [doi: 10.3969/j.issn.1000-5781.2003.01.011]
19 宋捷, 党耀国, 王正新, 等. 正负靶心灰靶决策模型. 系统工程理论与实践, 2010, 30(10): 1822–1827. [doi: 10.12011/1000-6788(2010)10-1822]
20 王霞, 党耀国. 基于改进的 TODIM 方法的区间灰数多属性决策模型. 控制与决策, 2016, 31(2): 261–266.