

# 针对加权子空间拟合的联合粒子群优化算法<sup>①</sup>

龚 琛, 李世宝, 陈海华, 刘建航

(中国石油大学(华东) 计算机与通信工程学院, 青岛 266580)

**摘 要:** 在现有 DOA 估计的方法中, 加权子空间拟合(WSF)具有高分辨率. 但是求解 WSF 算子的算法计算复杂度较高, 无法满足实时性需求. 为了降低计算复杂度, 本文针对 WSF 算法提出了一种低复杂度的联合粒子群算法. 首先利用旋转不变子空间法(ESPRIT)可以显式计算 DOA 结果, 计算复杂度极低的特点, 并联合利用克拉美-罗界来确定一个新的搜索空间, 再随机撒入少量粒子进行粒子群算法, 最后在满足一定的速度条件后跳出迭代. 此外, 本文也讨论了粒子群算法的惯性因子. 试验结果表明, 跟常规粒子群算法比较, 在保持 DOA 估计精度不变的结果下, 本文算法所需粒子数和迭代次数大幅度降低, 计算复杂度也明显降低.

**关键词:** 波达方向估计; 加权子空间拟合算法; 粒子群算法; 计算复杂度

引用格式: 龚琛, 李世宝, 陈海华, 刘建航. 针对加权子空间拟合的联合粒子群优化算法. 计算机系统应用, 2017, 26(8): 162-167. <http://www.c-s-a.org.cn/1003-3254/5886.html>

## Joint-PSO Algorithm for Weighted Subspace Fitting of DOA Estimation

GONG Chen, LI Shi-Bao, CHEN Hai-Hua, LIU Jian-Hang

(College of Computer and Communication Engineering, China University of Petroleum, Qingdao 266580, China)

**Abstract:** Among existing DOA estimation methods, the Weighted Subspace Fitting (WSF) algorithm is well-known for its high resolution of DOA estimation. However, its computational complexity is extremely high and cannot meet the real-time requirements. In this paper, we propose a Joint-PSO algorithm for WSF with less complexity. This algorithm has the following key steps: firstly we use the solution of Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques (ESPRIT) which can get the DOA estimation with extremely low complexity and stochastic Cramer-Rao bound (CRB) to determine a novel initialization space in the whole search space. Then, we randomly initiate a small number of particle in that small area. Finally, we let the particles “fly” to the solution with a suitable speed. Additionally, we also discuss and optimize the inertia factor of PSO algorithm. The simulation results find that for the same Root-Mean-Square-Error (RMSE), the particles and iteration number of the proposed algorithm are much less than that of the original PSO algorithm. As a result, the computational complexity can be greatly reduced.

**Key words:** direction-of-arrival; weighted subspace fitting algorithm; particle swarm optimization; computational complexity

信号波达方向估计(Directions Of Arrival, DOA)问题一直是通信、雷达<sup>[1]</sup>、声纳<sup>[2]</sup>、定位<sup>[3]</sup>、导航等领域研究的热点问题. 为了保证系统的及时性和准确性, DOA 估计算法必须具有较低的计算复杂度和高分辨率. 目

前在实际系统中常用的算法有多信号分类(Multiple Signal Classification, MUSIC)算法<sup>[4]</sup>, 旋转不变子空间(ESPRIT)算法<sup>[5]</sup>. 但是在存在多径传播的真实场景下, 上述两个算法并不能直接处理相干信号. 虽然空间平

<sup>①</sup> 基金项目: 山东省自然科学基金面向项目(ZR2014FM017); 青岛市科技创新计划(15-9-80-jch); 青岛市黄岛区科技创新计划(2014-1-45); 中央高校研究基金(15CX02047A, 15CX05025A)

收稿时间: 2016-11-29; 采用时间: 2016-12-19

滑等预处理技术能处理相干信号,但是会降低 DOA 估计精度.而加权子空间拟合(Weighted Subspace Fitting, WSF)算法<sup>[6]</sup>估计精度高,并且在相干信号源,小快拍数以及低信噪比的条件下,WSF 算法的性能要优于上述算法,它能够处理小快拍数据,在相干信号源条件下无需数据预处理技术,但该算法是一个多维非线性优化问题,所以它的计算复杂度是非常高的,这也是 WSF 算法未能广泛应用的原因.

针对 DOA 中多维非线性优化问题,主要可分为三大类算法:第一类算法是最经典的交替最小化算法<sup>[7]</sup>,该算法将每次迭代时只更新一个参数,而其他参数固定不变,这样就将一个复杂的多维非线性优化问题转变为多个简单的一维非线性优化问题,从而降低了整体的复杂度;第二类算法是仅针对某个 DOA 估计算法评价标准.比如针对确定性最大似然估计(Deterministic Maximum Likelihood, DML)的高斯牛顿算法<sup>[8]</sup>,是通过每次迭代求出一个搜索方向,当搜索方向接近于 0 时,就认为找到了最优解;但是这两类算法收敛速度较慢;第三类算法是智能优化算法,比如遗传算法<sup>[9]</sup>,蚁群算法<sup>[10]</sup>,人工蜂群算法<sup>[11]</sup>,模拟退火算法<sup>[12]</sup>,粒子群算法(Particle Swarm Optimization, PSO)以及智能算法之间互相结合得到的各种混合算法<sup>[13]</sup>等.由于智能算法收敛速度快,得到了广泛的关注.而粒子群算法由于其算法简单,收敛速度快,可调参数少等优点被广泛应用到该领域中.此外,针对 WSF 算法的特点,文献<sup>[14]</sup>提出使用多级维纳滤波代替计算复杂度较高的矩阵特征分解,从而降低算法整体的计算复杂度.

粒子群算法通过模拟鸟群觅食的过程,将无序的粒子移动转化有规律的运动.在很多非线性优化问题上取得了非常好的效果.也有很多学者将其引入 WSF 算法的算子求解过程中<sup>[15]</sup>,文献<sup>[16]</sup>将量子计算和粒子群算法结合解决 WSF 算法复杂度高的问题.文献<sup>[17]</sup>将粒子群算法的搜索范围进行动态变化,将陷入局部最优的粒子重新撒入在靠近最优解的范围内,避免了部分粒子做无用功,提高了收敛速度.虽然这些算法在一定程度上降低了复杂度,但只是提高了收敛速度,并没有解决部分陷入局部收敛的粒子做无用功的问题,所以并不能满足对实时性的要求.为解决这个问题,本文提出了一种低复杂度的基于联合的 PSO 算法——Joint Particle Swarm Optimization,简称 JPSO.该算法将低复杂度低精度的 ESPRIT 算法和 PSO 算法进行联合,大幅度减小了粒子的初始化空间和所需粒子,从

而解决了上述问题.而且本文还对 PSO 算法中的权重因子 $\omega$ 进行了分析,并找出了最适合该问题的权重因子表达式.

## 1 数学模型

假设在  $p$  元天线阵列处,有  $q$  个远场窄带信号源入射,入射角分别为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ ,则设在某一时刻,阵列接收数据用复包络形式表示为:

$$x(t) = \sum_{k=1}^q a(\theta_k) s_k(t) + n(t) \quad (1)$$

式中,  $s_k(t)$  为阵列在某一个时刻接收的第  $k$  个信号源的信号.  $n(t)$  为噪声信号.  $a(\theta_k)$  是波达方向  $\theta$  的导向矢量,可写作:

$$a(\theta) = [\alpha_1(\theta) e^{-j\omega_0 \tau_1(\theta)}, \dots, \alpha_p(\theta) e^{-j\omega_0 \tau_p(\theta)}]^T \quad (2)$$

$\alpha_i(\theta)$  为第  $i$  个阵元接收到信号的幅度,  $\tau_i(\theta)$  为第  $i$  个阵元与参考阵元之间的传播延迟,上标  $T$  为矩阵转置.式(1)也可写为:

$$X(t) = A(\Theta)S(t) + N(t) \quad (3)$$

$$A(\Theta) = [a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_q)] \quad (4)$$

$$\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q\} \quad (5)$$

上式中,  $X(t)$  为  $p \times 1$  维的阵列接收数据,  $A(\Theta)$  为  $p \times q$  维的阵列流型矩阵,  $S(t)$  为  $q \times 1$  维的信号矩阵,  $N(t)$  为  $p \times 1$  维的噪声矩阵.对于波达方向估计,一般有以下几个假设:

假设 1. 组成阵列的  $p$  个阵元为各向同性阵元,且无互耦以及通道不一致的干扰.

假设 2. 设噪声为高斯白噪声,均值为 0,方差为  $\sigma^2$ ,  $\sigma^2$  未知.

假设 3. 信号为远场窄带信号.

假设 4. 阵元数目  $p$  要大于信源数目  $q$ .

## 2 加权子空间拟合算法

与其他信号子空间类算法一样,加权子空间拟合(WSF)算法也是基于阵列接收信号的协方差矩阵  $R$  的特征结构的,  $R$  定义为:

$$R = A(\Theta)SA^H(\Theta) + \sigma^2 I_p \quad (6)$$

对  $R$  做特征分解后:

$$R = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i e_i^H = E_s \Lambda_s E_s^H + \sigma^2 E_n E_n^H \quad (7)$$

上标  $H$  为共轭转置.  $\lambda_i$  是第  $i$  个特征值,  $e_i$  为第  $i$  个特征值对应的特征向量. 对角矩阵  $\Lambda_s$  中包含着  $r$  个较大的特征值,  $r$  表示为真实信源数目 ( $r \leq q$ , 当信号为不相干信号时,  $r=q$ ).  $E_s$  矩阵为  $\Lambda_s$  中的特征值对应的特征向量组成的矩阵. 同理,  $E_n$  是由  $p-r$  个较小的特征值  $\sigma^2$  对应的特征向量组成的矩阵. 一般将  $E_s$  称为信号子空间,  $E_n$  称为噪声子空间.

可以看出, 信号子空间  $E_s$  是阵列流型矩阵  $A(\Theta)$  张成空间的子空间:

$$\text{span}\{E_s\} \subseteq \text{span}\{A(\Theta)\} \quad (8)$$

当  $r=q$  时, 上式等号成立.

此时, 存在一个满秩矩阵  $T$ , 使得:

$$E_s = A(\Theta)T \Rightarrow \Theta \quad (9)$$

当有噪声存在时, 信号子空间与阵列流型矩阵张成的空间不相等, 式(8)不一定成立.

子空间拟合算法就是构造一个拟合关系, 找出使式(9)成立的一个矩阵  $T$ , 使两者在最小二乘的意义下拟合的最好. 即:

$$[\hat{\Theta}, \hat{T}] = \arg \min_{\Theta, T} \|\hat{E}_s W^{1/2} - A(\Theta)T\|_F^2 \quad (10)$$

$W$  为权重矩阵.  $\|\cdot\|_F^2$  是指二范数. 通过求  $T$  矩阵的最小二乘解, 可以得到:

$$L_W = \text{tr}\{P_{A(\Theta)}^+ \hat{E}_s W \hat{E}_s^H\} \quad (11)$$

其中:

$$P_{A(\Theta)}^+ = I - A(\Theta)(A(\Theta)^H A(\Theta))^{-1} A(\Theta)^H \quad (12)$$

$$W = (\hat{\Lambda}_s - \sigma^2 I)^2 \hat{\Lambda}_s^{-1} \quad (13)$$

$P_{A(\Theta)}^+$  矩阵是  $A(\Theta)$  矩阵的正交投影矩阵.  $W$  是权重矩阵.

通过观察 WSF 算法的评价标准, 式(13), 可以发现求解该式其实是一个多维非线性优化问题.

### 3 联合粒子群算法

模仿生物行为的智能算法, 例如遗传算法, 蚁群算法, 粒子群算法等, 都是解决多维非线性优化问题较好的算法. 而粒子群算法由于算法规则简单, 收敛速度快, 可调参数少等优点获得广大学者的研究.

粒子群算法源于对鸟群捕食的行为研究, 利用群体中的个体对信息的共享使整个群体的运动在问题求解空间中产生从无序到有序的演化过程, 从而获得最优解.

#### 3.1 针对 WSF 算子的联合粒子群算法

通过以上对基本粒子群算法的描述, 可以得知:

(1) 由于粒子的移动机制, 粒子的初始位置越接近于最优值的初始位置, 整个算法的运行速度就越快.

(2) 搜索空间即为  $L_W$  的求解空间. 根据上述的假设, 信源和天线阵列在同一个水平面. 所有求解空间是  $q$  维, 每个维度的范围是  $-90 \sim 90$  度.

(3) 粒子群算法是基于群体的算法, 所有的粒子的初始位置在搜索空间中随机选取的.

从上述事实可以看出, 为了保证粒子能够接近于最优值, 通常需要大量粒子, 一般粒子数量  $m$  不小于 30 个. 但是大量的粒子数也带来了较高的计算复杂度. 此外, 所有的粒子随机出现在整个搜索空间中, 即使有个别粒子接近于最优值, 它仍然需要足够的迭代次数来使粒子群中的绝大部分粒子收敛到最优值. 因为对于传统的粒子群算法, 过多的粒子和过多的迭代提高了计算复杂度.

本文提出的基于联合的粒子群算法 (Joint Particle Swarm Optimization), 简称 JPSO. 对上述两个方面进行优化, 从而减少算法整体的计算复杂度.

由于旋转不变子空间 (ESPRIT) 算法可以通过计算直接得出波达方向, 没有谱峰搜索的步骤, 所以计算复杂度比 WSF 算法低很多. 虽然 ESPRIT 算法的分辨率要低于 WSF 算法, 但不可否认的是, 由于 ESPRIT 算法的解和 WSF 算法的解都是 DOA 估计的解, 所以这两个解是接近的. 因此, 用 ESPRIT 算法的解作为粒子群算法中粒子的初始位置应该会加快算法收敛, 进而降低计算复杂度.

而且, 由于 ESPRIT 算法没有谱峰搜索的步骤, 直接求出结果, 所以不存在局部收敛的问题, 用 ESPRIT 算法求得的靠近真实解的解作为粒子群算法中的粒子初始位置, 解决了粒子群算法局部收敛的问题.

为了让更多粒子的初始位置接近于 WSF 算子的最优解, 以 ESPRIT 算法的解为中心划出一个初始化空间, 粒子的初始位置将在这个即小又靠近最优解的空间中随机产生.

$$\Theta_E = \{\theta_{e1}, \theta_{e2}, \dots, \theta_{eq}\} \quad (14)$$

上式表示为 ESPRIT 算法的解.

初始化空间可表示为:

$$\theta_1 \in [\theta_{e1} - \mu \text{CRB}_s, \theta_{e1} + \mu \text{CRB}_s] \quad (15)$$

$$\theta_2 \in [\theta_{e2} - \mu \text{CRB}_s, \theta_{e2} + \mu \text{CRB}_s] \quad (16)$$



$$\theta_q \in [\theta_{eq} - \mu CRB_s, \theta_{eq} + \mu CRB_s] \quad (17)$$

其中 $\mu$ 为正整数。 $CRB_s$ 指在随机模型下的克拉美-罗界。

因为克拉美罗界(CRB)是唯一一个与 SNR 和快拍数有关的值,所以选取克拉美-罗界作为确定范围的依据。初始化空间的大小可以由 $\mu$ 控制的,关于 $\mu$ 的取值,在第4节实验验证中会有讨论。

然后在初始化空间中撒入少量的粒子,由于这些粒子很接近于 WSF 算子的最优值,所以这些粒子很快就可以收敛到最优值。

### 3.2 权重因子 $\omega$ 的改进

在传统的粒子群算法中,权重因子 $\omega$ 一般在 0.4~0.9 之间选取一个固定值。然而在文献[15]中 $\omega$ 建议是根据迭代的次数从 0.9 至 0.4 之间线性递减。

$$\omega(l) = 0.9 - \frac{l}{l_{max}}(0.9 - 0.4) \quad (18)$$

$l_{max}$  是最大迭代次数,  $l$  是迭代次数。

在研究中,发现当权重因子 $\omega$ 偏大时,有益于粒子群在较大的区域中寻找最优。相反,当权重因子 $\omega$ 偏小时,有益于粒子群在小范围里做精细搜索。那么,在搜索开始期间, $\omega$ 值偏大一点,可加快收敛速度。在搜索周期结束时, $\omega$ 值偏小一点,可以提高搜索精度。在我们的试验中,发现权重因子 $\omega$ 在解决 WSF 算子的求解问题时, $\omega$ 更适合在 0.9 至 0.4 之间呈抛物线形递减。因此,在传统粒子群算法求解 WSF 算子时,权重因子 $\omega$ 定义为:

$$\omega(l) = 0.4 + \frac{(l - l_{max})^2}{2l_{max}^2} \quad (19)$$

对于本文提出的联合粒子群算法,由于粒子群的初始位置已经接近于最优值,权重因子 $\omega$ 设为一个偏小的固定值会比较好。在试验中权重因子 $\omega$ 设为 0.4。

基于联合的粒子群 DOA 估计算法的流程如下:

(1) 计算 ESPRIT 的解和 CRB,根据式(15)至(17)构造初始化空间。

(2) 在粒子群算法的初始化空间中随机撒入少量粒子 $\Theta = \{\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_m\}$ 。其中,  $m$  为粒子数目。 $\Theta_i = \{\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{iq}\}$  为第  $i$  个粒子在搜索空间下的坐标。

(3) 计算每个粒子的适应度值。这里用到的是 WSF 算法的算子,如式(11)所述。

(4) 更新全局最优值和每个粒子的自身历史最优值。让 $T_i = (t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{iq})$ 和 $T_g = (t_{g1}, t_{g2}, \dots, t_{gq})$ 分别表示

为全局最优值的坐标和历史最优值的坐标。历史最优值指该粒子在迭代过程中最优值。全局最优值是指在迭代过程中,所有粒子在搜索空间中所达到的最优值。

(5) 根据下式更新粒子坐标和速度:

$$\Theta_i^{l+1} = V_i^l + V_i^{l+1} \quad (20)$$

其中:

$$V_i^{l+1} = \omega V_i^{l+1} + c_1 r_1 (T_i^l - \Theta_i^l) + c_2 r_2 (T_g^l - \Theta_i^l) \quad (21)$$

$l$  指迭代次数,  $\omega$  指惯性因子, 设为 0.4。  $c_1, c_2$  分别是针对自身和社会的学习因子。  $r_1, r_2$  是在 0-1 之间均匀分布的随机变量。学习因子  $c_1 = c_2 = 2$ ;

(6) 如果达到最大迭代次数或者最小准则,终止程序,否则返回步骤 3。

## 4 实验验证

为了证明本算法的有效性,将其与传统的粒子群算法通过 matlab 软件仿真进行比较。常规粒子群算法(PSO)的权重因子 $\omega$ 设为式(19),而联合粒子群算法(JPSO)的权重因子 $\omega$ 设为固定值 0.4。最大迭代次数设为 300。天线阵列个数  $p$  为 16,信源数量  $q$  为 2,真实角度分别为 -40 和 20。

在仿真中,阵列的配置是均匀线阵,其中导向矢量为:

$$a(\theta) = [1, e^{-j\phi(\theta)}, \dots, e^{-j(p-1)\phi(\theta)}]^T \quad (22)$$

$$\phi(\theta) = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} \sin\theta \quad (23)$$

其中 $\lambda$ 是指阵列所接收信号的波长,  $\Delta$ 为阵元间距,为了保证所得解是唯一的,  $\Delta \leq \lambda/2$ 。在本实验中,  $\Delta = \lambda/2$ 。

信噪比定义为:

$$SNR_k = 10 \log_{10} \frac{E[|s_k(t)|^2]}{\sigma^2} \quad (24)$$

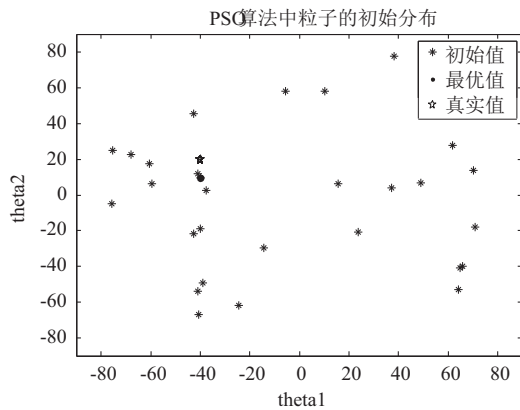
均方根误差定义为:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{qN} \sum_{k=1}^q \sum_{n=1}^N |\theta_{k,n} - \theta_k|^2} \quad (25)$$

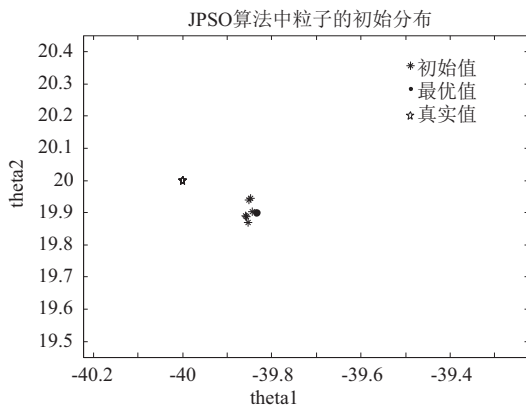
$\theta_{k,n}$  为 $\theta_k$ 第  $n$  次试验的估计。

图 1 展示的是传统粒子群算法(PSO)和联合粒子群算法(JPSO)中的粒子初始位置分布情况。可以看出。本文算法拥有非常好的初始化空间,只需要少量的粒子参与迭代,而且所有粒子都很靠近最优值。从而粒子不会在搜索过程中陷入局部收敛,而且提高了收敛速度。

而初始化空间大小由正整数 $\mu$ 决定, 试验中发现当 $\mu$ 大于 10 时, 粒子会迅速陷入到局部收敛, 导致结果错误. 当 $\mu$ 小于 10 时, 粒子能够迅速找到最优解, 而 $\mu$ 在 1~10 这个范围变化时, 对结果和运行时间并无太大的影响, 故在本实验中,  $\mu$ 取为 1.



(a) PSO算法中的粒子初始分布,  $m=30$



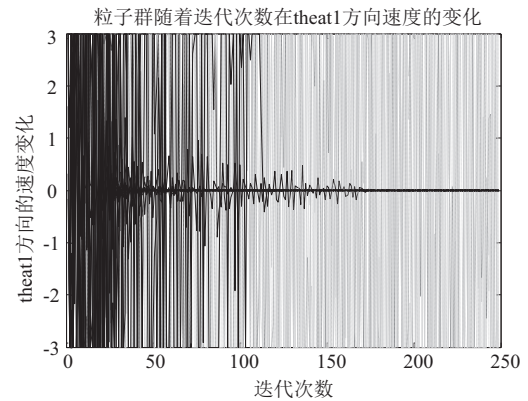
(b) JPSO算法中的粒子初始分布,  $m=6$

图1 PSO和JPSO算法中的粒子初始分布, SNR=0 db

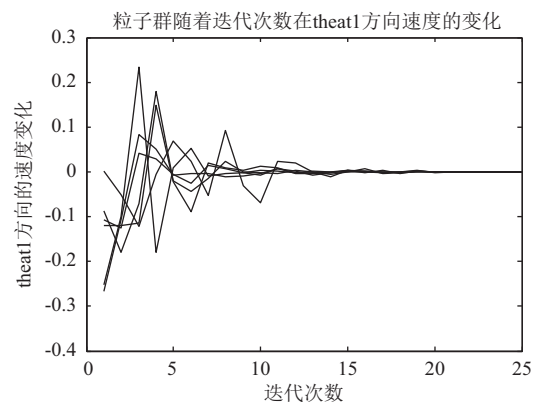
图2展示的是在信噪比为 0 db 的情况下, 传统粒子群算法(PSO)和联合粒子群算法(JPSO)中所有粒子每次迭代时的速度. 可以看出, 在粒子越接近于最优值时, 移动速度越接近于 0. 在 PSO 算法中, 30 个粒子需要迭代 270 次, 而在 JPSO 算法中, 只需 6 个粒子迭代 25 次, 虽然 JPSO 中包含 ESPRIT 算法, 但是 ESPRIT 的复杂度与 WSF 算法相比, ESPRIT 算法的复杂度与计算一次 WSF 算子的计算复杂度相近, 并不影响结果的对比. 所以, 在计算复杂度上, JPSO 明显低于 PSO 算法.

图3展示的是分别在相干信号和非相干信号的情况下, 传统的粒子群算法(PSO)和联合粒子群算法(JPSO)对 WSF 算子进行求解的 RMSE, 与 ESPRIT 算法的

RMSE 的对比. 针对 ESPRIT 算法的特点, 在相干信号的情况下, 在进行 ESPRIT 算法之前对信号进行平滑处理. 在两种情况下, 可以看出, 传统的粒子群算法和本文提出的算法的 RMSE 相近, 且均比 ESPRIT 算法精准. 意味着本文提出的算法精度与传统粒子群算法精度相当.



(a) PSO算法中粒子在theta1方向上的速度变化



(b) JPSO算法中粒子在theta1方向上的速度变化

图2 粒子在 theta1 方向上的速度变化, SNR=0 db

表1表明了, 在非相干信号且信噪比为 0 db 的情况下, 传统的粒子群算法(PSO), 联合粒子群算法(JPSO)和 ESPRIT 算法在其他方面的不同. 可以看出, 在迭代次数方面, JPSO 是 PSO 的四分之一. 但是 JPSO 所用的粒子小于 PSO 所用的粒子. 意味着 PSO 算法要计算 WSF 算子  $L_W$  3551 次, 远远大于 JPSO 所需计算的 190 次.

通过 matlab 进行仿真运算比较运行时间, 虽然 JPSO 耗时小于 PSO, 但是仍然远大于 ESPRIT 算法的耗时. 这是因为  $L_W$  在计算中有大量的矩阵运算.

### 5 结论

本文针对 WSF 算法提出了一个低复杂度的联合粒子群优化算法. 传统的粒子群算法有过多的粒子数和太多的迭代次数的缺陷, 导致计算复杂度过高. 联合

粒子群算法引入 ESPRIT 算法和 CRB 来确定一个新的初始化空间,使随机产生的粒子更加接近于最优值,减少了所需的粒子数和迭代次数.本文还根据 WSF 算子的特点,讨论并优化了粒子群算法中的权重因子 $\omega$ .实验结果表明,本算法与传统的粒子群算法相比,大大降低了运算复杂度,减少了运算时间.值得注意的是,本文提出的算法的计算复杂度相比于 ESPRIT 算法仍要高很多,这是因为算法中存在计算复杂度较高的矩阵特征值分解,所以下一步将引入多级维纳滤波取代矩阵的特征值分解,可以进一步的降低运算复杂度.从而使得 WSF 算法能真正应用于实际系统.

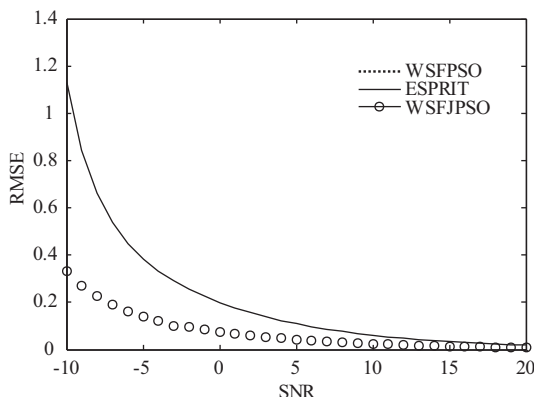
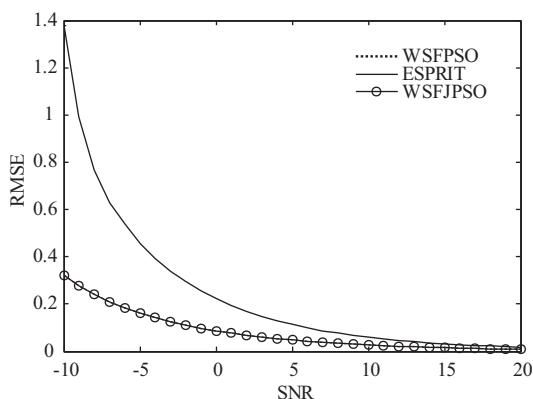
(a) 非相干信号情况,真实信源个数 $r=2$ (b) 相干信号情况,真实信源个数 $r=1$ 

图3 PSO和JPSO算法中RMSE随信噪比的变化

表1 JPSO与PSO的在非相干信号情况下复杂度比较

	PSO-WSF	JPSO-WSF	ESPRIT
粒子数目	30	6	-
平均迭代次数	252.20	38.67	-
$L_{ij}$ 计算次数	$30 \times 252.20 = 7566$	$6 \times 38.67 = 233$	-
耗时(s)	8.4466	1.1477	0.0030

## 参考文献

1 李丽,邱天爽.宽带双基地MIMO雷达的参数联合估计的

新方法.通信学报,2014,35(6):192-199.

- 张宇,杨益新,田丰.通信误码率对浮标声纳系统DOA估计性能的影响.火力与指挥控制,2014,39(12):96-99,103.
- 马贤同,罗景青.基于DOA测量的多目标位置信息场定位精度分析.计算机工程与应用,2014,(13):214-218.
- Schmidt RO. Multiple emitter location and signal parameter estimation. IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 1986, 34(3): 276-280. [doi: 10.1109/TAP.1986.1143830]
- Roy R, Kailath T. ESPRIT-Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1989, 37(7): 984-995. [doi: 10.1109/29.32276]
- Viberg M, Ottersten B, Kailath T. Detection and estimation in sensor arrays using weighted subspace fitting. IEEE Trans. on Signal Processing, 1991, 39(11): 2436-2449. [doi: 10.1109/78.97999]
- Wax M. Detection and localization of multiple sources via the stochastic signals model. IEEE Trans. on Signal Processing, 1991, 39(11): 2450-2456. [doi: 10.1109/78.98000]
- Suzuki M. An efficient algorithm for bearing estimation based on newton's method using a uniform linear array. Proc. of International Symposium on Communication and Information Technology (ISCIT2001). 2001.
- Li MH, Lu YL. Improving the performance of GA-ML DOA estimator with a resampling scheme. Signal Proc., 2004, 84(10): 1813-1822.
- Shi WT, Huang JG, Hou YS. Fast DOA estimation algorithm for MIMO sonar based on ant colony optimization. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2012, 23(2): 173-178. [doi: 10.1109/JSEE.2012.00022]
- 单泽彪,石要武,刘小松,等.应用人工蜂群算法的动态波达方向跟踪.光学精密工程,2015,23(3):838-845.
- 贾伟娜,刘顺兰.模拟退火遗传算法在DOA估计技术中的应用.计算机工程与应用,2014,(12):266-270. [doi: 10.3778/j.issn.1002-8331.1206-0247]
- Liu JZ, Zhao ZQ, He ZY, et al. DOA and power estimation using genetic algorithm and fuzzy discrete particle swarm optimization. Journal of Electronic Science and Technology, 2014, 12(1): 71-75.
- 黄磊,吴顺君,张林让.基于多级维纳滤波器的信号子空间拟合算法.电子与信息学报,2005,27(8):1197-1200.
- Wang J, Zhao YJ, Wang ZG. Low complexity subspace fitting method for wideband signal location. Proc. of 5th IFIP International Conference on Wireless and Optical Communications Networks. Surabaya, Indonesia. 2008. 1-4.
- 张志成,林君,石要武,等.用加权子空间拟合和量子粒子群算法联合估计多普勒频率和波达方向.光学精密工程,2013,21(9):2445-2451.
- 刁鸣,袁熹,高洪元,等.一种新的基于粒子群算法的DOA跟踪方法.系统工程与电子技术,2009,31(9):2046-2049.