

# 有色噪声下的平方根 UKF 在天文自主导航中的应用<sup>①</sup>

孙会敏<sup>1</sup>, 庄纯清<sup>2</sup>, 许胜中<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001)

<sup>2</sup>(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100000)

**摘要:** 针对由星敏感器和光学导航相机组成的卫星天文自主导航系统, 传统的平方根 UKF 不能很好地解决测量噪声为有色噪声情况下的非线性滤波问题, 导致导航系统的精度下降. 为此, 提出了一种有色噪声情况下的平方根 UKF 方法. 同时, 为了避免在数值计算的过程中, 由于舍入误差而破坏误差协方差矩阵的正定性和对称性, 在整个递推计算过程中, 借鉴平方根 Kalman 滤波理论, 采用协方差矩阵平方根进行递推计算, 改善滤波算法的稳定性, 协方差矩阵的平方根更新用 cholesky 分解和 qr 分解来计算. 将该方法应用于卫星天文自主导航系统中, 实验仿真结果表明, 相对于传统的平方根 UKF 算法, 所设计的平方根 UKF 算法能够很好地解决测量噪声为有色噪声情况下估计精度低问题.

**关键词:** 卫星天文自主导航系统; 平方根 UKF; 有色噪声; 估计精度

## Square-Root Unscented Kalman Filter for Satellite Autonomous Celestial Navigation System with Colored Measurement Noise

SUN Hui-Min<sup>1</sup>, ZHUANG Chun-Qing<sup>2</sup>, XU Sheng-Zhong<sup>2</sup>

<sup>1</sup>(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

<sup>2</sup>(School of Energy and Power Engineering, Beihang University, Beijing 100000, China)

**Abstract:** To address the satellite autonomous celestial navigation system based-on star sensor/optical camera, traditional square-root unscented Kalman filter can not well solve the nonlinear filtering problem with colored noise, which leads to the navigation system accuracy decreased. So a square-root unscented Kalman filter (CSRUKF) applied to measurement system with colored noise is proposed in this paper. In addition, in order to avoid destructing the positive and symmetry of covariance matrix caused by the errors of numerical calculation during the filtering procedure, the square-root of covariance matrix is adopted throughout recursive calculation, which improves the stability of filter. The square-root of covariance matrix update is calculated by cholesky decomposition and qr decomposition. The method was applied to satellite autonomous navigation systems. The simulation results show that, compared to traditional SRUKF, this proposed SRUKF can well solve the problem of poor estimation accuracy in measurement system with colored noise.

**Key words:** satellite autonomous navigation system; square-root UKF; colored noise; estimation accuracy

基于光学测量的卫星天文自主导航是指卫星利用安装在自身身上的星敏感器及光学导航相机来测量星光信息及天体的边缘信息, 并在轨处理观测到的光学图像信息, 获取自身的位置和速度信息的过程. 由于其具有自主性强、精度高、实时性好等优点, 是当今

卫星控制技术发展的趋势, 它在减轻地面测控负担、降低卫星运行费用、提高卫星的生存能力和扩展卫星的应用潜力等方面具有重要意义, 由于卫星导航系统其是非线性的, 因此需要用非线性滤波技术来得到其状态变量的最优估计<sup>[1]</sup>.

① 基金项目:国家自然科学基金(61304237)

收稿时间:2014-11-22;收到修改稿时间:2015-01-19

扩展卡尔曼滤波器(EKF)因为其方法简单容易实现等优点,被广泛应用于卫星自主导航系统中.但是 EKF 实质仍然是一种在线线性化的算法,存在自身的理论缺陷性与 EKF 相比,UKF 无需计算非线性状态函数和量测函数的雅可比矩阵,而且针对任意非线性模型,UT 变换理论上至少可以 3 阶泰勒精度逼近任何非线性高斯系统状态的后验均值和协方差,具有实现简单,滤波精度高,收敛性好等优点<sup>[2]</sup>.近年来在导航系统滤波问题当中获得广泛应用,文献[3]从原理上分析了 UKF 的稳定性,并将其用于解决相对导航问题;文献[4]将 UKF 应用于基于星光折射间接敏感地平的卫星自主天文导航系统当中,取得了优于 EKF 的估计精度;文献[5]将状态增广 UKF 用于月球车自主天文导航中,克服系统误差和随机误差的影响.然而 UKF 在数值计算的过程中存在舍入误差,随着迭代计算的累加,积累的舍入误差可能会破坏系统估计误差协方差矩阵的非负定性和对称性,导致算法的收敛速度慢,甚至造成算法的不稳定.平方根 UKF 算法采用误差协方差矩阵的平方根矩阵进行迭代运算,解决了常规 UKF 算法中由于累积舍入误差引起误差协方差矩阵负定性而导致的滤波结果发散的问题,提高了滤波的精度和稳定性<sup>[6,7]</sup>.尽管平方根 UKF 改善了 UKF 的性能,但其并没有脱离 UKF 的理论框架,在进行滤波计算的时候要求系统噪声和量测噪声均为高斯白噪声,当系统测量噪声为有色噪声时,平方根 UKF 在进行非线性滤波时也失效.然而,卫星运行的空间环境复杂多变,测量噪声并不是一定为白噪声,势必会存在测量噪声为有色噪声的情况.因此,研究有色噪声条件下的平方根 UKF 方法对于卫星天文自主导航系统具有一定的理论价值和实际意义.

针对上述问题描述,为了使得滤波器能够在测量噪声为有色噪声条件下进行有效的滤波,本文以测量噪声为有色噪声的星敏感器/光学导航相机组成的卫星天文自主导航系统为背景,提出了一种带有有色测量噪声的平方根 UKF 算法.首先,利用星敏感器/光学导航相机设计出导航方案,通过转换方程将间接量测量转换为观测量.然后,基于量测信息增广方法,将有色噪声系统转换为过程噪声和测量噪声相关的白噪声系统,并通过引入中间量,将相关的白噪声系统化为传统的白噪声系统.最后,基于最小方差准则,推导出一种有色噪声的情况下的最优滤波算法框架,算法

的非线性状态的估计和协方差矩阵采用 UT 变换来计算,从而得到有色噪声下的 UKF 算法.与此同时,为了避免在数值计算的过程中,由于舍入误差而破坏误差协方差矩阵的正定性和对称性,在整个递推计算过程中,借鉴平方根 Kalman 滤波理论,采用协方差矩阵平方根进行递推计算,改善滤波算法的稳定性,协方差矩阵的平方根更新用 cholesky 分解和 qr 分解来计算.通过在带有有色测量噪声的卫星自主导航系统中的仿真验证,仿真结果表明该方法是有有效的.

## 1 有色测量噪声下的平方根UKF

### 1.1 有色测量噪声白噪声化

针对一类非线性系统,如式(1)所示:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{V}_k \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{x}_k$  为状态变量,  $\mathbf{z}_k$  为观测量,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1})$  为系统的非线性状态方程,具有一阶连续偏导数,  $\mathbf{H}$  为线性测量方程,过程噪声  $\mathbf{w}_{k-1}$  均值为零的高斯白噪声,其协方差矩阵别为  $\mathbf{Q}_{k-1}$ , 测量噪声  $\mathbf{V}_k$  为有色噪声,且其满足:

$$\mathbf{V}_k = \Phi_{k,k-1}\mathbf{V}_{k-1} + \zeta_{k-1} \quad (2)$$

式中,  $\zeta_{k-1}$  为零均值白噪声,其协方差矩阵为  $\mathbf{R}_k$ ,  $\mathbf{w}_{k-1}$  和  $\zeta_{k-1}$  互不相关.

针对上述问题,采用测量信息增广的方法来实现将有色噪声变换为白噪声,根据测量方程可知:

$$\mathbf{V}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_k \quad (3)$$

因而有:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{H}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{V}_{k+1} = \\ & \mathbf{H}\mathbf{x}_{k+1} + \Phi_{k+1,k}(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_k) + \zeta_k = \\ & \mathbf{H}\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{H}\Phi_{k+1,k}\mathbf{x}_k + \mathbf{H}\mathbf{w}_k + \Phi_{k+1,k}\mathbf{z}_k + \zeta_k \end{aligned} \quad (4)$$

令增广测量信息为:

$$\mathbf{z}_k^* = \mathbf{z}_{k+1} - \Phi_{k+1,k}\mathbf{z}_k \quad (5)$$

对式(4)进行变换有:

$$\mathbf{z}_k^* = \mathbf{H}\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{H}\Phi_{k+1,k}\mathbf{x}_k + \mathbf{H}\mathbf{w}_k + \zeta_k \quad (5)$$

令增广测量信息矩阵函数和测量噪声分别为:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{H}\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{H}\Phi_{k+1,k}\mathbf{x}_k \quad (6)$$

$$\mathbf{V}_k^* = \mathbf{H}\mathbf{w}_k + \boldsymbol{\zeta}_k \quad (7)$$

根据上述描述, 将式(1)带有有色噪声的系统, 进行重写, 有:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \\ \mathbf{z}_k^* = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{V}_k^* \end{cases} \quad (8)$$

分析式(9)所组成的系统噪声统计特性, 有:

$$\mathbf{E}[\mathbf{V}_k^*] = \mathbf{H}\mathbf{E}[\mathbf{w}_k] + \mathbf{E}[\boldsymbol{\zeta}_k] = \mathbf{0} \quad (9)$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{V}_k^* \mathbf{V}_j^{*T}] = \mathbf{E}[(\mathbf{H}\mathbf{w}_k + \boldsymbol{\zeta}_k)(\mathbf{H}\mathbf{w}_j + \boldsymbol{\zeta}_j)^T] = \mathbf{H}\mathbf{Q}_k \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k \quad (10)$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{w}_k \mathbf{V}_j^{*T}] = \mathbf{E}[\mathbf{w}_k (\mathbf{H}\mathbf{w}_j + \boldsymbol{\zeta}_j)^T] = \mathbf{Q}_k \mathbf{H}^T \quad (11)$$

通过对系统的噪声统计特性的分析可知, 系统(1)经过噪声白化处理后, 从有色噪声系统变为了系统(9)所示的过程噪声和测量噪声相关的白噪声系统, 其测量噪声协方差矩阵为  $\mathbf{R}_k^* = \mathbf{H}\mathbf{Q}_k \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k$ , 过程噪声和测量噪声的互相关协方差矩阵为  $\boldsymbol{\Psi}_k = \mathbf{Q}_k \mathbf{H}^T$ .

### 1.1 噪声去相关化

根据上述描述可知, 系统

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} \quad (12)$$

$$\mathbf{z}_k^* = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{V}_k^* \quad (13)$$

其噪声统计特性满足:

$$\mathbf{E}[\mathbf{w}_k] = \mathbf{0}, \mathbf{E}[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_j^T] = \mathbf{Q}_k$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{V}_k^*] = \mathbf{0}, \mathbf{E}[\mathbf{V}_k^* \mathbf{V}_j^{*T}] = \mathbf{R}_k^*$$

$$\mathbf{E}[\mathbf{w}_k \mathbf{V}_j^{*T}] = \boldsymbol{\Psi}_k$$

从上述描述可知, 经过噪声的白化处理, 有色噪声系统变为了白噪声相关系统, 因此待解决的问题变为, 基于最小均方误差估计准则, 利用量测值  $\mathbf{Z}_k^* = \{\mathbf{z}_1^*, \mathbf{z}_2^*, \dots, \mathbf{z}_k^*\}$ , 求噪声相关条件下的最优估计值  $\hat{\mathbf{x}}_k$ .

针对噪声相关的系统, 其一般解决噪声相关的问题的途径是通过引入中间项, 将系统的相关噪声化为独立的白噪声. 对式(13)引入一个由观测方程构成的恒等于的项, 有:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{w}_{k-1} + \mathbf{J}_{k-1}(\mathbf{z}_{k-1}^* - \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1})) - \mathbf{V}_{k-1}^* = \\ & \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) - \mathbf{J}_{k-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{J}_{k-1} \mathbf{z}_{k-1}^* - \mathbf{J}_{k-1} \mathbf{V}_{k-1}^* + \mathbf{w}_{k-1} \end{aligned} \quad (14)$$

经过变换后的噪声为:

$$\mathbf{w}_{k-1}^* = \mathbf{w}_{k-1} - \mathbf{J}_{k-1} \mathbf{V}_{k-1}^* \quad (15)$$

则  $\mathbf{w}_{k-1}^*$  和  $\mathbf{V}_{k-1}^*$  的互相关协方差矩阵为:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\mathbf{w}_{k-1}^* \mathbf{V}_j^{*T}] &= \mathbf{E}[(\mathbf{w}_{k-1} - \mathbf{J}_{k-1} \mathbf{V}_{k-1}^*) \mathbf{V}_j^{*T}] = \\ \mathbf{E}[\mathbf{w}_{k-1} \mathbf{V}_j^{*T}] - \mathbf{E}[\mathbf{J}_{k-1} \mathbf{V}_{k-1} \mathbf{V}_j^{*T}] &= \boldsymbol{\Psi}_{k-1} - \mathbf{J}_{k-1} \mathbf{R}_{k-1}^* \end{aligned} \quad (16)$$

在式(17)中,  $\boldsymbol{\Psi}_{k-1}$  和  $\mathbf{R}_{k-1}^*$  均已知, 因此可知, 要使得过程噪声与测量噪声不相关, 需实时的选择合适的矩阵  $\mathbf{J}_{k-1}$  使得  $\boldsymbol{\Psi}_{k-1} - \mathbf{J}_{k-1} \mathbf{R}_{k-1}^* \equiv \mathbf{0}$ , 则有:

$$\mathbf{J}_{k-1} = \boldsymbol{\Psi}_{k-1} \mathbf{R}_{k-1}^{*-1} \quad (17)$$

经过变换后的噪声  $\mathbf{w}_{k-1}^*$  的期望均值为:

$$\mathbf{E}[\mathbf{w}_{k-1}^*] = \mathbf{E}[\mathbf{w}_{k-1}] - \mathbf{E}[\mathbf{V}_{k-1}^*] = \mathbf{0} \quad (18)$$

其协方差阵为:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{k-1}^* = \text{var}[\mathbf{w}_{k-1}^* \mathbf{w}_j^{*T}] &= \text{var}[(\mathbf{w}_{k-1}^* - \mathbf{J}_{k-1} \mathbf{V}_{k-1}^*)(\mathbf{w}_j^* - \mathbf{J}_j \mathbf{V}_j^*)^T] = \\ \mathbf{Q}_{k-1} - \mathbf{J}_{k-1} \boldsymbol{\Psi}_{k-1}^T - \boldsymbol{\Psi}_{k-1} \mathbf{J}_{k-1}^T + \mathbf{J}_{k-1} \mathbf{R}_{k-1}^* \mathbf{J}_{k-1}^T \end{aligned} \quad (19)$$

将式(18)代入式(20), 有:

$$\mathbf{Q}_{k-1}^* = \text{var}[\mathbf{w}_{k-1}^* \mathbf{w}_j^{*T}] = \mathbf{Q}_{k-1} - \boldsymbol{\Psi}_{k-1} \mathbf{R}_{k-1}^{*-1} \boldsymbol{\Psi}_{k-1}^T \quad (20)$$

根据上述描述可知, 在引入一个由测量量构成的恒等于零的项后, 通过实时调节  $\mathbf{J}_{k-1}$  阵, 可使式(13)和式(14)所组成的系统, 变为互不相关的白噪声系统, 即:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) + \mathbf{J}_{k-1} \mathbf{z}_{k-1}^* + \mathbf{w}_{k-1}^* \\ \mathbf{z}_k^* = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{V}_k^* \end{cases} \quad (21)$$

式中:  $\mathbf{f}^*(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) - \mathbf{J}_{k-1} \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k-1})$ ,

$\mathbf{w}_{k-1}^* = \mathbf{w}_{k-1} - \mathbf{J}_{k-1} \mathbf{V}_{k-1}^*$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{H}\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{H}\boldsymbol{\Phi}_{k+1,k} \mathbf{x}_k$ ,

$\mathbf{V}_k^* = \mathbf{H}\mathbf{w}_k + \boldsymbol{\zeta}_k$ .

将有色噪声经过上述处理后, 原系统非线性状态变为  $\mathbf{f}^*(\bullet)$ ,  $\mathbf{J}_{k-1} \mathbf{z}_{k-1}^*$  为输入项, 测量方程变为  $\mathbf{h}(\bullet)$ , 噪声为  $\mathbf{w}^*$  和  $\mathbf{V}^*$ .

## 2 有色噪声下的UKF

### 2.1 相关 Web 页面获取

经过第一节的处理变化后, 可直接采用平方根 UKF 进行非线性滤波估计, 基于有色测量噪声的平方根 UKF 算法迭代步骤如下:

① 初始化  $\hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{S}_0$ ;

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{E}[\mathbf{x}_0] \quad (22)$$

$$S_0 = \text{chol}E[(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T] \quad (23)$$

② 对于  $k = 1, 2, \dots$ ;

步骤一: 采用 UT 变换计算 Sigma 点

$$\begin{cases} \xi_{k-1,0} = \hat{x}_{k-1} \\ \xi_{k-1,i} = \hat{x}_{k-1} + \gamma S_{k-1,i}, i = 1, 2, \dots, n \\ \xi_{k-1,i} = \hat{x}_{k-1} - \gamma S_{k-1,i}, i = n+1, n+2, \dots, 2n \end{cases} \quad (24)$$

式中,  $\gamma = \sqrt{n + \lambda}$ ,  $S_{k-1} = \text{chol}(P_{k-1}) = \sqrt{P_{k-1}}$ .

步骤二: 进行 Sigma 点非线性传播

$$\chi_{k,i} = f^*(\xi_{k,i}, u_{k-1}) \quad (25)$$

式中, 非线性函数

$$f^*(\xi_{k,i}, u_{k-1}) = f(\xi_{k-1,i}, u_{k-1}) - J_{k-1} h(\xi_{k-1,i}) + J_{k-1} z_{k-1}^*$$

$$J_{k-1} = \Psi_{k-1} R_{k-1}^{*-1}, \quad R_{k-1}^* = H Q_{k-1} H^T + R_{k-1}$$

$$z_{k-1}^* = z_k - \Phi_{k,k-1} z_{k-1}$$

步骤三: 状态预测及协方差矩阵

$$\hat{x}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^m \chi_i \quad (26)$$

$$S_{k|k-1}^- = \text{qr}([\sqrt{W_1^c}(\chi_{k,1:2n} - \hat{x}_{k|k-1}), Q_{k-1}^*]) \quad (27)$$

$$S_{k|k-1} = \text{cholupdate}(S_{k|k-1}^-, \chi_{k,0} - \hat{x}_{k|k-1}, W_0^c) \quad (28)$$

式中,  $Q_{k-1}^* = Q_{k-1} - \Psi_{k-1} R_{k-1}^{*-1} \Psi_{k-1}^T$ .

步骤四: 输出预测及协方差矩阵

$$\mu_{k,i} = h(\chi_{k,i}) \quad (29)$$

$$\hat{z}_{k|k-1}^* = \sum_{i=0}^{2n} W_i^m \mu_{k,i} \quad (30)$$

$$P_{\bar{x}_k \bar{z}_k} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^c (\chi_{k,i} - \hat{x}_{k|k-1})(\mu_{k,i} - \hat{z}_{k|k-1}^*)^T \quad (31)$$

$$S_{\bar{z}_k}^- = \text{qr}([\sqrt{W_1^c}(\mu_{k,1:2n} - \hat{z}_{k|k-1}^*), R_k^*]) \quad (32)$$

$$S_{\bar{z}_k} = \text{cholupdate}(S_{\bar{z}_k}^-, \mu_{k,0} - \hat{z}_{k|k-1}^*, W_0^c) \quad (33)$$

式中, 非线性函数  $h(\chi_k) = Hf(\chi_k) - H\Phi_{k+1,k} \chi_k$ ,  $R_k^* = H Q_k H^T + R_k$

步骤五: 测量更新

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (z_k^* - \hat{z}_{k|k-1}^*) \quad (34)$$

$$K_k = (P_{k, \bar{x}_k \bar{z}_k} / S_{\bar{z}_k}^T) / S_{\bar{z}_k} \quad (35)$$

$$U_k = K_k S_{\bar{z}_k} \quad (36)$$

$$S_k = \text{cholupdate}(S_{k|k-1}, U_k, -1) \quad (37)$$

式中,  $z_k^* = z_{k+1} - \Phi_{k+1,k} z_k$ .

### 3 卫星自主导航系统模型

#### 3.1 系统状态方程

在 J2000.0 地心惯性赤道坐标系下, 卫星自主导航系统模型(即轨道动力学模型)如下<sup>[8,9]</sup>:

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ -\mu \frac{x}{r^3} \left[ 1 - J_2 \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 \left( 7.5 \frac{z^2}{r^2} - 1.5 \right) \right] + \Delta F_x \\ -\mu \frac{y}{r^3} \left[ 1 - J_2 \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 \left( 7.5 \frac{z^2}{r^2} - 1.5 \right) \right] + \Delta F_y \\ -\mu \frac{z}{r^3} \left[ 1 - J_2 \left( \frac{R_e}{r} \right)^2 \left( 7.5 \frac{z^2}{r^2} - 4.5 \right) \right] + \Delta F_z \end{pmatrix} + w \quad (38)$$

式(38)可简写为:

$$\dot{X}(t) = f(X(t), t) + w(t) \quad (39)$$

式中,  $X = [x \ y \ z \ v_x \ v_y \ v_z]^T$  为卫星在地心惯性坐标系下三个方向的位置和速度,  $\mu$  为引力常数,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  为航天器位置参数矢量的模,  $J_2$  为地球引力系数,  $R_e$  是地球的平均赤道半径,  $\Delta F_x, \Delta F_y, \Delta F_z$  为地球非球形高阶摄动项和日月摄动、太阳光压摄动以及大气压摄动等其他摄动力的影响,  $w$  为高斯白噪声.

#### 3.2 间接量测量方程

卫星导航原理如图 1 所示, 图中  $A_1, A_2$  为地心与卫星及两恒星平星光方向的夹角,  $A_3$  是卫星相对于地球的张角. 根据文献[10-11], 这三个角度可由星敏感器和星光相机测得, 它们分别为:

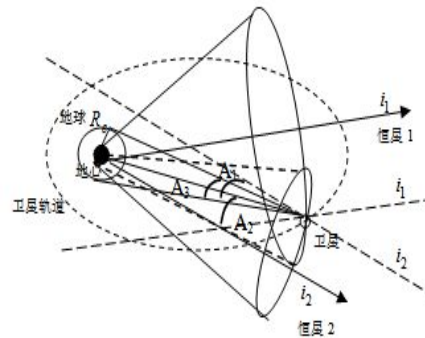


图 1 卫星导航原理图

$$\begin{cases} A_1 = \arccos\left(\frac{x_k}{r}\right) \\ A_2 = \arccos\left(\frac{x_k \cos\theta + y_k \sin\theta}{r}\right) \\ A_3 = 2\arcsin\left(\frac{R_e}{r}\right) \end{cases} \quad (40)$$

通过测量到的  $A_1, A_2$  则可以确定以地球为顶点的两个圆锥面, 再利用已知的两恒星平行光的单位矢量  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$  则可确定卫星相对于地心的矢量  $\mathbf{r}$  的方向, 最后结合测量到的卫星相对于地球的张角  $A_3$  及地球半径  $R_e$  即可确定位置矢量  $\mathbf{r}$ , 其数学描述如下:

$$\begin{cases} \mathbf{r} \cdot \mathbf{i}_1 = r \cos A_1 \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{i}_2 = r \cos A_2 \\ r = \frac{R_e}{2} \sin\left(\frac{A_3}{2}\right) \end{cases} \quad (41)$$

根据以上描述, 完全可以由几何关系得到卫星关于地球的相对位置. 根据式(40)和式(41)有:

$$\begin{cases} x = R_e \frac{\cos A_1}{\sin(A_3/2)} \\ y = R_e \frac{(\cos A_2 - \cos A_1 \cos\theta)}{\sin(A_3/2) \sin\theta} \\ z = R_e \frac{\sqrt{\sin^2\theta \sin^2 A_1 - (\cos A_2 - \cos A_1 \cos\theta)^2}}{\sin(A_3/2) \sin\theta} \end{cases} \quad (42)$$

将  $x, y, z$  作为间接量观测, 可得观测方程为:

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{H}\mathbf{X}_k + \mathbf{V}_k \quad (43)$$

式中,  $\mathbf{Z} = [x \ y \ z]^T$ ,  $\mathbf{V}_k$  为有色噪声, 满足:

$$\mathbf{V}_k = \Phi_{k,k-1} \mathbf{V}_{k-1} + \zeta_{k-1}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

将测量方程按照噪声白化处理方式进行转换得到如式(21)形式即可按照本文提出的方法进行处理.

#### 4 实验结果及仿真分析

为了验证本文提出的有色噪声 SRUKF 方法的有效性, 分别将有色噪声下的 SRUKF 和 SRUKF 对由式(38)和式(43)组成的导航系统, 进行仿真. 仿真环境为 Matlab R2010a, 仿真参数设置如下<sup>[12]</sup>: 坐标系为 J2000.0 地心赤道惯性坐标系, 半轴长为  $a=7136.635\text{km}$ , 偏心率  $e=0.001$ , 轨道倾角  $i=65^\circ$ , 升交

点赤经  $\Omega=30^\circ$ , 近地点角距为  $\omega=30^\circ$ , 光学导航相机精度为  $0.005^\circ$ , 星敏传感器精度为  $3''$ , 测量噪声均为白噪声, 采样时间间隔为  $T=1\text{s}$ . 仿真分别在理想情况和有色噪声情况这两种环境下进行, 在理想情况下, 仿真时长为  $t=600\text{s}$ , 主要是为了验证有色噪声 SRUKF 的估计精度; 在有色噪声的情况下, 仿真时长为  $t=600\text{s}$ , 主要是为了验证有色噪声 SRUKF 对带有有色量测噪声系统估计的有效性. 另外, 为了更好的比较两种算法在稳态的估计性能, 评价算法的有效性, 采用均方根误差(root-mean-square-error RMSE)来描述估计质量, 分别针对两种情况下, 进行 100 次 monte Carlo 仿真. 仿真结果如表 1、表 2 和表 3 所示, RMSE 的表达式如下:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\mathbf{X}(k) - \hat{\mathbf{X}}^j(k))^T (\mathbf{X}(k) - \hat{\mathbf{X}}^j(k))}$$

式中,  $N$  为 monte Carlo 仿真次数,  $j$  表示第  $j$  次仿真.  $\mathbf{X}(k)$  及  $\hat{\mathbf{X}}^j(k)$  分别表示第  $k$  时刻状态真实值及滤波估计值.

情况 1  $\Phi_{k,k-1} = \mathbf{0}_{3 \times 3}$ .

当  $\Phi_{k,k-1} = \mathbf{0}_{3 \times 3}$ , 此时系统噪声退化为白噪声, 两种算法的实验仿真结果如图 2~图 7 所示, 从仿真实验结果可以看出, 虽然部分点之间的估计精度存在差异, 但是从整个误差曲线来看, 它们的估计精度没有太大差别. 另外, 表 1 当中的均方根误差也表明, 有色噪声下的 SRUKF 和传统的 SRUKF 之间的估计精度相差不多, 在同一个数量级上. 这说明白噪声情况下, 有色噪声下的 SRUKF 和传统的 SRUKF 获得导航精度相当.

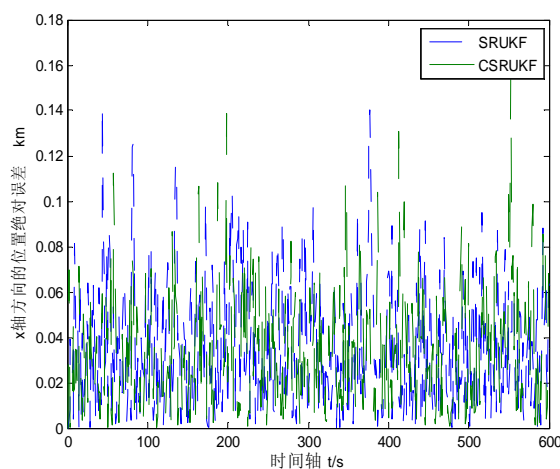


图 2 x 轴方向位置绝对误差

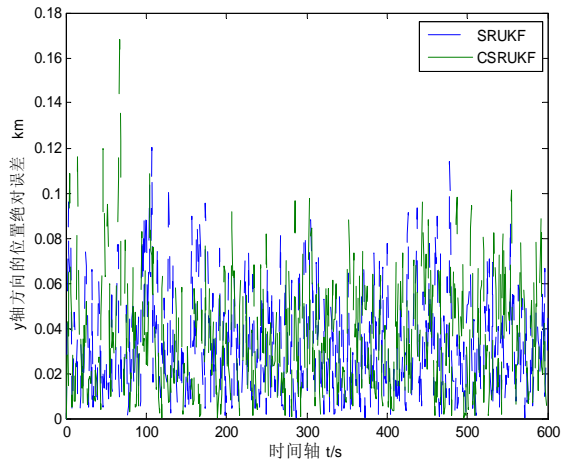


图 3 y 轴方向位置绝对误差

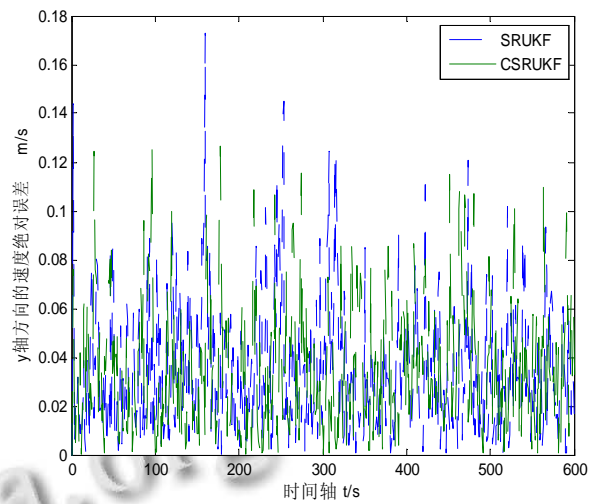


图 6 y 轴方向速度误差曲线

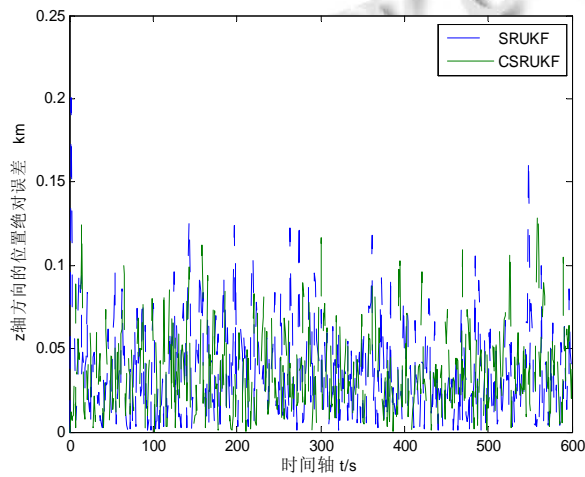


图 4 z 轴方向位置绝对误差

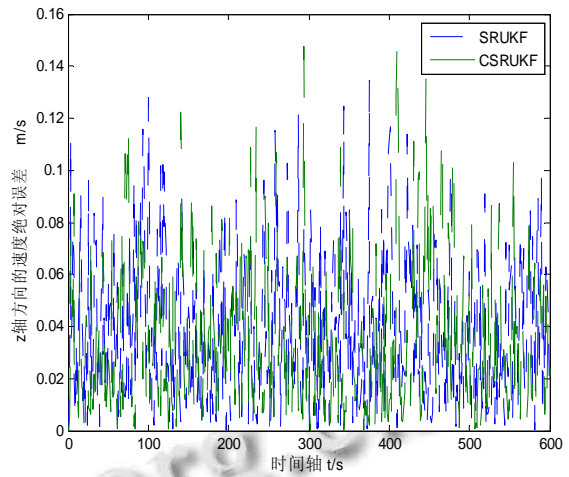


图 7 z 轴方向速度误差曲线

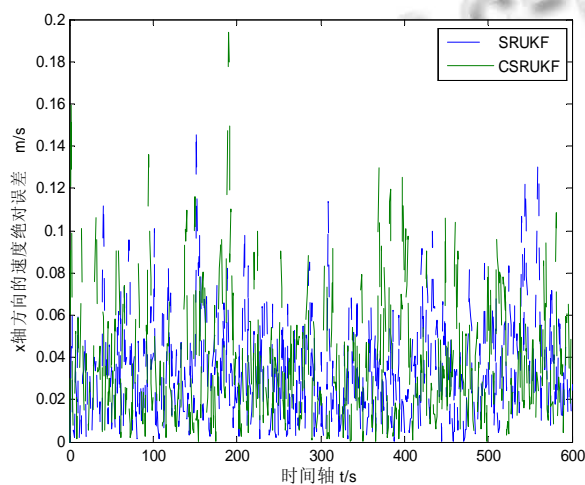


图 5 x 轴方向速度误差曲线

表 1 理想情况下的均方根误差

方法	x(km)	y(km)	z(km)	v <sub>x</sub> (m/s)	v <sub>y</sub> (m/s)	v <sub>z</sub> (m/s)
SRUKF	0.0355	0.0321	0.0356	0.0338	0.0343	0.0384
CSRUKF	0.0340	0.0356	0.0363	0.0382	0.0349	0.0359

情况 2  $\Phi_{k,k-1} = I_{3 \times 3}$

当  $\Phi_{k,k-1} = I_{3 \times 3}$  时, 测量噪声变为有色噪声, 两种方法的仿真结果如图 8~图 13 所示及表 2 所示. 从实验仿真结果可以看出, 传统的 SRUKF 方法的估计误差很大, 对状态的估计和跟踪效果不理想, 这说明在导航系统当中存在有色噪声的情况下, 传统的基于高斯白噪声假设的 SRUKF 进行非线性滤波时, 是发散的, 所得到的估计结果已经失去了其有效性, 从而使得导航系统的精度降低了, 严重时甚至造成导航系

系统故障. 而本文提出的有色噪声下的 SRUKF 的误差是收敛的, 且远小于传统 SRUKF 所得到的结果, 对系统状态的估计和跟踪能力较好, 另外比较表 1 和表 2 的均方根误差, 也可知, 在两种情况下, 本文提出的有色噪声下 SRUKF 的均方根误差变化不是很大, 这些说明, 本文提出有色噪声下的 SRUKF 对导航系统存在的有色噪声并不敏感, 能够相对较好的克服, 具有一定的有效性和可行性, 这保证了导航系统的导航精度, 提高了导航系统的稳定性.

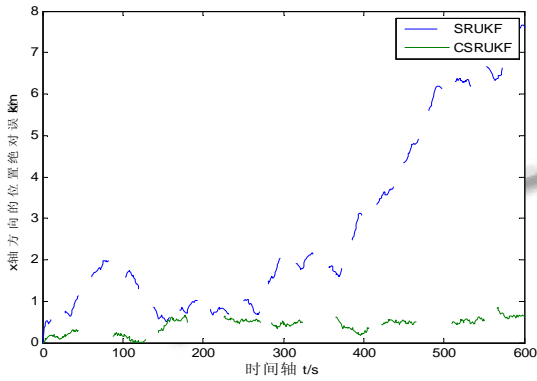


图 8 x 轴方向位置绝对误差

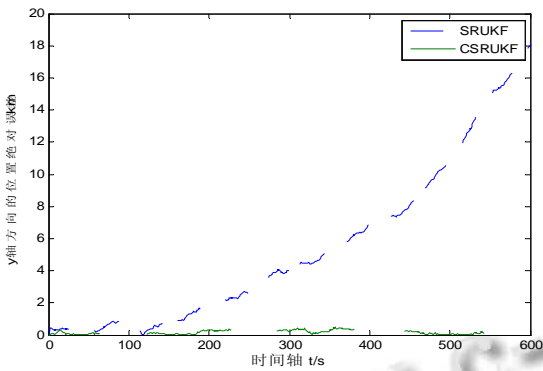


图 9 y 轴方向位置绝对误差

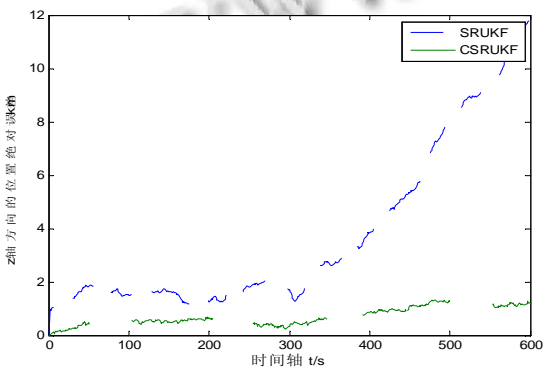


图 10 z 轴方向位置绝对误差

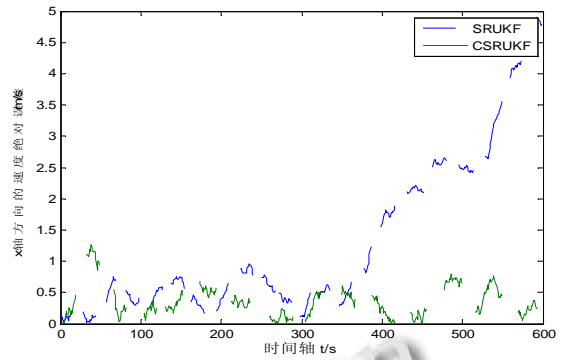


图 11 x 轴方向速度误差曲线

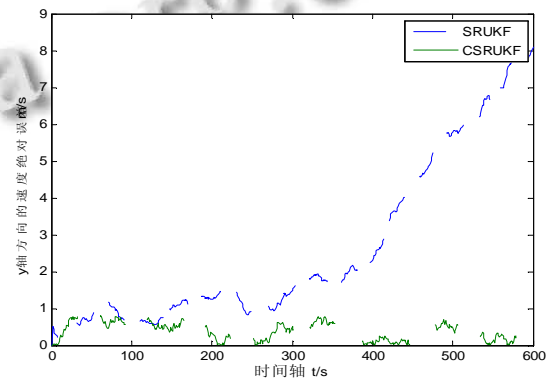


图 12 y 轴方向速度误差曲线

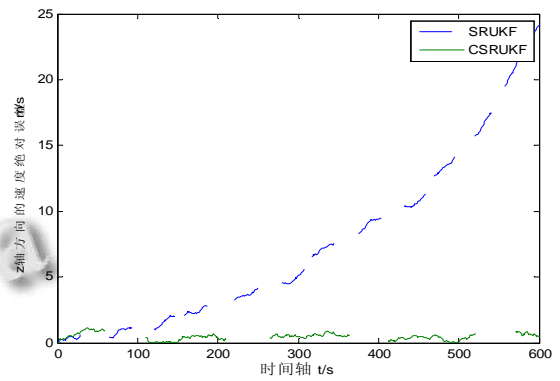


图 13 z 轴方向速度误差曲线

表 2 有色噪声下的均方根误差

方法	x(km)	y(km)	z(km)	v <sub>x</sub> (m/s)	v <sub>y</sub> (m/s)	v <sub>z</sub> (m/s)
SRUKF	2.7618	5.4616	3.7964	1.3072	2.4412	2.6518
CSRUKF	0.4071	0.1994	0.1565	0.2672	0.2743	0.1969

另外为了进一步说明本文设计方法有效性, 针对  $\Phi_{k,k-1} = 0.8I_{3 \times 3}$  和  $\Phi_{k,k-1} = I_{3 \times 3}$  情况下进行仿真, 仿真结果如表 3 所示.

从表 3 中可以看出, 当  $\Phi_{k,k-1}$  发生变化时, 两种方法的估计精度都会发生变化,  $\Phi_{k,k-1}$  越大, 它们的

估计精度越差。但是,传统的 SRUKF 的估计结果变化非常大,而本文所设计的有色噪声下的 SRUKF 的估计结果则变化相对较小,且估计精度要明显好于传统的 SRUKF 的估计精度,这说明本文设计的有色噪声下的 SRUKF 能够很好的解决带有有色量测噪声下的导航系统状态估计问题。

表 3 有色噪声下的均方根误差

方法	SRUKF		CSRUKF	
	$0.8I_{3 \times 3}$	$I_{3 \times 3}$	$0.8I_{3 \times 3}$	$I_{3 \times 3}$
$x$ (km)	17.346	40.373	0.4218	0.6935
$y$ (km)	19.323	34.767	0.2694	0.5870
$z$ (km)	18.184	31.659	0.6928	0.9375
$v_x$ (m/s)	5.6096	10.281	0.3623	0.8720
$v_y$ (m/s)	5.2659	10.479	0.3979	0.6347
$v_z$ (m/s)	5.0236	11.694	0.4783	0.6273

## 5 结论

本文针对传统的 SRUKF,在带有有色量测噪声的基于星敏感器/光学导航相机的卫星自主导航系统中应用时,其估计性能变差,有效性下降等问题,提出了一种带有有色量测噪声下的 SRUKF 方法。在该方法中,首先,利用星敏感器/光学导航相机设计出导航方案,通过转换方程将间接量测量转换为观测量。然后,基于量测信息推广方法,将有色噪声系统转换为过程噪声和测量噪声相关的白噪声系统,并通过引入中间量,将相关的白噪声系统化为传统的白噪声系统。最后,基于最小方差准则,推导出一种有色噪声情况下的最优滤波算法框架,算法的非线性状态的估计和协方差矩阵采用 UT 变换来计算,从而得到有色噪声下的 UKF 算法。与此同时,为了避免在数值计算的过程中,由于舍入误差而破坏误差协方差矩阵的正定性和对称性,在整个递推计算过程中,借鉴平方根 Kalman 滤波理论,采用协方差矩阵平方根进行递推计算,改善滤波算法的稳定性,协方差矩阵的平方根更新用 cholesky 分解和 qr 分解来计算。将该方法和传统的 SRUKF 方法在不同有色量测噪声系统下进行的仿真,实验仿真结果表明,相比较传统的 SRUKF,本文

设计的有色噪声下的 SRUKF 是有效的。

## 参考文献

- 1 Fesq L. Spacecraft autonomy in the new millennium. Proc. of the Annual AAS Rocky Mountain Guidance and Control Conference. Breckenridge, Colorado. Feb1 7-11, 1996.
- 2 陈阳舟,孙章固,马海波.基于平方根 UKF 的车辆组合导航.系统工程与电子技术,2008,30(5):926-929.
- 3 张瑜,房建成.基于 Unscented 卡尔曼滤波器的卫星自主天文导航研究.宇航学报,2003,24(6):646-650.
- 4 刘涛,解永春.UKF 稳定性研究及其在相对导航中的应用.宇航学报,2010,31(3):739-747.
- 5 Ning XL, Fang JC. A new autonomous celestial navigation method for the lunar rover. Robotics and Autonomous Systems, 2009, 57(1): 48-54.
- 6 陈阳舟,孙章固,马海波.基于平方根 UKF 的车辆组合导航.系统工程与电子技术,2008,30(5):926-929.
- 7 范利涛,郑伟,汤国建.基于平方根 UKF 滤波的轨道机动飞行器自主导航方法.中国惯性技术学报,2008,16(6): 667-675.
- 8 Xiong K, Liu LD, Zhang HY. Modified unscented Kalman filtering and its application in autonomous satellite navigation. Aerospace Science and Technology, 2009, 13(4-5): 238-246.
- 9 Wang ZW, Yang XK, Xu Y, Yu SY. CamShift guided particle filter for visual tracking. Pattern Recognition Letters, 2009, 30(4): 407-413.
- 10 胡小平.自主导航理论与应用.长沙:国防科技大学出版社,2002.
- 11 Shinhak L, Tsun-Yee Y. A robust spatial acquisition algorithm for extended source using subpixel image scanning. Int. Conf. Signal Processing Applications and Technology(IC-SPAT99). Orlando. Florida. 1999. 2098-2013.
- 12 张共愿,程咏梅,杨峰.预测-校正 EKF 算法在自主导航中的应用.宇航学报,2009,30(6):2227-2230.