

# 基于法矢控制的 B 样条曲面逼近的 PIA 方法<sup>①</sup>

黄丽琴, 潘日晶, 林传奎, 陈 青

(福建师范大学 数学与计算机科学学院, 福州 350007)

**摘 要:** 提出了一种基于法矢控制的 B 样条曲面逼近的渐进迭代逼近(PIA)算法. 一方面该方法将离散数据点的切矢、曲率、法矢等几何特征充分应用到离散数据点的逼近问题上, 利用数据点两个方向的切矢构造出数据点的法矢约束来控制逼近曲面形状, 相比于无法矢控制的 B 样条曲面逼近的渐进迭代逼近(PIA)方法, 逼近曲面更光滑, 可获得更好的逼近效果. 另一方面由于该算法选取主特征点作为控制顶点, 所以允许在曲面拟合中控制顶点的数目小于数据点的数目. 而且 PIA 算法的每次迭代过程中的各个步骤都是独立的, 很容易被应用到并行计算上, 可提高计算效率. 本文还给出了一些实例来验证该算法的有效性.

**关键词:** 渐进迭代逼近; B 样条曲面; 主特征点; 切矢; 法矢; 调整差向量; 曲率

## PIA for B-spline Surface Approximation with Normal Constraint

HUANG Li-Qin, PAN Ri-Jing, LIN Chuan-Luan, CHEN Qing

(School of Fjian Normal University, Fuzhou 350700, China)

**Abstract:** In this paper, we propose a progressive iterative approximation (PIA) algorithm for B-spline surface approximation with normal constraint. On the one hand, the discrete data points of the tangent vector, normal vector, curvature and other geometric characteristics are fully applied to the approximation problem of discrete data points, using the two directions of the tangent vector to construct normal constraint can avoid unnecessary fluctuations, and obtain better approximation effect. On the other hand, the number of selecting feature points is less than the number of data points, so the PIA algorithm can be used for the approximation of the mass of discrete data points. The steps in the process of each iteration of the algorithm are independent, which is easy to be applied to the parallel computing, which greatly improve the computational efficiency. Some examples are given to show the validity of the algorithm.

**Key words:** progressive iterative approximation; B-spline surface; features points; tangent vector; normal constraint; adjusting vector; curvature

曲面造型是计算机辅助几何设计和计算机图形学的重要内容. B 样条是 CAGD 中曲面造型广泛使用的工具, 在几何特征约束下构造 B 样条曲面逼近数据点是曲面造型的一个十分重要的研究课题.

数据逼近的本质是通过构造出具有一定约束条件的曲线、曲面来通过或者接近给定的数据点集. 最小二乘逼近方法<sup>[1,2]</sup>是传统拟合算法中应用较广泛的一种算法, 它是一种整体逼近的算法. 在每次的迭代过程中, 最小二乘算法要重新计算整个线性系统, 导致

计算量较大, 效率较低. 为了克服最小二乘拟合算法中遇到的计算复杂, 效率较低等问题, 近年来渐进迭代逼近(PIA)得到越来越多的关注和研究.

PIA 方法是一个迭代的过程, 从一个由控制顶点和混合基函数表示的初始曲线或曲面开始, 最终的极限曲线或曲面逼近于给定的数据点. 每一次的迭代过程中, 主要的计算就是对数据点在拟合曲线或面上的对应参数点进行求值. PIA 方法具有良好的并行性, 对点的求值过程是独立的, 所以这个特性使得整个过

<sup>①</sup> 收稿时间:2014-10-16;收到修改稿时间:2014-11-28

程适用于并行计算,此外,PIA 方法具有局部性质,即它可以对每个数据点单独地控制拟合精度. PIA 方法最初被应用于均匀三次 B 样条曲线的的数据拟合问题中. 1975 年齐东旭等<sup>[3]</sup>提出了均匀三次 B 样条曲线的 PIA 方法. 1979 年 de Boor 在一次学术讨论中同样也阐述了类似思想<sup>[4]</sup>. 2004 年, 蔺宏伟<sup>[5]</sup>等证明了对于非均匀三次 B 样条曲线和曲面也具有 PIA 的性质.

早期的 PIA 方法都是针对数据点插值问题,即曲线曲面的控制顶点个数与数据点个数是一致的. 2011 年蔺宏伟等<sup>[6]</sup>给出了一种推广的渐进迭代逼近算法(EPIA),该算法允许控制顶点个数与数据点个数是不一致的,是一种逼近的算法,并且证明了它的收敛性.然而对于曲面的 EPIA 算法要求这些数据点必须是经过处理得到的有规则的数据点,即 EPIA 算法不适用于散乱分布的离散数据点的曲面逼近.但是在实际问题中,许多情况下给定的点是散乱分布的,所以 EPIA 还是有待进一步完善.

2012 年 Yuki Kineri 等<sup>[7]</sup>中给出了一种针对于散乱分布的离散数据点的 B 样条曲面逼近的 PIA 算法.文中作者给出了 B 样条曲面的几何插值和逼近算法,这个算法与普通的 B 样条曲面逼近的 PIA 算法不同的是:在迭代过程中,先构造出一个基曲面,然后将数据点投影到基曲面上,找到最近投影点,将投影点的参数值作为数据点的参数值进行不断的迭代,也就是说在每次的迭代过程中控制顶点的参数值并不是保持不变的.直到数据点与曲面的投影距离小于给定的阈值时,停止迭代.最后还通过实验验证了该算法的收敛性和实用性.然而,当数据点分布得非常密集时,该算法的收敛速度就会变得很慢.当数据点分布不均匀时,运用该算法对数据点进行逼近,最后得到得 B 样条曲面的效果不是很理想.

对于数据点规模较大的拟合问题时,PIA 算法也会变得非常很复杂.2014 年,邓重阳等<sup>[8]</sup>提出了一种最小二乘的渐进迭代逼近算法(LSPIA),可以较好地解决此问题. LSPIA 方法也是一种迭代的算法,最后得到的极限曲面就是最小二乘拟合曲面.与最小二乘拟合算法相比,该算法不要求解线性系统,适用于数据点量规模较大的问题中.但是在该算法中,作者没有给出初始控制顶点选择的方法,最后的逼近曲面的效果很大程度上取决于数据点的选择,逼近效果存在不确定性.

前面所提到的 PIA 算法,在迭代过程中只用到数据点的位置信息,并未涉及到数据点的几何特征.考虑到 B 样条逼近与数据点的切矢、法矢,曲率等几何特征之间有着密切的联系,2009 年 Maekawa<sup>[9]</sup>中基于数据点的几何特征,提出了基于点切向和点法向的 B 样条曲线插值的 PIA 方法.然而该算法只是将几何特征运用到曲线插值的问题中,因此我们可以考虑将数据点的几何特征推广应用到曲面的逼近问题中,如在 PIA 算法的迭代过程中添加切矢、法矢、曲率等这些几何约束条件,控制逼近曲面的形状,消除逼近曲面一些不必要的扭动,相比于只考虑数据点参数误差量的传统 PIA 方法,有可能获得更好的逼近效果和光顺性.

在文献[6, 9]的基础上,本文提出一种基于法矢控制的选取主特征点的 B 样条曲面逼近的 PIA 方法,将数据点的几何特征运用到曲面逼近的 PIA 算法中.

## 1 基于主特征点法矢约束的曲面PIA算法

本文要解决的问题是:对于给定的数据点阵  $\{p_{ij}; i=0,1,\dots,m, j=0,1,\dots,n\}$ ,要求寻找一个逼近这些数据点的 B 样条曲面  $S(u,v)$ .

下面给出本文求解方法的基本步骤:首先对给定的数据点阵  $\{p_{ij}; i=0,1,\dots,m, j=0,1,\dots,n\}$  分别按行按列进行参数化,每个数据点  $p_{ij}$  被设定了一对参数值  $(u_i, v_j)$ ,并求出数据点  $\{p_{ij}; i=0,1,\dots,m, j=0,1,\dots,n\}$  的法矢  $\{n_{ij}; i=0,1,\dots,m, j=0,1,\dots,n\}$ .

接下来将数据点阵  $\{p_{ij}; i=0,1,\dots,m, j=0,1,\dots,n\}$  分为  $(l_u+1) \times (l_v+1)$  组,即:  $G_{gh} = \{p_{ij}; (i,j) \in I_{gh}\}, g=0, 1, \dots, l_u, h=0, 1, \dots, l_v,$

其中  $I_{gh}$  是数据点在各个组内的序号集,满足如下性质:如果  $p_{i_1, j_1} \in G_{g_1, h_1}, p_{i_2, j_2} \in G_{g_2, h_2}$ , 则它们的参数  $(u_{i_1}, v_{j_1}), (u_{i_2}, v_{j_2})$  满足:  $u_{i_1} < u_{i_2}$ . 另一方面,如果:  $p_{i_1, j_1} \in G_{g_1, h_1}, p_{i_2, j_2} \in G_{g_2, h_2+1}$ , 则它们的参数值  $(u_{i_1}, v_{j_1}), (u_{i_2}, v_{j_2})$  满足:  $v_{j_1} < v_{j_2}$ . 数据点的分类的问题,将会在以下 1.4 章节进行详细讨论.

然后在每一组数据中选出一个主特征点  $P_{igjh}$ , 并将它们作为初始控制顶点,即  $\{p_{gh}^{(0)} = P_{igjh}, g=0, 1, \dots, l_u, h=0, 1, \dots, l_v\}, l_u < m, l_v < n,$

接着构造初始曲面

$$S^{(0)}(u, v) = \sum_{g=0}^{l_u} \sum_{h=0}^{l_v} \mathbf{p}_{gh}^{(0)} B_{g,p}(u) B_{h,q}(v)$$

其中  $B_{g,p}(u)$ ,  $B_{h,q}(v)$  分别是由节点向量  $\{\bar{u}_i, i=0,1,\dots,l_u+p+1\}$  和  $\{\bar{v}_j, j=0,1,\dots,l_v+q+1\}$  确定的规范的  $p$  次 B 样条基函数和  $q$  次 B 样条基函数. 以上步骤中数据点的参数化方法、数据点法矢的计算方法、数据点的分组方法, 主特征点  $\mathbf{p}_{gh}^{(0)}$  的选取方式和节点向量  $\{\bar{u}_i, i=0,1,\dots,l_u+p+1\}$  和  $\{\bar{v}_j, j=0,1,\dots,l_v+q+1\}$  的构造方法将在本节的 1.2-1.5 小节中具体给出.

最后应用 PIA 方法并利用数据点的法向约束, 通过迭代得到逼近数据点  $\{\mathbf{p}_{ij}; i=0,1,\dots,m, j=0,1,\dots,n\}$  的 B 样条曲面. 迭代过程如下: 将初始控制顶点  $\mathbf{p}_{gh}^{(0)}$  沿着法向调整差异向量  $\Omega_{gh}^{(0)}$  方向移动  $\|\Omega_{gh}^{(0)}\|$  个单位, 得到  $\mathbf{p}_{gh}^{(1)}$ , 即  $\mathbf{p}_{gh}^{(1)} = \mathbf{p}_{gh}^{(0)} + \Omega_{gh}^{(0)}$ . 将  $\mathbf{p}_{gh}^{(1)}$  作为控制顶点, 构造出 B 样条曲面

$$S^{(1)}(u, v) = \sum_{g=0}^{l_u} \sum_{h=0}^{l_v} \mathbf{p}_{gh}^{(1)} B_{g,p}(u) B_{h,q}(v).$$

假设已生成第  $k$  个曲面

$$S^{(k)}(u, v) = \sum_{g=0}^{l_u} \sum_{h=0}^{l_v} \mathbf{p}_{gh}^{(k)} B_{g,p}(u) B_{h,q}(v),$$

接着要生成第  $k+1$  个曲面, 只需将控制顶点  $\mathbf{p}_{gh}^{(k)}$  沿着法向调整差异向量  $\Omega_{gh}^{(k)}$  方向移动  $\|\Omega_{gh}^{(k)}\|$  个单位, 得到新的控制顶点  $\mathbf{p}_{gh}^{(k+1)}$ , 即,  $\mathbf{p}_{gh}^{(k+1)} = \mathbf{p}_{gh}^{(k)} + \Omega_{gh}^{(k)}$  就可构造第  $k+1$  个 B 样条曲面, 即

$$S^{(k+1)}(u, v) = \sum_{g=0}^{l_u} \sum_{h=0}^{l_v} \mathbf{p}_{gh}^{(k+1)} B_{g,p}(u) B_{h,q}(v).$$

重复这些步骤, 直到逼近误差  $e_f^{(k)} < \varepsilon_{\max}$  时停止迭代, 这里的  $\varepsilon_{\max}$  是预设的拟合误差阈值,  $\varepsilon_{\max}$  的设定取决于所选的数据点的分布. 在以上的迭代过程中, 当迭代达到一定的次数  $m_0$  且  $e_f^{(k)} \geq \varepsilon_{\max}$  时, 或者当迭代次数  $m < m_0$  且主特征点当前的最大法向调整差异量  $e_c^{(k+1)}$  大于上一次的  $e_c^{(k)}$  时, 说明当前的分组不是有效的, 这里的  $m_0$  是预设的迭代次数阈值. 这种情况下需要插入新节点, 重新分组, 并且分割对应的序号组. 以上迭代过程中的法向调整差异向量  $\Omega_{gh}^{(k)}$ 、数据点的最大法向差异量  $e_f^{(k)}$ 、主特征点最大法向调整差异量  $e_c^{(k)}$  的计算以及节点插入的方法在 1.6、1.7 小节中给出.

### 1.1 基于法矢控制的 B 样条曲面逼近的 PIA 算法

输入: 数据点阵  $\{\mathbf{p}_{ij}; i=0,1,\dots,m, j=0,1,\dots,n\}$ , 预设的拟合误差阈值  $\varepsilon_{\max}$ , 预设的迭代次数阈值  $m_0$ .

输出: 最终得到满足拟合精度要求的  $p \times q$  次 B 样条曲面的控制顶点  $\{\mathbf{p}_{gh}^{(0)}; g=0,1,\dots,l_u; h=0,1,\dots,l_v\}$ .

- 1) 参数化给定的数据点阵  $\{\mathbf{p}_{ij}; i=0,1,\dots,m, j=0,1,\dots,n\}$  (具体方法见 1.2 小节)
- 2) 计算各个数据点的法矢  $\{\mathbf{n}_{ij}; i=0,1,\dots,m, j=0,1,\dots,n\}$  (具体方法见 1.3 小节)
- 3) 对数据点进行分组得  $G_{gh}, g=0,1,\dots,l_u, h=0,1,\dots,l_v$  (具体方法见 1.4 小节)
- 4) 对每一组选取一个主特征点作为初始控制顶点  $\{\mathbf{p}_{gh}^{(0)} = \mathbf{p}_{i_g, j_h}; g=0,1,\dots,l_u, h=0,1,\dots,l_v\}$  (具体方法见 1.4 小节)
- 5) 构造节点向量  $\{\bar{u}_i, i=0,1,\dots,l_u+p+1\}$ ,  $\{\bar{v}_j, j=0,1,\dots,l_v+q+1\}$  (具体方法见 1.5 小节)
- 6) 生成初始曲面  $S^{(0)}(u, v) = \sum_{g=0}^{l_u} \sum_{h=0}^{l_v} \mathbf{p}_{gh}^{(0)} B_{g,p}(u) B_{h,q}(v)$
- 7)  $k=0; m=0$
- 8) 计算数据点的最大法向差异量  $e_f^{(k)}$  和主特征点的最大法向调整差异量  $e_c^{(k)}$  (具体方法见 1.6 小节)
- 9) while 最大法向差异量  $e_f^{(k)}$  没有达到精度要求, 即  $e_f^{(k)} \geq \varepsilon_{\max}$  do
- 10) 计算第  $k$  个曲面  $S^{(k)}(u, v) = \sum_{g=0}^{l_u} \sum_{h=0}^{l_v} \mathbf{p}_{gh}^{(k)} B_{g,p}(u) B_{h,q}(v)$  上与数据点  $\mathbf{p}_{gh}^{(k)}$  相对应的法向控制的参数值  $(u_i^{(k)}, v_j^{(k)})$  和法向调整差异向量  $\Omega_{gh}^{(k)}$  (具体方法见 1.6 小节)
- 11) 调整控制顶点  $\mathbf{p}_{gh}^{(k+1)} = \mathbf{p}_{gh}^{(k)} + \Omega_{gh}^{(k)}$ , 生成第  $k+1$  个曲面  $S^{(k+1)}(u, v) = \sum_{g=0}^{l_u} \sum_{h=0}^{l_v} \mathbf{p}_{gh}^{(k+1)} B_{g,p}(u) B_{h,q}(v)$  的控制顶点  $\mathbf{p}_{gh}^{(k+1)}$   
 计算数据点到第  $k+1$  个曲面  $S^{(k+1)}(u, v)$  的数据点的最大法向差异量  $e_f^{(k+1)}$  和主特征点最大法向调整差异量  $e_c^{(k+1)}$ .
- 12) if (  $m \geq m_0$  and  $e_f^{(k)} \geq \varepsilon_{\max}$  ) or (  $m < m_0$  and  $e_c^{(k+1)} > e_c^{(k)}$  ) then  
 $m=0$ ;  
 插入新的节点列, 重新分割对应的序号组 (具体方法见 1.7 小节)
- 13) end if
- 14)  $k=k+1; m=m+1$

15) end while

下面各小节具体阐述各个步骤.

### 1.2 数据点的参数化

首先对每一列数据点  $\{p_{0j}, p_{1j}, \dots, p_{mj}\}, j=0, 1, \dots, n$  通过累加弦长法进行参数化, 生成了一组参数序列,  $\{u_{0j}, u_{1j}, \dots, u_{mj}\}, j=0, 1, \dots, n$ , 接下来对每一行的参数计算平均值:  $u_i = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n u_{ij}, i=0, 1, \dots, m$ , 生成了行参数序列:  $\{u_0, u_1, \dots, u_m\}$ , 类似的, 我们可以生成列参数序列:  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ , 那么每个数据点  $p_{ij}$  对应的参数值为:  $\{u_i, v_j\}, i=0, 1, \dots, m, j=0, 1, \dots, n$ .

### 1.3 离散数据点法矢的计算

对于由  $(m+1) \times (n+1)$  个数据点组成的阵列  $\{p_{ij}; i=0, 1, \dots, m, j=0, 1, \dots, n\}$ , 本文按如下方法求每个数据点的法矢: 先求每行数据点  $\{p_{i0}, p_{i1}, \dots, p_{in}\}$ , 其中  $i=0, 1, \dots, m$  的切矢  $\{q_{i0}^{(r)}, q_{i1}^{(r)}, \dots, q_{in}^{(r)}\}, i=0, 1, \dots, m$ , 再求每列数据点  $\{p_{0j}, p_{1j}, \dots, p_{mj}\}, j=0, 1, \dots, n$  的切矢  $\{q_{0j}^{(c)}, q_{1j}^{(c)}, \dots, q_{mj}^{(c)}\}, j=0, 1, \dots, n$ , 这样每个数据点  $p_{ij}$  有两个分别对应行列方向上的切矢  $(q_{ij}^{(r)}, q_{ij}^{(c)})$ . 接下来构造每个数据点  $p_{ij}$  的单位法矢  $n_{ij} = \frac{q_{ij}^{(r)} \times q_{ij}^{(c)}}{|q_{ij}^{(r)}| \cdot |q_{ij}^{(c)}|}$ , 从而得到所有数据点的单位法矢  $\{n_{ij}; i=0, 1, \dots, m, j=0, 1, \dots, n\}$ .

以上求法矢方法中需要数据点列的切矢, 本文采用如下方法求数据点列的切矢: 构造插值三个相邻数据点的二次 Beziér 曲线来求一个离散数据点列的切矢. 即对于一个数据点列  $\{p_j; j=0, 1, \dots, n\}$  的每个数据点  $p_j$ , 构造插值三个相邻数据点  $p_{j-1}, p_j, p_{j+1}$  的二次 Beziér 曲线, 计算该曲线在  $p_j$  处的切矢作为数据点  $\{p_j; j=0, 1, \dots, n\}$  的离散切矢.

### 1.4 数据点的分组及主特征点的选取

本节给出数据点分组以及主特征点选取的方法, 主要思想: 先求出数据点  $\{p_{ij}; i=0, 1, \dots, m, j=0, 1, \dots, n\}$  的行曲率和列曲率, 然后根据曲率序列生成分组标记, 将数据点分成  $(l_u+1) \times (l_v+1)$  组. 由于曲率能够很好地反映曲面几何特征, 分组过程中主要考虑曲率这个量, 利用数据点列曲率的平均值进行分组, 使得主特征点作为控制顶点拟合出来的 B 样条曲面能  $G_{gh}$  较好地反映这组数据点的基本特征. 然后在各个组中, 将局部曲率的极大值点作为主特征点.

本节采用文献[6]中提到的方法来计算一个数据点

列  $\{p_j; j=0, 1, \dots, n\}$  的离散曲率:

$$k_j = \frac{\|\Delta p_j \times \Delta^2 p_j\|}{\|\Delta p_j\|^3}, j=1, 2, \dots, n-1, \quad (1)$$

其中  $\Delta p_j$  和  $\Delta^2 p_j$  分别表示在点  $p_j$  处的向前一阶差分和二阶差分, 这样就生成了一个离散的曲率序列  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}\}$ .

下面是分组步骤. 首先沿着行来计算每一个数据点  $p_{ij}$  的曲率, 即利用式(1)对于每个数据点计算行方向上的离散曲率  $k_{ij}^{(r)}$ , 接下来再利用式(1)计算每个数据点列方向上的离散曲率  $k_{ij}^{(c)}$ . 最终我们得到每个数据点  $p_{ij}$  的离散曲率如下:

$$k_{ij} = k_{ij}^{(r)} + k_{ij}^{(c)}, i=0, 1, \dots, m, j=0, 1, \dots, n,$$

接下来生成行曲率序列和列曲率序列, 先对每一行数据点的离散曲率进行求和,  $k_i^{(r)} = \sum_{j=0}^n k_{ij}^{(r)}, i=0, 1, \dots, m$ ,

生成一个行曲率序列:  $k_{row} = \{k_0^{(r)}, k_1^{(r)}, \dots, k_m^{(r)}\}$ ,

选取  $k_{row}$  中的第一个元素和最后一个元素以及所有局部极大值点和部分值为 0 的点, 即满足以下条件的点:

$$k_{i-1}^{(r)} < k_i^{(r)}, k_{i+1}^{(r)} < k_i^{(r)}, i=1, \dots, m-1 \quad (2)$$

$$\text{或者 } k_i^{(r)}=0, k_{i-1}^{(r)} \text{ 和 } k_{i+1}^{(r)} \text{ 不同时为 } 0 \quad (3)$$

满足 (2) 和 (3) 式的行曲率子序列记为  $\{k_{i_1}^{(r)}, k_{i_2}^{(r)}, \dots, k_{i_{l_u}}^{(r)}\}$ , 其所对应的参数值为  $\{u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{l_u}}\}$ ,

令  $u_{i_0} = u_0, u_{i_{l_u}} = u_m$ , 于是得到一个行参数子序列

$\{u_{i_0}, u_{i_1}, \dots, u_{i_{l_u}}\}$ . 构造标记  $f_g^{(u)} = \frac{u_{i_{g-1}} + u_{i_g}}{2}, g=1, 2, \dots, l_u$ , 规定  $f_0^{(u)} = u_{i_0}, f_{l_u+1}^{(u)} = u_m$ .

这样就生成行标记序列  $F_{row} = \{f_g^{(u)}, g=0, 1, \dots, l_u+1\}$ . 类似地生成列标记序列  $F_{col} = \{f_h^{(v)}, h=0, 1, \dots, l_v+1\}$ .

最后根据行标记序列  $F_{row}$  和行标记序列  $F_{col}$  对数据点进行分组, 所有参数值满足  $f_g^{(u)} \leq u_i < f_{g+1}^{(u)}$  (当  $g=l_u$  时, 不等式取  $f_{l_u}^{(u)} \leq u_i \leq f_{l_u+1}^{(u)}$ ) 和  $f_h^{(v)} \leq v_j < f_{h+1}^{(v)}$  (当  $h=l_v$  时, 不等式取  $f_{l_v}^{(v)} \leq v_j \leq f_{l_v+1}^{(v)}$ ) 条件的数据点被分到组  $G_{gh}$  中, 这样就把所有数据点分成了  $(l_u+1) \times (l_v+1)$  组.

在每一组  $G_{gh}: g=0, 1, \dots, l_u, h=0, 1, \dots, l_v$  中选出一个主特征点作为初始控制顶点, 所选的主特征点  $p_{i_g, h}$  是  $G_{gh}$  中离散曲率最大的数据点. 若在同一组中有多个曲率极值点, 这时候先求出这组数据点中心  $p_{g_0, h_0}$ , 并将离中心位置最近的曲率极值点作为主特征点.

这样就得到  $(l_u+1) \times (l_v+1)$  个主特征点  $\{p_{g,h}, g=0,1,\dots,l_u, h=0,1,\dots,l_v\}$ ,  $l < m$ ,  $l_v < n$ , 并将它们作为 B 样条初始曲面的控制顶点:

$$\{p_{gh}^{(0)} = p_{g,h}, g=0,1,\dots,l_u, h=0,1,\dots,l_v\}.$$

### 1.5 节点向量的构造

初始 B 样条曲面的控制顶点对应的  $u$  参数序列和  $v$  参数序列分别为:

$$u_{i_0} = u_0, u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_{l_u-1}}, u_{i_{l_u}} = u_m,$$

$$v_{j_0} = v_0, v_{j_1}, v_{j_2}, \dots, v_{j_{l_v-1}}, v_{j_{l_v}} = v_n.$$

根据以上两个参数序列, 采用平均技术法构造  $p \times q$  次初始 B 样条曲面的节点向量如下:

$$\bar{u}_0 = \bar{u}_1 = \dots = \bar{u}_p = u_0$$

$$\bar{u}_{l_u+1} = \bar{u}_{l_u+2} = \dots = \bar{u}_{l_u+p+1} = u_m$$

$$\bar{u}_{k_u+p} = \frac{1}{p} \sum_{k=k_u}^{k_u+p-1} u_{i_k}, k_u = 1, 2, \dots, l_u - p$$

$$\bar{v}_0 = \bar{v}_1 = \dots = \bar{v}_q = v_0$$

$$\bar{v}_{l_v+1} = \bar{v}_{l_v+2} = \dots = \bar{v}_{l_v+p+1} = v_n$$

### 1.6 法向差异向量的构造

标准的 B 样条曲面拟合的 PIA 方法中, 只是将控制顶点沿着数据点参数误差向量方向作调整, 即每个数据点固定一对参数值, 则曲面上有对应这个参数值的点, 每次迭代过程中, 数据点与曲面上所对应的点之间的差异向量称为参数误差向量  $e_{ij}^{(k)}$  [6].

为了进一步直观地控制 B 样条逼近曲面的形状, 可充分利用数据点的切矢、曲率, 法矢等几何特征作为约束条件. 本文引入一个新的量  $\delta_{ij}^{(k)}$ , 称为法向差异向量(见定义 2)来控制迭代过程中控制顶点的调整.

定义 1. 设数据点  $p_{ij}$  的法矢为  $n_{ij}$  迭代生成的第  $k$  个 B 样条曲面为  $S^{(k)}(u, v)$ , 在 B 样条曲面  $S^{(k)}(u, v)$  上满足  $S_u^{(k)}(u_i^{(k)}, v_j^{(k)}) \times S_v^{(k)}(u_i^{(k)}, v_j^{(k)})$  与  $n_{ij}$  共线的点  $S^{(k)}(u_i^{(k)}, v_j^{(k)})$  称为数据点  $p_{ij}$  在 B 样条曲面  $S^{(k)}(u, v)$  上的法向投影点.

定义 2. 设数据点  $p_{ij}$  在第  $k$  个 B 样条曲面  $S^{(k)}(u, v)$  上的法向投影点为  $S^{(k)}(u_i^{(k)}, v_j^{(k)})$ , 令  $\delta_{ij}^{(k)} = p_{ij} - S^{(k)}(u_i^{(k)}, v_j^{(k)})$ , 称  $\delta_{ij}^{(k)}$  为数据点  $p_{ij}$  在第  $k$  个曲面  $S^{(k)}(u, v)$  上所对应的法向差异向量.

法向差异向量的几何意义参见图 1, 其中  $S^{(k)}(u_i^{(k)}, v_j^{(k)})$  表示数据点  $p_{ij}$  在 B 样条曲面  $S^{(k)}(u, v)$  的法向投影点,  $n_{ij}$  表示数据点  $p_{ij}$  的法矢,  $\delta_{ij}^{(k)} = p_{ij} - S^{(k)}(u_i^{(k)}, v_j^{(k)})$  表示法向差异向量,  $S_u^{(k)}(u_i^{(k)}, v_j^{(k)}) \times S_v^{(k)}(u_i^{(k)}, v_j^{(k)})$  与  $n_{ij}$  共线.

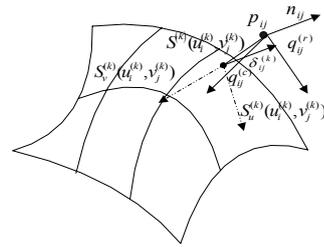


图 1 法向差异向量  $\delta_{ij}^{(k)}$

法向差异向量  $\delta_{ij}^{(k)}$  既考虑了数据点的参数差异向量  $e_{ij}^{(k)}$ , 又考虑了数据点  $p_{ij}$  的法矢  $n_{ij}$ , 将数据点的法矢这个几何特征引入到调整量中, 在迭代过程中, 若数据点在曲面上的法矢差异向量越来越小, 则迭代曲面就会逼近数据点及其法矢. 由于法矢能够很好地反映曲面的几何特征, 因此可用法矢控制逼近曲面的形状, 保证所构造出来的曲面不会出现太多的褶皱, 使得曲面有更好的逼近效果. 对应数据点组  $G_{gh}$  的控制顶点  $p_{gh}^{(k)}, g=1, 2, \dots, l_u, h=1, 2, \dots, l_v$  的法向调整差异向量  $\Omega_{gh}^{(k)}$  构造如下:

$$\Omega_{gh}^{(k)} = \frac{\sum_{(i,j) \in I_{gh}} \delta_{ij}^{(k)}}{|I_{gh}|}, g=0,1,\dots,l_u, h=0,1,\dots,l_v,$$

其中  $|I_{gh}|$  是数据点组  $G_{gh}$  的数据点序号集合  $I_{gh}$  的势. 由于法向调整差异向量  $\Omega_{gh}^{(k)}$  是一组数据点的法向差异向量的平均量, 本文用法向调整差异向量作为控制顶点的调整差异向量, 以期能较好地控制迭代曲面对一组数据点的逼近.

为了方便分析本文算法并将实验结果与已有的 PIA 方法进行比较, 下面统一规定以下几个量:

无法矢控制下数据点的参数差异向量

$$e_{ij}^{(k)} = p_{ij} - S^{(k)}(u_i, v_j), i=0,1,\dots,m, j=0,1,\dots,n;$$

无法矢约束的数据点的最大差异量为

$$e_d^{(k)} = \max\{\|e_{ij}^{(k)}\|, i=0,1,\dots,m, j=0,1,\dots,n\};$$

无法矢约束的主特征点的调整差异向量为

$$\bar{\Omega}_{gh}^{(k)} = \frac{\sum_{(i,j) \in I_{gh}} e_{ij}^{(k)}}{|I_{gh}|};$$

数据点的最大法向差异量为

$$e_f^{(k)} = \max\{\|\delta_{ij}^{(k)}\|, i=0,1,\dots,m, j=0,1,\dots,n\};$$

主特征点最大的法向调整差异量为

$$e_c^{(k)} = \max\{\|\Omega_{gh}^{(k)}\|, g=0,1,\dots,l_u, h=0,1,\dots,l_v\}.$$

### 1.7 节点向量的插入

本文提出的基于法矢控制的 PIA 方法, 从较少的控制顶点开始, 拟合出 B 样条曲面, 然后检查数据点与曲面之间的误差, 如果数据点的最大法向差异量满足  $e_f^{(k)} < \epsilon_{\max}$ , 其中  $\epsilon_{\max}$  为预先设定的拟合误差阈值, 则说明所得的 B 样条曲面已经达到逼近的误差精度, 如果数据点的最大法向差异量  $e_f^{(k)} \geq \epsilon_{\max}$ , 说明存在某些组还没达到精度要求, 则需要在相应组中插入节点, 增加控制顶点.

在迭代过程中, 遇到以下两种情况, 需要增加节点向量:

1) 当迭代次数  $m$  大于预设的迭代次数  $m_0$ , 即  $m < m_0$  时, 如果数据点的最大法向差异向量  $e_f^{(k)}$  大于预设的阈值  $\epsilon_{\max}$ , 说明没有达到逼近精度要求. 这时候需要检验每个组  $G_{gh}$  中每个数据点的法向差异向量  $\{\delta_{ij}^{(k)}; ij \in I_{gh}\}$ , 如果  $G_{gh}$  出现某个数据点法向差异量  $\|\delta_{ij}^{(k)}\| > \epsilon_{\max}$ , 则将该组中法向差异量最大的一个数据点  $p_{ij}$  对应的参数值  $(u_i, v_j)$  插入到原来的行节点向量和列节点向量中, 利用 B 样条曲面的节点插入算法, 如伯姆算法<sup>[10]</sup>向曲面  $S^{(k)}(u, v)$  插入节点  $u_i, v_j$ , 使得曲面  $S^{(k)}(u, v)$  增加一行一列控制顶点, 同时相应添加主特征点并分割相应的数据点组.

2) 若迭代次数  $m$  虽然小于预设的迭代次数  $m_0$ , 即  $m < m_0$ , 但是主特征点当前的最大法向调整差异量  $e_c^{(k+1)}$  大于上一次的  $e_c^{(k)}$ , 则必须检验  $\{G_{gh}; g = 0, 1, \dots, l_u, h = 0, 1, \dots, l_v\}$  中  $\|\Omega_{ij}^{(k)}\|$  的值, 在  $\|\Omega_{ij}^{(k+1)}\| > \|\Omega_{ij}^{(k)}\|$  所对应的  $G_{gh}$  组中找出使得法向差异量  $\|\delta_{ij}^{(k)}\| > \epsilon_{\max}$  的差异量最大的对应数据点  $p_{ij}$ , 则将该数据点  $p_{ij}$  对应的参数值  $u_i, v_j$  插入到原来的行节点向量和列节点向量中, 利用 B 样条曲线的节点插入算法, 如伯姆算法<sup>[8]</sup>向曲面  $S^{(k)}(u, v)$  中插入节点  $u_i, v_j$ , 使得曲面  $S^{(k)}(u, v)$  增加一行一列控制顶点, 同时相应添加主特征点, 并分割相应的数据点组.

## 2 实验分析

为了便于实验结果分析, 以下把本文提出的基于法矢控制的 B 样条曲面逼近的 PIA 方法记为 NPIA 方法. 这一节对于 NPIA 方法给出实验分析, 并将 NPIA 算法与无法矢控制的 B 样条曲面逼近的 PIA 方法的实验结果进行比较. 相比于无法矢控制的 B 样条曲面逼近的 PIA 方法, 本文的 NPIA 方法将数据点的法矢这

个几何特征引入到控制顶点的调整量中, 在迭代过程中, 若法向差异向量越来越小, 则迭代曲面就越来越逼近数据点及其法矢, 这样就可用法矢来控制逼近曲面的形状, 使得曲面具有更好的逼近效果.

例 1. 取一个自由曲面上的  $31 \times 31$  个数据点, 并首先从中选取  $11 \times 8$  个数据点作为主特征点, 分别运用 B 样条曲面的 PIA 方法与运用本文提出 NPIA 方法来逼近数据点. 实验结果见图 2、图 3. 图中蓝色的小圆圈表示待拟合的数据点, 黑色的点表示从数据点中选出的主特征点. 由图 2, 图 3 可知, 相比于 B 样条曲面逼近的 PIA 算法, 运用 NPIA 算法所得的 B 样条曲面更光滑, 褶皱更少, 整体的逼近效果更好. 随着迭代次数的增加, 自由曲面的褶皱逐渐地减少. 从表 1 也可以看出, 随着迭代次数的增加, 逼近误差逐渐减小, B 样条曲面逼近的 NPIA 算法相比于 B 样条曲面逼近的 PIA 算法的逼近误差更小.

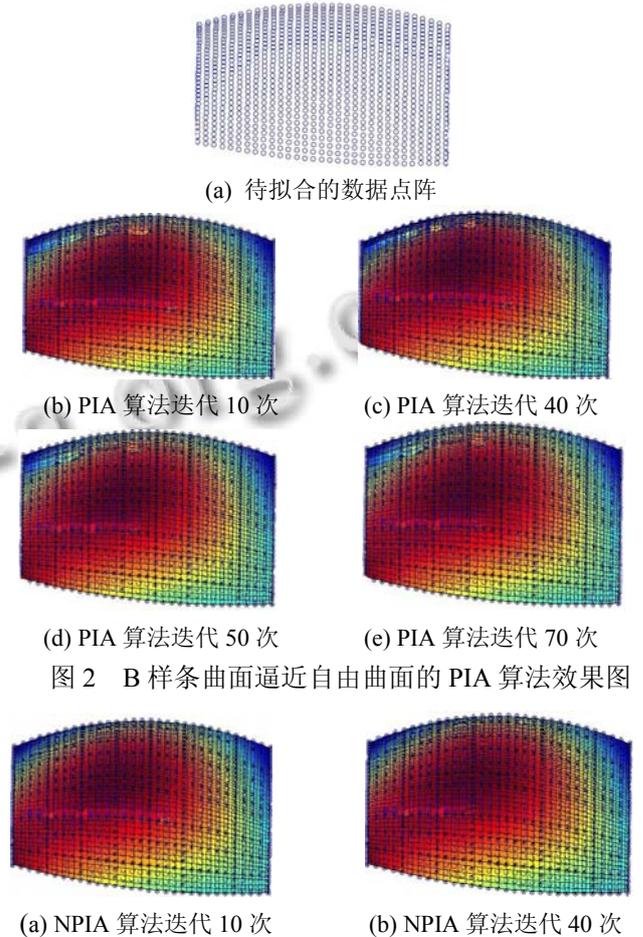
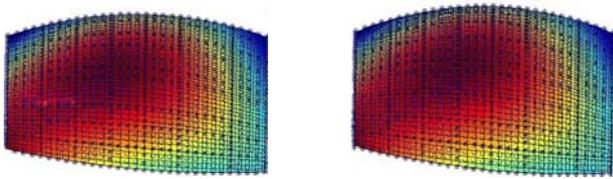


图 2 B 样条曲面逼近自由曲面的 PIA 算法效果图



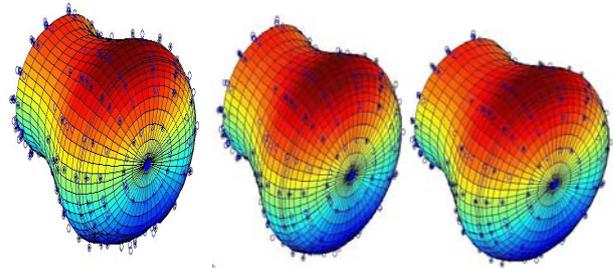
(c) NPPIA 算法迭代 50 次 (d) NPPIA 算法迭代 70 次

图 3 B 样条曲面逼近自由曲面的 NPPIA 算法效果图

表 1 B 样条曲面逼近的 NPPIA 算法与 PIA 算法逼近误差分析比较

迭代次数	10 次	40 次	50 次	70 次
方法误差				
PIA 算法数据点最大差异量 $e_d^{(k)}$	0.5026	0.2586	0.1086	4.6388e-002
NPPIA 算法数据点最大差异量 $e_f^{(k)}$	0.4098	0.1897	0.0924	6.7919e-003

例 2. 取一个罐子表面上的  $17 \times 27$  个数据点, 并首先从中选取  $7 \times 6$  个数据点作为主特征点, 运用 B 样条曲面逼近的 PIA 方法逼近与 B 样条曲面逼近的 NPPIA 方法来逼近数据点. 实验结果见图 4: 由图 4 可知, 相比于 B 样条曲面逼近的 PIA 算法, 运用 NPPIA 算法所得的 B 样条曲面更光滑. 特别是在数据点分布较密集的地方, 运用 B 样条曲面逼近的 PIA 算法, 曲面会出现明显的褶皱现象, 如图 4 中的 b、c 和 d 罐子上身的底部, 而且在罐子的开口的表面上会出现轻微的扭曲, 而运用本文提出的 NPPIA 算法, 从图 4 中的 e、f 和 g 这 3 张图可以看出, 曲面的光顺性较好, 只是在 e 图中出现轻微的褶皱, 整体逼近效果更好. 随着迭代次数的增加, 罐子表面的褶皱逐渐地减少, B 样条曲面逼近的 NPPIA 算法相比于 B 样条曲面逼近的 PIA 算法的逼近误差更小.



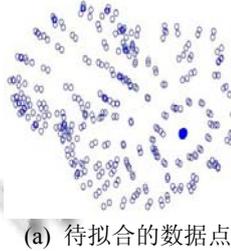
NPPIA 算法

(e) 迭代 20 次 (f) 迭代 50 次 (g) 迭代 70 次

图 4 罐子表面在 B 样条曲面逼近的 PIA 算法效果图

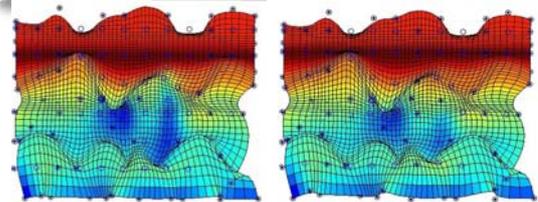
以及 B 样条曲面逼近的 NPPIA 算法效果图

例 3. 取一个自由曲面表面上的  $12 \times 12$  个数据点, 并首先从中选取不同个数的数据点作为主特征点, 分别运用 B 样条曲面逼近的 PIA 方法和本文提出的 B 样条曲面逼近的 NPPIA 方法来逼近数据点, 迭代 40 次后的实验结果见图 5, 图 6. 从横向上看, 由图(b)-(e)可知, 随着主特征点数目的增加, 面具出现褶皱的情况也逐渐减少, 特别是在曲面波动较大的地方. 曲面也越来越光滑, 逼近效果逐渐变好. 由表 2 也可以看出随着主特征点数目的增加, 逼近误差逐渐减小. 通过图 5, 图 6 这两组图的比较, 可以知道运用相同个数的主特征点迭代 40 次后, B 样条曲面逼近的 NPPIA 方法比 PIA 方法的逼近效果更好, 出现的褶皱也越少, 光顺性也较好. 由表二的纵向上看, 也可以知道, 在相同的主特征点下 NPPIA 方法比 PIA 方法的逼近误差会更小.



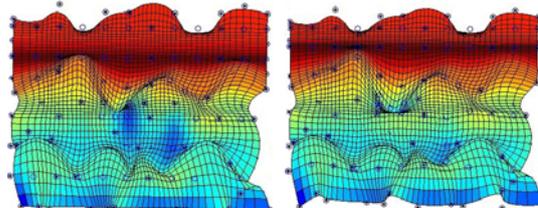
(a) 待拟合的数据点

(a) 待拟合的数据点



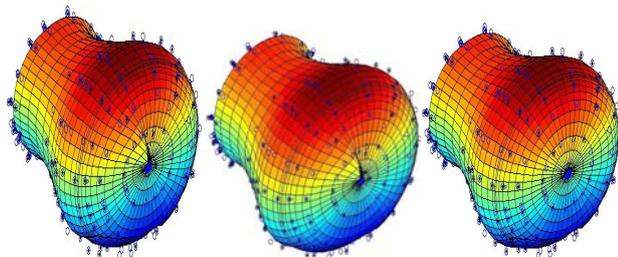
(b) PIA 算法 4x5 个

(c) PIA 算法 5x5 个



(d) PIA 算法 5x6 个

(e) PIA 算法 6x6 个



PIA 算法

(b) 迭代 20 次

(c) 迭代 50 次

(d) 迭代 70 次

图 5 自由曲面表面在不同个数的控制顶点下运用 B 样条曲面逼近的 PIA 算法迭代 40 次后的效果图

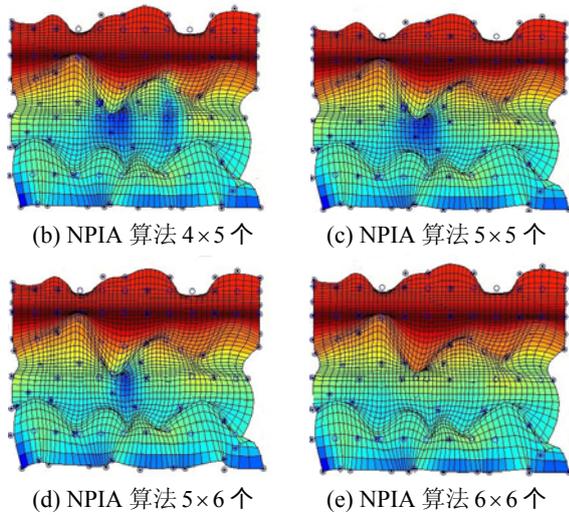


图 6 面具表面在不同个数的控制顶点下运用 B 样条曲面逼近的 NPIA 算法迭代 40 次后的效果图

表 2 B 样条曲面逼近的 NPIA 算法与 PIA 算法逼近误差分析比较

方法误差 \ 控制顶点	4×5	5×5	5×6	6×6
PIA 算法数据点最大差异量 $e_d^{(k)}$	0.8190	0.5856	0.3961	0.2533
NPIA 算法数据点最大差异量 $e_f^{(k)}$	0.4231	0.2902	0.1577	0.0913

### 3 结论

本文给出了一种基于法矢控制的选取主特征点的 B 样条曲面逼近数据点的 PIA 方法. 该方法考虑到 B 样条逼近曲面形状与离散数据点的切矢、法矢、曲率等几何特征之间有着密切的联系, 增加了法矢这个约束条件, 控制逼近曲面的形状, 消除逼近曲面的一些不必要的扭动现象, 相比于只考虑数据点的参数误差量的 PIA 迭代逼近方法, 逼近曲面的光顺性更好. 另一方面由于本文方法把曲率的局部极大值点作为主特征点, 并将这些主特征点作为初始控制顶点, 这样在拟合过程中控制顶点的数目就会远小于给定的数据点数目, 允许进行数据点量较大的曲面拟合. 该算法在每次迭代过程中的各个步骤都是各自完全独立的, 可进行并行计算. 本文中的实验例子也验证了该方法的有效性和实用性.

### 参考文献

1 Rogers DF, Fog NG. Constrained B-spline curve and surface fitting. Computer-Aided Design, 1989, 21(10): 641-648.

2 Pigl LA. surface approximation to scanned data. The Visual Computer, 2000, (7): 386-395.

3 Meek DS, Walton DJ. On surface normal and Gaussian curvature approximations given data sampled from a smooth surface. Computer-Aided Design, 2000, 17: 521-543.

4 Dey TK, Sun J. Normal and feature Approximation from Noisy Point Clouds[Technical Report]. OSU-CISRC-4-05-TR26(2005). 2005.

5 Lin HW, Wang GJ, Dong CS. Constructing iterative non-uniform B-spline curve and surface to fit data points. Science in China Series F: information Sciences, 2004, 47(3): 315-331.

6 Lin H, Zhang Z. An extended iterative format for the progressive-iteration approximation. Computers & Graphics, 2011, 35: 967-975.

7 Kineri YK, Wang MS, Lin HW, Maekawa T. B-spline surface fitting by iterative geometric interpolation/approximation algorithms. Computer-Aided Design, 2012, 44(7): 697-708.

8 Deng CY, Lin HW. Progressive and iterative approximation for least squares B-spline curve and surface fitting. Computer-Aided Design, 2014, 47: 32-44.

9 Gofuku S, Shigefumi T, Takashi M. Point-tangent/point-normal B-spline curve interpolation by geometric algorithms. Computer-Aided Design, 2009, 41(6): 412-422.

10 施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1994.

11 Carnicer JM, Delgado J, Pena JM. Progressive-iteration approximation and geometric algorithm. Computer-Aided Design, 2012, 44(2): 143-153.

12 Piegl L, Tiller W. The NURBS Book. Springer-Verlag, 1997.

13 Yu TH. An algorithm for accurately estimating the normal and curvature of scattered points cloud. Machinery Design & Manufacture, 2005, 12(2): 169-223.

14 Park H. B-spline surface fitting based on adaptive knot placement using dominant columns. Computer-Aided Design, 2011, 23(11): 223-237.

15 Park H, Lee JH. B-spline curve fitting based on adaptive curve refinement using dominant points. Computer-Aided Design, 2007, 39(6): 439-451.