

# 高校学分制环境下排考问题的改进图算法<sup>①</sup>

崔 丽

(对外经济贸易大学 教务处, 北京 100029)

**摘 要:** 本文利用图论模型的转化, 改进传统贪心算法, 设计了一种新的求解高校排考问题的图算法. 改进后的算法可以更好应对在现实学分制环境下, 跨年级、跨专业、主辅修等复杂的选课因素. 为了解决传统算法中仅靠人工优化来实现的软约束目标, 改进后的图算法首先将排考图着色模型, 转化为无向赋权图的分团覆盖模型, 通过深度优先策略和赋权机制, 求解同时满足排考硬约束条件和软约束条件的排考方案. 经过数据验证, 改进算法的排考效果, 在排考效果上优于传统贪心算法, 在时间效率上优于人工排考方式. 改进后的新算法在近年我校的期末考务工作中发挥了一定作用.

**关键词:** 学分制; 高校排考; 图算法; 图着色; 分团覆盖

## Improved Graph-Based Algorithm for the University Examination Timetabling Problem

CUI Li

(Academic Division, University of International Business and Economics, Beijing 100029, China)

**Abstract:** A graph-based algorithm is developed in this paper to solve the university examination timetabling problem, by transforming the classical graph model and improving the greedy algorithm. The improved algorithm can be used to meet more complicated constrain conditions in the real university credit environment, such as cross-major, trans-grade, minor-study and so on. The algorithm aims to solve the soft-constrain objects, which are achieved by manual optimizing in the most tradition researches and cases. Firstly, the algorithm is discussed to transfer the classical graph coloring model into a clique cover problem of a weighted undirected graph. Then the greedy algorithm is improved by the deep-first strategy, to search the solutions which satisfies both the hard-constrains and soft-constrains. The improved algorithm is proved to be better than the greedy algorithm for the solution is more reasonable, and better than the manual work for the time consumed is less. The improved algorithm can enhance the efficiency of the university timetabling, which is helpful to the academic management of our university in recent years.

**Key words:** credit system; university examination timetabling; graph-based algorithm; graph coloring; clique cover

排考问题是高校时间表组合优化问题之一, 已被证明是 NP 完全问题. 为了求解排考问题, 很多学者提出了很多相关模型和算法, 比如图着色模型<sup>[1-3]</sup>、贪心算法<sup>[4]</sup>、启发式算法<sup>[5,6]</sup>等. 这些方法为解决高校排考问题提供了思路, 但存在一些不足: 1)排考目标过于单一<sup>[7]</sup>, 不能针对复杂的限制因素, 综合实现多目标权衡; 2)启发算法下, 生成方案不符合硬约束条件, 产生大量非法解, 降低搜索效率<sup>[8,9]</sup>. 同时相比于以“教学班”为单位的传统模式<sup>[10]</sup>, 在学分制环境下, 学生个体选课的自主性、灵活度大幅提高<sup>[11]</sup>, 跨年级、跨专

业、主辅修等选课因素, 使排考问题的约束条件更加复杂<sup>[12-14]</sup>. 因此, 本文设计了高校学分制环境下排考的改进图算法, 力图通过图的重构和分解, 将排考问题的基本模型从图着色问题进行转化, 处理学分制环境下学生自由选课产生的大量排考数据.

## 1 问题描述

### 1.1 排考目标

排考场次是排考问题的一个重要概念, 即对课程集合、时间教室集合的组合划分, 是指某个特定时段

<sup>①</sup> 收稿时间:2014-07-08;收到修改稿时间:2014-08-15

发生的考试安排. 每个场次含有多门课程, 每门课程含有多个课堂, 每个课堂包含多名学生.

排考问题是保证同一学生在同一时间只能参加一门课考试的前提下, 用尽可能少的场次数, 安排所有课程考试. 设有  $n$  门课程,  $P_i$  表示第  $i$  门课程的考试人数,  $P_i \in \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ . 设有  $m$  名考生,  $C_i$  表示第  $i$  个考生的考试门数,  $C_i \in \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ . 设所有的考试被安排在  $s$  个场次完成. 问题的简化模型如下:

目标函数:  $z = \min s$

约束条件:

1)  $\sum_{i=1}^s x_{i,j} = C_i$ , 表示每个学生的考试只能被安排一次;

2)  $\sum_{i=1}^m y_{i,j} = P_i$ , 表示每个课程的学生只能被安排一次;

3)  $\sum_{i=1}^s z_{i,j} \leq 1$ , 表示一门课只能被安排一次;

其中,  $x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j}$  为 0-1 变量. 若  $x_{i,j} = 1$ , 表示第  $i$  个考生在第  $j$  个场次参加考试, 否则  $x_{i,j} = 0$ ; 若  $y_{i,j} = 1$ , 表示第  $i$  个考生参加第  $j$  门课程的考试, 否则  $y_{i,j} = 0$ ; 若  $z_{i,j} = 1$ , 表示第  $i$  门课程在第  $j$  个场次排考, 否则  $z_{i,j} = 0$ .

上式的目标函数表示, 排考目标为尽可能减少排考场次. 约束条件 1) 表示, 同一场次的同一个学生有且仅有一门课程考试; 约束条件 2) 表示, 每门课程的考生安排且仅安排一次考试; 约束条件 3) 表示, 一门课程的考试安排且仅安排在一个场次; 这三个约束条件称为排考问题的硬约束条件.

此外, 管理者致力于使排考方案尽量优化, 优化目标主要体现在以下几个方面, 即排考问题的软约束条件:

1) 场次数适度减少. 场次数减少可以缩短考务总体时间, 节省考务工作的人力、物力; 但受客观约束(如学生精力、考试场地等), 场次数不能无限减少.

2) 场次人数尽量均衡. 场次人数不能超过教室所能容纳上限. 因此, 不同场次间应尽量避免人数“高峰”的冲击. 只要满足场次人数均衡达到一定水平, 那么教室容量就不会成为求解的限制条件.

3) 学院监考任务尽量均衡. 一门课往往需要配备多名监考, 如果一个学院的考试过于密集, 需要短时间内抽调大量人手, 给学院工作带来压力.

4) 同特征的学生群体尽量集中. 学分制选课环境下, 学生有充分的选课自由度, 每个课堂可能存在不同年级、不同专业的学生. 考务工作应尽量将同一年级、学院的考生集中, 便于组织考务, 保证秩序.

在以往的研究中, 排考模型的目标较为单一, 仅力图实现场次数最少, 软约束条件大多通过人工优化来完成. 因此, 本文所研究的排考问题是课程集合找到一个合理划分(用场次代表), 使其在满足硬约束的条件下, 最大限度的满足软约束条件, 减少人工.

## 1.2 图论模型

在经典理论中, 排考问题可以被简化为图着色问题. 构造无向图  $G=(V, E)$ , 其中图  $G$  的顶点  $V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$  表示  $n$  门参与排考的课程. 如果存在边  $(V_i, V_j)$  属于图  $G$ , 则顶点  $V_i$  与  $V_j$  相邻, 表示至少一名学生同时选择了这两门课程, 即该两门课程不能被安排在同一时间考试. 图着色问题就是尽量使用较少的颜色(场次), 为图  $G$  中不相邻的点染同一种颜色. 求解图着色问题, 经典贪心算法的主要思想是优先选择度数较少的未着色点, 判断其可被染的颜色, 对该点染色并尽可能对其他未着色点染该色, 当没有点可以被染该种颜色时, 重新选择度数较少的未着色点, 重复上述过程, 直到所有点都被染色.

实际中, 大多数考务软件采用贪心算法. 贪心算法可以在很短时间内得到一个可行解, 能够降低考务工作者的工作量和复杂度. 然而贪心算法的结果缺乏对搜索方向和搜索过程的控制, 只能得到一个随机可行解. 对软约束目标的优化过程, 依赖于大量人工调整<sup>[15]</sup>. 因此, 本文改进了传统图算法, 通过图结构的转化和分解, 在满足硬约束条件下, 实现软约束目标的优化过程, 得到“相对满意”的可行解.

## 2 算法设计

### 2.1 图的转化

已知无向图  $G=(V, E)$ , 构造图  $\bar{G}=(V, K \setminus E)$ , 其中  $K$  是包含所有  $V$  的二元子集, 则图  $\bar{G}$  是图  $G$  的补图. 由图  $G$  构造其补图  $\bar{G}$  的示例, 见图 1. 设图  $H$  是图  $\bar{G}$  的导出子图, 若图  $H$  中所有顶点可被染成同一种颜色, 则根据图的性质可知, 图  $H$  必然是完全图(或团), 即图  $H$  中任意一对顶点之间都有边相连. 证明: 如果图  $H$  不是完全图, 不妨设  $\{V_i, V_j\} \in H$  且顶点  $V_i$  与  $V_j$  没有边相连, 则图  $G$

中存在边  $(V_i, V_j)$ ，使得  $(V_i, V_j) \in E$ ，且  $V_i$  与  $V_j$  染同一种颜色，与相邻顶点着不同颜色的假设矛盾。由上可得，图  $G$  的着色问题被转化为其补图  $\bar{G}$  的分团覆盖问题。

为了控制分团过程，图  $\bar{G}$  可构造边的权数  $W_{i,j}$  与顶点参数  $Q_i$ 。 $W_{i,j}$  由顶点  $V_i$  与  $V_j$  的属性计算得到，值  $W_{i,j}$  越高，则这两个顶点代表的课程安排在同一场次的优先级越高。 $Q_i$  表示顶点代表的课程规模， $Q_i$  值越大，则这个顶点代表的课程的上课人数越多。

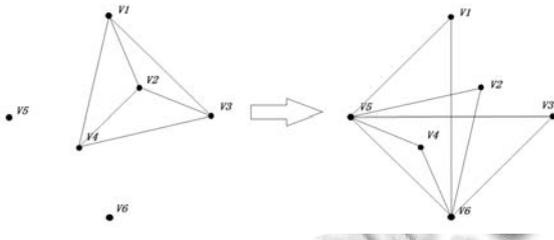


图 1 构造无向图  $G$  的补图  $\bar{G}$  示例

### 2.2 图的收缩和分解

本文提出的改进算法对图  $\bar{G} = (V, \bar{E}, W)$  有两个基本操作：收缩边和分解点。

(1) 若边  $(V_i, V_j)$  满足收缩条件，则执行收缩边操作，即  $\bar{G} \rightarrow \bar{G} \setminus (V_i, V_j)$ ，伪代码如下：

```

Excute  $\bar{G} \rightarrow \bar{G} \setminus (V_i, V_j)$ 
Generate new vertex  $V_{new}$ ,
Let  $Q_{new} = Q_i + Q_j$ ;
For  $u = 1$  to  $n$ ;
  if  $(V_u, V_i) \in \bar{G}$  and  $(V_u, V_j) \in \bar{G}$ ;
    Then gerate new edge  $(V_u, V_{new})$ ;
    Let  $W_{u,new} = \frac{W_{u,i} \times Q_i + W_{u,j} \times Q_j}{Q_{new}}$ ;
End
  
```

(2) 若点  $V_i$  满足分解条件，则执行分解点  $\bar{G} \rightarrow \bar{G} \setminus V_i$  操作，伪代码如下：

```

Excute  $\bar{G} \rightarrow \bar{G} \setminus V_i$ 
Let  $\bar{G} = \bar{G} \setminus V_i$ ;
For  $u = 1$  to  $n$ ;
  if  $(V_u, V_i) \in \bar{G}$ ;
    Let  $\bar{G} = \bar{G} \setminus (V_u, V_i)$ ;
End
  
```

### 2.3 改进算法

本文改进了分团覆盖的图算法，用于满足学分制

环境下排考的软约束限制，主要思想如下：已知无向赋权图  $\bar{G} = (V, \bar{E}, W)$ ，每次迭代过程从度数最小的点开始，将其相邻点按赋权值排序，优先与权值较高的点“合并”，即执行收缩边操作。对新产生的“合成点”计算相关参数，如果参数指标超出了可接受范围的最大阈值  $M$ ，则撤销“合并”动作，并顺位选择下一个相邻点，重复合并动作，直到“合成点”的参数指标达到了可接受的最小阈值  $m$  或相邻点全部不符合要求为止，将该“合成点”与图  $\bar{G}$  分解，一次迭代过程完成。重复执行迭代，直到图  $\bar{G}$  被完全分解。

改进的分团覆盖算法合并分解过程图示例，如图 2 所示。无向赋权图  $\bar{G}$  包含 6 个顶点和若干条边。第一次迭代找到度数为 2 的顶点  $V_1$ ，通过比较边  $\{V_1, V_5\}$  和  $\{V_1, V_6\}$  的权值，优先选择收缩边  $\{V_1, V_5\}$ ，即合并顶点  $V_1$  和  $V_5$ ；执行合并后，产生新的顶点  $V_7$ ，计算  $V_7$  的参数值，满足阈值上下限；同时根据合并顶点的规则，只有同时和  $V_1$ 、 $V_5$  相连的顶点，才能与新的顶点  $V_7$  相连，因此合并后的图  $\bar{G}$  仅含 4 条边；处理下一个与  $V_7$   $\{V_1, V_5\}$  相邻的权值较高的顶点  $V_6$ ，经过合并产生新顶点  $V_2$ ，此时合并点  $V_2$  的所有相邻点不符合继续合并的要求(无相邻点)，因此合并完成，将顶点  $V_2$  从图  $\bar{G}$  中标记并分解出去，一次迭代完成。继续下一轮迭代，直到迭代完成。图  $\bar{G}$  被分为了 4 个团，分别是  $\{V_1, V_5, V_6\}$ ， $\{V_2\}$ ， $\{V_3\}$  和  $\{V_4\}$ 。从实际问题考虑，可将孤点看作一类特殊的团，即全校性大规模的课，可以单独组织一场专场考试。

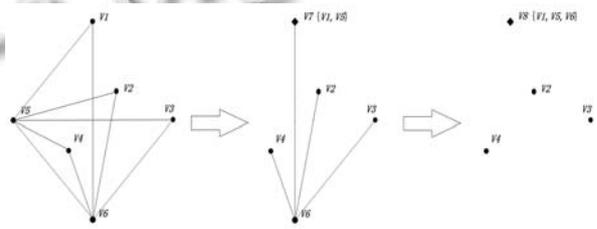


图 2 无向赋权图的合并分解过程示例

改进算法的伪代码如下，其算法流程如图 3 所示。

```

While  $\bar{G} \neq \Phi$ 
  Let  $d(V_i) = \min \{d(V_k) | V_k \in \bar{G}; k = 1, 2, \dots, n\}$ ;
  Initiate  $\Omega_1 = \Phi$ ;
  For  $j = 1$  to  $n$ ;
    Let  $W_{i,j} = \min \{W_{i,j} | W_{i,j} \in \bar{G}; V_i \notin \Omega_1\}$ ;
    Excute  $\bar{G} \rightarrow \bar{G} \setminus (V_i, V_j)$ ;
     $\Omega_1 = \Omega_1 \cup \{V_j\}$ ;
    if  $Q_{new} > M$ ;
      Undo  $\bar{G} \rightarrow \bar{G} \setminus (V_i, V_j)$ ;
    Elseif  $Q_{new} > m$ ;
      Excute  $\bar{G} \rightarrow \bar{G} \setminus V_{new}$ ;
      Output  $V_{new}$ ;
    End
  End
  
```

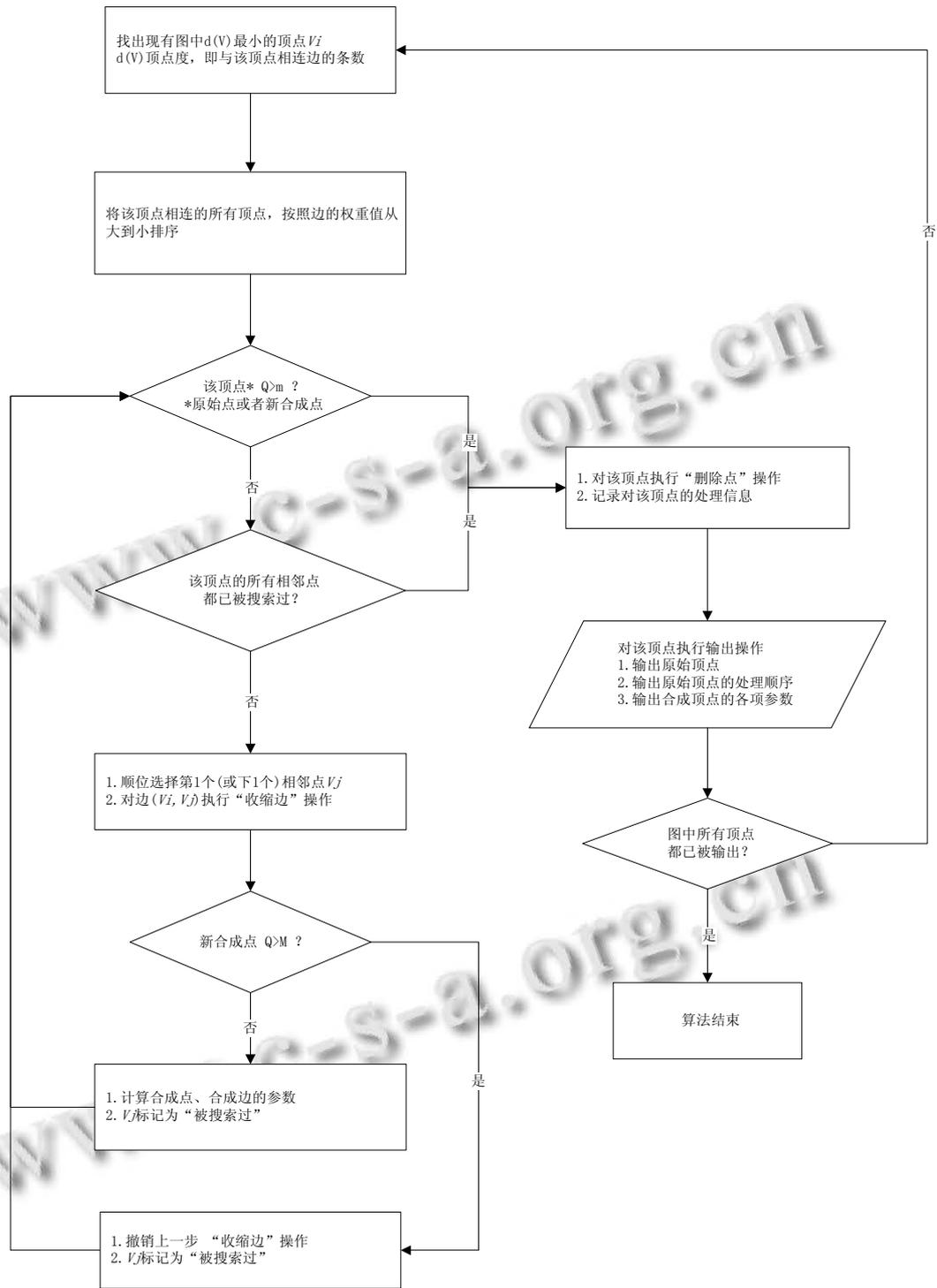


图 3 改进算法的流程

### 3 算法结果与评价

#### 3.1 数据预处理

本文采用了某高校 2013-2014 学年第一学期的排考数据进行实验, 数据基本信息如表 1 所示。

表 1 实验数据基本信息

课程门数	课堂总数	排考人次	开课学院数量	学生年级数量	学生专业数量
200	692	37625	12	4	87

第一步, 构造图结构. 对所有课程的考生进行对比, 对存在至少一名以上的相同考生的两课程进行标记, 可以得到课程对集合  $\Omega$ , 5763 个课程对. 将所有课程的卡笛尔积集合视为全集, 则得到  $\bar{\Omega}$ , 14137 个课程对.

第二步, 计算边权值. 对于  $\bar{\Omega}$  的每个课程对, 判断其开课学院, 相同则其判定系数  $Y_1$  为 1, 否则为 0; 判断该课程对两门课程所含学生的年级和学院, 其相似系数分为  $\cos \theta_2$  和  $\cos \theta_3$ ; 则相应课程对的综合权值计算公式如下:

$$W = Y_1 \times P_1 + \cos \theta_2 \times P_2 + \cos \theta_3 \times P_3$$

其中,  $P_1$ 、 $P_2$  和  $P_3$  分别是三个系数对应的控制参数, 通过控制参数的调整, 可以控制三个因素在综合边权值中的影响程度.

### 3.2 实验结果

从综合评价指标来衡量和比较, 改进算法的排考效果如表 2 所示. 表 2 设计评价指标说明如下:

(1) 场次数 Size. 本文采用的案例, 考务阶段总场次数上限为 40. 生成的方案略少于 40 较为理想.

(2) 场次数 MaxStu. 场次数不应当出现较大波动. 本案例涉及的场次数上限为 2500.

(3) 按场次的考生人数变异系数 CovStu. 体现了场次数人数的均衡水平. 变异系数越小, 场次数越均衡, 排考效果越好.

(4) 按场次的学院监考人数变异系数 CovCol. 体现了学院监考人数的均衡水平. 变异系数越小, 排考效果越好.

(5) 基于考生年级的场次聚类效果指标 F 值 Class\_NJ, 统计方法见参考文献[16]. 指标值越高, 表示学生按所属年级的聚集程度越高, 排考效果越好.

(6) 基于考生学院的场次聚类效果指标 F 值 Class\_XY, 统计方法同上. 指标值越高, 表示学生考试按照所在学院的聚集程度越高, 排考效果越好.

(7) 花费时间 Time. 该指标表示采用某种方法得到一套方案所花费的时间成本.

表 2 不同方法的排考效果比较

	Size	Max Stu	Cov Stu	Cov Col	Class_NJ	Class_XY	Time
人工排考	38	2382	0.5734	0.7622	0.1685	0.1764	2-3 天
贪心算法	37	2971	0.7244	0.8330	0.1832	0.1835	毫秒级
改进算法	39	2329	0.5796	0.7266	0.1664	0.1966	毫秒级

从表 2 可以得到, 改进后的算法排考方案, 在多

项指标上要优于传统贪心算法, 接近人工排考的效果, 同时改进算法花费的时间要远远少于人工排考的方法.

### 3.3 算法评价

改进的图算法中适度深度优先策略和赋权机制, 保证了其解方案要优于传统的贪心算法.

“合并点”的参数为所包含顶点对应课程的人数总和, 可接受的参数范围是指场次人数的上下限. 通过“合并点”的参数阈值来控制所包含顶点的个数, 可以间接控制“合并点”的生成个数, 即适度的深度优先策略, 来达到控制合理的场次数以及场次规模的目的, 从而尽量满足软约束条件 1、2, 带来全局改进.

边的赋权值描述了端点代表的课程的属性、授课对象的相似程度, 相比合并其他权值较低的相邻点, 合并这权值较高的端点满足软约束条件 3、4 的程度较高, 可带来局部改进.

改进算法与贪心算法相比, 由于要考虑软约束限制, 会一定程度上“牺牲”场次效率, 故改进算法得到的场次数要略多于其他排考方式, 但并未超过可行上限, 因此这种多目标之间权衡所付出的“牺牲”在可接受的范围内.

## 4 结语

改进后的图算法将传统排考问题的图着色模型, 转化为赋权无向图的分团覆盖问题, 通过适度的深度优先策略和赋权机制, 求解“相对满意”的排考方案. 相比传统算法, 改进算法通过补图转化, 简化图结构, 适合学分制选课下较复杂的排考环境, 排考初始的冲突条件越多, 改进算法的效果越好. 经过数据验证, 改进算法的排考效果, 要优于一般贪心算法, 不劣于人工排考的效果, 具备一定的实际应用价值.

### 参考文献

- 1 Eemund KB, Mccollum B, Meisels A, Petrovic S, Rong Q. A graph-based hyper-heuristic for educational timetabling problems. *European Journal of Operational Research*, 2007, 176(1): 177-192.
- 2 王卿, 路晓伟. 高等院校学分制教学排考问题算法设计. *上海理工大学学报*, 2007, (6): 583-586.
- 3 董健兴, 栾勇, 闫君政. 基于图论的高校排考算法. *计算机系统应用*, 2011, (5): 177-179.

- 4 冯珊珊,张月琴,郭旭敏.基于改进图着色理论的聚类算法.计算机工程与设计,2013,(5):1740-1743.
- 5 Abdulia S. Heuristic approaches for university timetabling problems[Ph.D. Thesis]. Nottinghamshire: University of Nottingham, School of Computer Science and Information Techno, 2006.
- 6 Causmaecker PD, Demeester P, Berghe GV. A decomposed metaheuristic approach for a real-world university timetabling problem. European Journal of Operational Research, 2009, 195(1): 307-318.
- 7 田岭.大学自动排考算法设计与实现.计算机工程与设计,2007,(10):2443-2445.
- 8 龙恒,谭彩明.基于遗传算法的排考系统.计算机系统应用,2014,(1):184-187.
- 9 胡义伟,谢勇,郑金华.基于遗传算法的综合性大学排课系统研究.中国教育信息化,2007,21:54-55.
- 10 李红婵,朱颢东.采用十进制免疫遗传算法求解高校排课问题.系统工程理论与实践,2012,(9):2031-2036.
- 11 王卿,路晓伟.高等院校学分制教学排考问题算法设计.上海理工大学学报,2007,(6):583-586.
- 12 董传良,仝月荣,洪奕茜.高校选课制下自动排考系统的设计和实现.实验技术与管理,2011,(6):4-6,15.
- 13 王俊生,戴云龙.基于层次分析法的自动排课课程优先级模型.现代教育技术,2009,(11):32-35.
- 14 胡世清.高校排课多元优化策略与自动实现方法的研究.现代教育技术,2011,(7):105-109.
- 15 姚双良,顾夏灵.学分制环境下高校自动排考算法的设计与实现.信息技术,2013,(10):43-45,52.
- 16 周昭涛.文本聚类分析效果评价及文本表示研究[学位论文].北京:中国科学院研究生院(计算技术研究所),2005.