基于满意度的区间数多属性决策①

狄 钦, 陆亿红, 黄德才

(浙江工业大学 计算机科学与技术学院, 杭州 310023)

摘 要: 针对属性权重为实数而属性值为区间数的多属性决策问题, 提出了一种基于满意度的多属性决策方法. 本文借鉴连续有序加权平均算子中的满意度、区间数的可能度和集对分析联系数的相关知识, 将区间数满意度和同异反三元联系数满意度引入了决策信息不确定性消除问题, 接着利用 OWA 算子对满意度信息进行集结并对方案进行排序. 最后进行对比实验, 实验结果表明了该方法的有效性和可行性.

关键词: 区间数; 多属性决策; 集对分析; 满意度; 可能度; OWA

A Method of Multiple Attributes Decision-Making Based on Satisfied Degree

DI Qin, LU Yi-Hong, HUANG De-Cai

(College of Computer Science and Technology, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

Abstract: With respect to attribute weights are interval number and attribute values are interval number, a multiple attributes decision-making method based on satisfied degree is proposed. By referring to the thought of the satisfied degree in C_OWA, the possibility-degree of interval number and the connection-number in set pair analysis, the satisfied-degree based on interval possibility and the satisfied degree based on connection-number are presented to Eliminate the uncertain information in decision data. These satisfied degrees are aggregated by OWA and rank the alternatives by the calculated values. The results of comparative experiment show the feasibility and efficiency of this proposed method.

Key words: interval number; multiple attributes decision-making; set pair analysis; satisfied degree; possibility degree; OWA

在自然界和人类社会中, 许多现象存在着不确定性, 主要表现为随机性和模糊性. 在多属性决策领域, 由于决策人思维的模糊性, 系统的复杂性和不确定性, 决策者所给出决策信息往往不是以具体的数值来表示, 而是以区间数的形式来表示. 因此区间数多属性决策成为决策领域的研究热点[1-13], 而如何处理决策信息中的随机性和模糊性, 即不确定性, 成为了难点. 文献[1]充分考虑了决策者的心态对决策的影响, 根据决策者不同的心态指标值, 将区间数转化为不同的确定数, 从而去除了决策信息中的不确定信息. 文献[2]提出了区间数向联系数的转换及联系数的运算规则, 根据联系数的可能度来处理不确定信息. 文献[3]给出了基于集对分析的区间数多属性决策, 其特点是把区间数转换成同异反三元联系数, 利用同异反的势函数对包含不确定信息的联系数进行排序. 然而这些研究都集中在利用各种方法单独处理决策信息中的不确定性, 目前利用决策信息之间的相互关系来去除其中的不确定信息的研究尚未见报道.

本文借鉴连续有序加权平均算子(C-OWA)[4,5]中的满意度、区间数的可能度和集对分析联系数的相关知识, 将区间数满意度和同异反三元联系数满意度引入了决策信息不确定性消除问题, 在此基础之上, 将问题转化为确定型多属性决策问题. 本文的创新之处在于: 提出了区间数满意度和同异反三元联系数满意度, 并将其应用于决策信息不确定性消除问题, 进而将区间数多属性决策问题转化为确定型多属性决策问题.

① 基金项目:国家科技支撑计划(2012BAD10B0101);水利部公益性行业科研专项(201001031)
收稿时间:2013-01-09;收到修改稿时间:2013-02-28

1 区间数及满意度

定义 1[6] 记 $\bar{a}=[a^L,a^U]=\{x\,|\,a^L<x<a^U,a^L,a^U\in R\}$ 为区间数. 特别地, 当 $a^L=a^U$ 时, $\bar{a}$ 就退化为确定数.

1.1 区间数向联系数的转化

集对分析是我国学者赵克勤 20 年前提出的一种用联系数统一处理模糊、随机和信息不完全所致不确定性的系统理论与方法. 其特点是重视信息处理中的相对性和模糊性, 从问题本身分离出相对确定性信息和相对不确定性信息, 在相对确定性条件下进行决策, 然后利用相对不确定性信息分析决策稳定性[7].

定义 2[8] 所谓集对就是具有一定联系的两个集合所组成的对子. 在问题背景 W 下把两个具有一定联系的集合 A、B 组成集对, 记为 $H=(A, B)$, 两个集合按照集对的某一特征性可以找出其中相同的特征、对立的特征和介于两者之间的差异特征, 并建立在该问题 W 下集对 H 的同异反联系度 $\mu(H,W)$ 表示为:

$$\mu(H,W)=\frac{S}{N}+\frac{F}{N}i+\frac{P}{N}j \tag{1}$$

式中: $i\in[-1,1]$; $j=-1$; N 为集对 H 的特征总数; S 为两集合相同的特征个数; P 为两个集合对立的特征个数; F 为既不对立又不相同的特征个数.将 $\frac{S}{N}$、$\frac{F}{N}$、$\frac{P}{N}$ 分别称为集对 H 在问题 W 下的同一度, 差异度, 对立度, 一般情况下分别用 a、b、c 表示, 则式(1)可简记为:

$$\mu=a+bi+cj \tag{2}$$

由 $N=S+F+P$ 易知 $a+b+c=1$, a、b、c 满足归一化条件.

定义 3[9] 设 $\bar{a}=[a^L,a^U]$, 且 $\bar{a}\subseteq[0,1]$, 设 μ 为联系数. 将区间数 $\bar{a}$ 转化为联系数 μ, 表示为:

$$\mu=a^L+(a^U-a^L)i+(1-a^U)j \tag{3}$$

式中: 区间数 $\bar{a}$ 把区间[0,1]分成了三部分 $[0,a^L]$、$[a^L,a^U]$、$[a^U,1]$, 分别表示了区间数 $\bar{a}$ 中的值"肯定比这部分大"、"可能比这部分大"、"不可能比这部分大". 因此将同一度、差异度、对立度分别设为 a^L、a^U-a^L、$(1-a^U)$.

定义 4[10] 设联系数 $\mu=a+bi+cj$, 则 μ 的相对确定可能势 $P(\mu)$ 为:

$$P(\mu)=\frac{2a}{b+c}-\frac{c}{a+b} \tag{4}$$

1.2 满意度相关概念

1.2.1 区间数满意度

定义 5[11] 设 $\bar{a}=[a^L,a^U]$ 和 $\bar{b}=[b^L,b^U]$ 均为区间数, 且记 $l_{\bar{a}}=a^U-a^L$, $l_{\bar{b}}=b^U-b^L$,则称

$$p(\bar{a}\ge\bar{b})=\frac{\max\left[0,l_{\bar{a}}+l_{\bar{b}}-\max\left(0,b^U-a^L\right)\right]}{l_{\bar{a}}+l_{\bar{b}}} \tag{5}$$

为 $\bar{a}\ge\bar{b}$ 的可能度.

由以上定义可以看出, 可能度的取值在 0~1 之间, 并具有如下性质:

1) $p(\bar{a}\ge\bar{b})+p(\bar{b}\ge\bar{a})=1$

2) 若 $p(\bar{a}\ge\bar{b})=p(\bar{b}\ge\bar{a})$, 则 $p(\bar{a}\ge\bar{b})$ =1/2.

3) 若 $a^U\le b^L$, 则 $p(\bar{a}\ge\bar{b})$ =0; 若 $a^L\ge b^U$, 则 $p(\bar{a}\ge\bar{b})$ =1.

4) 对于三个区间数 $\bar{a}$、$\bar{b}$、$\bar{c}$, 若 $\bar{a}\ge\bar{b}$, 则 $p(\bar{a}\ge\bar{c})\ge p(\bar{a}\ge\bar{c})$.

根据上面性质, 可以定义可能度与势序关系:

1) 当 $p(\bar{a}\ge\bar{b})>0.5$ 时, $\bar{a}\succ\bar{b}$.

2) 当 $p(\bar{a}\ge\bar{b})<0.5$ 时, $\bar{b}\succ\bar{a}$.

3) 当 $p(\bar{a}\ge\bar{b})=0.5$ 时, $\bar{a}=\bar{b}$.

可能度在判断两个区间数大小关系时较为有效, 而在具体比较具体大多少时效果不佳, 需要引入下面的相离度来度量两个区间数的距离问题.

定义 6[2] 设 $\bar{a}=[a^L,a^U]$ 和 $\bar{b}=[b^L,b^U]$ 均为区间数, 称

$$d(\bar{a},\bar{b})=\left|a^L-b^L\right|+\left|a^U-b^U\right| \tag{6}$$

为区间数 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$ 的相离度. 显然 $d(\bar{a},\bar{b})$ 值越大, $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$ 的相离程度就越大, 当 $d(\bar{a},\bar{b})=0$ 时, 有 $\bar{a}=\bar{b}$, 即 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$ 完全重合.

利用上面两个定义, 可以给出区间数满意度的定义, 如下:

定义 7 设属性值 $\bar{a}=[a^L,a^U]$ 和水平值 $\bar{b}=[b^L,b^U]$ 皆为区间值, 属性值 $\bar{a}$ 满足水平值 $\bar{b}$ 的满意度记为 $m(\bar{a},\bar{b})$, 表示为:

$$m(\bar{a},\bar{b})=\begin{cases}e^0,\bar{a}=\bar{b}\\ e^{\left(\frac{p(\bar{a}\ge\bar{b})-0.5}{\left|p(\bar{a}\ge\bar{b})-0.5\right|}\right)*d(\bar{a},\bar{b})},\bar{a}\ne\bar{b}\end{cases} \tag{7}$$

式中: $p(\bar{a}\ge\bar{b})$ 和 $d(\bar{a},\bar{b})$ 分别表示区间数 $\bar{a}$ 相对于区间数 $\bar{b}$ 的可能度和相离度. $\frac{p(\bar{a}\ge\bar{b})-0.5}{\left|p(\bar{a}\ge\bar{b})-0.5\right|}$ 为 $\bar{a}$ 和

$\bar{b}$ 不相等时比较的符号, 当 $\bar{a} \succ \bar{b}$ 时, 其值为 1; 当 $\bar{b} \succ \bar{a}$ 时, 其值为-1.

根据上面推论, 易得出 $\bar{a}$ 和 $\bar{b}$ 的优势关系与满意度值的关系: 当 $\bar{a} \succ \bar{b}$ 时, 满意度 $m(\bar{a},\bar{b})$ 比 1 大; 当 $\bar{a} \prec \bar{b}$ 时, 满意度 $m(\bar{a},\bar{b})$ 比 1 小; 当 $\bar{a} = \bar{b}$ 时, 其值为正好为 1, 即对自身的满意度为 1.

1.2.2 联系数满意度

定义 8　设属性值 $\mu_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j$ 和水平值 $\mu_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j$ 皆为联系数, $P(\mu_1)$、$P(\mu_2)$ 为对应的可能势, 设 $\mathrm{mod} = |P(\mu_1)| + |P(\mu_2)|$, 属性值 μ_1 满足水平值 μ_2 的满意度记为 $m(\mu_1, \mu_2)$, 表示为:

$$m(\mu_1,\mu_2) = e^{\frac{P(\mu_1)}{\mathrm{mod}}} \Big/ e^{\frac{P(\mu_2)}{\mathrm{mod}}} = e^{\frac{P(\mu_1)-P(\mu_2)}{\mathrm{mod}}} \tag{8}$$

式中: e 为自然对数, 可能势值存在负数, 通过引入指数解决可能势值为负数的问题; 用来消除引入指数后比较值被放大过大的情况. 满意度 $m(\mu_1, \mu_2)$ 的取值范围为 $[e^{-1}, e]$.

当 μ_1 的可能势 $P(\mu_1)$ 大于 μ_2 的可能势 $P(\mu_2)$ 时, 满意度 $m(\mu_1,\mu_2)$ 大于 1; 当 μ_1 的可能势 $P(\mu_1)$ 小于 μ_2 的可能势 $P(\mu_2)$ 时, 满意度 $m(\mu_1,\mu_2)$ 小于 1; 当 μ_1、μ_2 的可能势相等时, 满意度 $m(\mu_1,\mu_2)$ 等于 1.

2　基于满意度的多属性决策方法

2.1 问题描述

定义 9　权重信息已知的区间数多属性决策问题: . 给定 m 个方案 $S = \{S_1, S_2, \cdots, S_m\}$, n 个独立的属性 $Q = \{Q_1, Q_2, \cdots, Q_n\}$, 属性的权重信息已知且为实数, $W = (w_1,\cdots, w_n)^T$, 方案 S_i 关于属性 Q_j 的属性评价值 d_{ij} 为区间数,从而构成了决策矩阵 $D = (d_{ij})_{m\times n}$, 目标在多个方案中寻找最佳方案.

为消除不同物理量纲对决策结果的影响, 可采用文献的方法处理, 得到规范化矩阵为 $R=(r_{ij})_{m\times n}$.

2.2 基于满意度多属性决策方法

定义 10　设 m_{ij} 为第 i 个方案 S_i 在第 j 个属性下满足一定水平的满意度, w_j 为第 j 个属性的权重. 称

$$M(S_i) = \sum_{j=1}^{n} w_j d_{ij} \tag{9}$$

为基于满意度的 OWA 算子, 用来集结方案的满意度信息, 得出方案的综合评价值.

本文针对的是权重已知且为实数的区间数多属性决策问题. 因此提出的基于满意度的多属性决策方法不包含权重值的确定. 首先需要设定每个属性的水平评价值, 接着根据属性的水平评价值将决策矩阵转化为满意度矩阵, 最后利用基于满意度的 OWA 算子对数据进行集结. 详细步骤如下:

Step1　最终目的是对方案进行排序, 因此无论取哪个方案作为参考方案对结果都不会有影响. 设第一个方案为参考方案, 该方案的各个属性值作为各个属性的水平评价值.

Step2　根据定义 7、定义 8 中的两种方法, 将区间数决策矩阵 $R = (r_{ij})_{m\times n}$ 中的区间数 r_{ij} 转化为相对应的满意度 m_{ij}, 形成满意度决策矩阵 $\mathrm{M} = (m_{ij})_{m\times n}$.

Step3　用式(9)来集结满意度决策矩阵的信息, 得出方案的综合满意度, 并进行排序.

3　实例分析

为便于比较, 选取文献[2]中投资公司选择生成厂商的例子. 现有待选四个公司, 分别为汽车公司、食品公司、电脑公司、军火公司, 用 $S = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ 表示. 该公司主要从风险因素、公司成长因素、环境因素三个方面进行考虑, 记为 $Q = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$.其权重为 w=(0.3803, 0.3725, 0.2472). 100 位专家对上述四家公司在三个因素下的表现分别投票, 投票结果如表 1 所示, 选择哪家公司为投资对象.

表 1　投票结果

S_i	Q_1	Q_2	Q_3
S_1	[45,65]	[50,70]	[20,45]
S_2	[65,75]	[65,75]	[55,85]
S_3	[45,65]	[55,65]	[55,80]
S_4	[75,85]	[65,80]	[35,85]

表 1 中的数据具有相同的物理意义, 可以直接进行信息融合, 且数据值均为效益值指标. 不过可以除以 100, 使数据若在[0,1]区间中, 便于计算. 标准化后的决策矩阵 $\mathrm{R}=(r_{ij})_{m\times n}$ 为:

$$R_{4\times 3} = \begin{bmatrix} [0.45,0.65],[0.50,0.70],[0.20,0.45] \\ [0.65,0.75],[0.65,0.75],[0.55,0.85] \\ [0.45,0.65],[0.55,0.65],[0.55,0.80] \\ [0.75,0.85],[0.65,0.80],[0.35,0.85] \end{bmatrix}$$

选取方案 S_1 中的数据作为属性的水平值, 则 Q_1, Q_2, Q_3 的水平值分别为[0.45, 0.65]、[0.50, 0.70]、[0.20,

0.45]. 以 r_{21}=[0.65, 0.75]为例, 计算两种满意度.

根据式(5)得到$r_{21} \succ r_{11}$的可能度 $p(r_{21} \geq r_{11})$=1,再根据式(6)得到两者的相离度$d(r_{21}, r_{11}) = 0.3$,最后再根据式(7)得到r_{21}满足r_{11}的满意度$m(r_{21}, r_{11})$, 为 1.35, 同理得到其他属性值的满意度, 方案一对自己所有的属性值满意度都为 1.形成了区间数满意度矩阵M_1, 如下:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1.35, & 1.35, & 1.733 \\ 1, & 1.35, & 1.649 \\ 1.35, & 1.419, & 2.117 \end{bmatrix}$$

先根据式(3)、(4)分别得到r_{21}和r_{11}的可能势$P(r_{21}) = 3.38$、$P(r_{11}) = 1.09$, 再根据式(8)得到基于集对联系数的满意度$m(r_{21}, r_{11}) = 1.665$. 同理得到其他属性值的满意度, 形成了基于集对联系数的满意度矩阵M_2, 如下:

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1.665, & 1.441, & 2.718 \\ 1, & 1.101, & 2.718 \\ 1.979, & 1.456, & 2.718 \end{bmatrix}$$

得到满意度矩阵之后, 需要根据式(9)得到方案的满意度. 基于区间满意度的方案满意度为$M = (m(s_1), m(s_2), m(s_3), m(s_4))^T$ = (1.0, 1.445, 1.291, 1.565)^T; 基于集对联系数满意度的方案满意度为$M = (m(s_1), m(s_2), m(s_3), m(s_4))^T$ = (1.0, 1.842, 1.462, 1.967)^T. 基于两种满意度对决策对象进行排序结果都为$s_4 \succ s_2 \succ s_3 \succ s_1$, 两种方案的排序与文献[2]完全一致.

文献[2]通过将区间数转化为联系数, 再通过联系数的运算规则, 得到方案的综合评价值, 并根据联系数的可能度对方案进行排序. 而本文则是通过区间数的相互关系提前消除了不确定性, 将问题简化为确定型多属性决策问题. 这样不简简化了计算, 而且回避了区间数多属性决策问题中区间数运算和排序这两个最困难的部分.

4 结论

本文将连续有序加权平均算子(C-OWA)中的满意度的相关知识推广到了区间数多属性决策问题领域, 通过模糊数相互作用, 即区间数满意度和同异反三元联系数满意度来解决决策信息不确定性消除问题, 在此基础之上提出了基于满意度的区间多属性决策方法. 最后通过一个算例证明方法的有效性.

参考文献

1 万树平.区间型多属性决策的心态指标法.控制与决策,2009, 24(1):35–38.

2 刘健,刘思峰,吴顺祥.基于优势关系的多属性决策对象排序研究.控制与决策,2012,27(4):632–635.

3 刘秀梅,赵克勤.基于联系数的区间数多属性决策非线性模型及应用.数学的实践与认识,2011,41(6):57–63.

4 Yager RR. OWA aggregation over a continuous interval argument with applications to decision making. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics-Part B, 2004, 34:1952–1963.

5 Yager RR. On ordered averaging aggregation operators in multicriteria decision making. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics,1988,18:183–190.

6 徐泽水.不确定多属性决策方法及应用.北京:清华大学出版社,2004.44–94.

7 赵克勤.集对分析及其初步应用.杭州:浙江科学出版社,2000.4–18.

8 舒杰.移动商务难过商务危机.通信产业报,2009,(055 版).

9 叶跃祥,糜仲春,王宏宇.一种基于集对分析的区间数多属性决策方法.系统工程与电子技术,2006,28(9):1344–1347.

10 杨俊杰,周建中,方仍存,等.基于集对分析的多属性决策方法.控制与决策,2008,23(12):1423–1426.

11 肖峻,张跃,付川,等.基于可能度的区间数排序方法比较.天津大学学报,2011,44(8):70.

12 徐泽水.模糊互补判断矩阵排序的一种算法.系统工程学报,2001,16(4):311–314.

13 徐泽水,达庆利.区间数排序的可能度法及其应用.系统工程学报,2003,18(1):67–70.