# 基于遗传算法的数值优化约束问题的研究①

刘正龙 [1], 杨艳梅 [2]

[1](川北医学院 基础医学院计算机与数学教研室, 南充 637007)
[2](西华师范大学 数学与信息学院, 南充 637000)

**摘 要**: 针对数值优化约束中出现的大规模、多峰多态函数, 含离散变量等情况下的全局优化问题, 采用常规的优化方法, 收敛速度较慢, 求得全局极值的概率较低. 提出用遗传算法的数值优化约束问题解决, 通过数值仿真实验结果表明, 该算法性能优于现有其它算法, 它不仅可以处理线性等式约束, 而且还可以处理非线性等式约束, 同时提高了收敛速度和解的精度, 是高效稳健的智能算法, 具有很高的全局寻优能力和很快的收敛速度, 对求解复杂多峰多态函数的优化约束问题具有可行性和有效性.

**关键词**: 遗传算法; 优化约束; 惩罚函数; 非线性; 计算机仿真

## Study of Numerical Optimization Constraint Problems Based on Genetic Algorithm

LIU Zheng-Long[1], YANG Yan-Mei[2]

[1](Department of Mathematics and Computer,North-SiChuan Medical College, NanChong 637007, China)
[2](Mathematics & Information College,West China Normal Unviserstiy, NanChong,, China)

**Abstract**: For numerical optimization constraints appear in the large-scale, multi-function polymorphism, on global opti- mization with discrete variables under such circumstances, General optimization method, convergence is slow to seek global extremum of low probability. Made with genetic algorithm of numerical optimization constraints problem solution, by numerical simulation experimental results indicates that, the algorithm performance better than existing other algorithm, it not only can processing linear equation constraints, and also can processing nonlinear equation constraints, while improve has convergence speed reconciliation of precision, is efficient sound of intelligent algorithm, has is high of global found excellent ability and soon of convergence speed, on solution complex more peak more State function of optimization constraints problem has feasibility and effectiveness.

**Key words**: genetic algorithm; optimization constraints; penalty function; nonlinearity; computer simulation

随着科学和工程领域的许多优化问题最终可归结为带约束的函数优化问题. 目前,约束优化问题,特别是目标函数和约束函数为非线性规划(NonLinear Programming, NLP)问题,尚不存在普遍有效的解法, 约束最优化问题(Constrained Optimization Problems, COP)的常规解法可以分为两种途径[2,3]: 一种是把有约束问题化为无约束问题, 再用无约束问题的方法去解; 另一种是改进无约束问题的方法, 使之能用于有约束的情况. 第一种途径的历史很悠久, 主要是罚函数法(penalty function method), 由 Couran 在 1949 年提出, 后来由 Frish(1955)和 Carroll(1959)分别做了发展. 罚函数法在实践中使用比较广泛. 罚函数法的要点是把问题的约束函数以某种形式归并到目标函数上去, 使整个问题变为无约束问题. 这种方法对于非线性的约束, 设计的算法常常因为迭代点要沿复杂的可行区域便捷移动而花费大量的计算而可能导致失败.

罚函数法根据解序列相对原问题的可行性分为外部罚函数法(exterior penalty method)和内部罚函数法(interior penalty method 也称障碍法 barrier function method)[4]. 对序列罚函数法性质的进一步研究导出了

① 基金项目:四川省教育厅自然科学基金(12ZB040);四川省教育厅教育发展研究中心基金(CJF10019)
收稿时间:2012-09-07;收到修改稿时间:2013-03-20

一次求无约束问题来得到原问题解的恰当罚函数(exact penalty function). 罚函数法的更近发展是乘子法(multipler method)或 Lagrange 法, 以及投影 Lagrange 法. 约束最优化问题的第二种途径发展较晚, 20 世纪 60 年代 Rosen 对于带线性约束问题提出了著名的梯度投影算法[1](gradient projection method). 这类算法可以看成是无约束问题中最速下降法在含约束问题上的推广, 其基本思想是把负梯度方向投影到可行方向集的一个子集上, 取投影为可行下降方向. 简约梯度法推广到非线性约束的情况, 称为广义简约梯度法(generalized reduced gradient method, GRD).

## 1　约束最优化问题

含不等式约束、等式约束及变量上、下限约束的约束最优化问题标准形式为

$$\begin{aligned} & Minimize \quad f(x) \\ & \left.\begin{aligned} & g_i(x) \le 0, i=1,\cdots,m \\ & h_i(x) \le 0, j=1,\cdots,l \\ & l_i \le x_i \le u_i \end{aligned}\right\} \end{aligned} \tag{1}$$

借鉴常规方法中的罚函数法是一方便的选择. 将罚函数包含到适应度评价中, 可以采用下列形式:

$$f(x)+rp(x) \tag{2}$$

在(2)式中, 罚函数 $P(x)$为满足下列条件的连续函数:

$$p(x)=\begin{cases} =0, x\in X \\ >0, x\notin X \end{cases} \tag{3}$$

$R$ 为罚函数尺度系数, $R>0$. (3)式中 $X$ 为问题的可行解域.

构造罚函数以有效地惩罚非可行解, 对问题的解决至关重要. 罚函数设计方面的研究一直被十分重视, 对于不同的问题, 人们提出了多种罚函数的形式, 如静态罚函数、动态罚函数、退火罚函数、自适应罚函数、启发式罚函数、双重罚函数以及逐次惩罚罚函数等[7]. 此外, 适于一些高级遗传操作算子也有一定的适用范围, 如边界变异(boundary mutation)、启发式交(heuristic crossover)、几何交叉(geometrical crossover)、球面不交叉(sphere crossover)等. 总而言之, 罚函数法对于不同的问题需要设计同的罚函数, 而且在约束数目及其复杂性小的情况下才比较适用; 对于规模不大的线性约束最优化问题, 有较好的效果. 对于一般的约束处理, 通常是很困难的. 1997 年, Jan Paredis 提出了共同进化遗传算法(Coevolutionary Genetic Algori- thm,CGA)解决一般的约束满足问题, 其中一个种群有问题的解组成, 另一个种群有约束组成. 这两种群协同进化, 较好的解应满足更好的约束. 而较优的约束则被更多的解所违背.

## 2　解线性约束最优化问题的遗传算法

### 2.1 线性约束最优化问题

Michalewicz 在遗传算法应用于线性约束最优化问题方面的研究成果[3-5], 线性约束最优化问题的一般形式可以描述为:

$$\begin{aligned} & Minimize \quad f(x_1,\cdots x_n) \\ & \quad subject \quad to \\ & \left.\begin{aligned} & a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b \\ & \quad \vdots \\ & a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\ & c_{11}x_1+\cdots+c_{1n}x_n \le d \\ & \quad \vdots \\ & c_{l1}x_1+\cdots+c_{ln}x_n \le d \\ & l_i \le x_i \le u_i, i=1,\cdots,n \end{aligned}\right\} \end{aligned} \tag{4}$$

以上问题的矩阵形式为:

$$\begin{aligned} & Minimize \quad f(x) \\ & \quad subject \quad to \\ & \left.\begin{aligned} & Ax=b \\ & Cx \le d \\ & l \le x \le u \end{aligned}\right\} \end{aligned} \tag{5}$$

上述约束优化的目标函数可以使线性函数或者非线性函数. 1991 年 Michalewice 等研究了这类约束最优化问题[2]. 通过消除可能的变量以减少变量数目, 消除等式约束, 并设计特别的 GENOCOP(Genetic Algorithm for Numerical Optimization for Constrained Problem, 约束优化的遗传算法)[6]. 在研究这种算法之前, 给出一个简单的例子说明其基本思想.

构造一个含 6 个优化变量的线性约束最优化问题:

$$\begin{aligned} & Minimize \quad f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) \\ & \quad subject \quad to \\ & \left.\begin{aligned} & x_1+x_2+x_3=5 \\ & x_4+x_5+x_6=10 \\ & x_1+x_4=3 \\ & x_2+x_5=4 \\ & x_i \ge 0, i=1,\cdots,6 \end{aligned}\right\} \end{aligned} \tag{6}$$

首先,根据 4 个独立的等式约束,将变量 $x_3, x_4, x_5, x_6$ 用 $x_1, x_2$ 来表示.

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 5 - x_1 - x_2 \\ x_4 &= 3 - x_1 \\ x_5 &= 4 - x_2 \\ x_6 &= 3 + x_1 + x_2 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

目标函数表示为:

$$\begin{aligned} \overline{f}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, (5 - x_1 - x_2), \\ (3 - x_1), (4 - x_2), (3 + x_1 + x_2)) \end{aligned} \tag{8}$$

因此, 通过消除多余变量和等式约束, 约束条件转化为两个变量的不等式约束情形:

$$\left.\begin{aligned} & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \\ & 5 - x_1 - x_2 \ge 0 \\ & 3 - x_1 \ge 0 \\ & 4 - x_2 \ge 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

然后, 我们考虑遗传操作的方式. 由于采用实数编码方式, 变异操作比较简单, 检查搜索空间中的一点 $x = (x_1, x_2) = (1.8, 2.3)$ 保持 $x_2$ 的值使 $x_1$ 发生变化(均匀变异), 变量 $x_1$ 的变化区间为 $[0, 5 - x_2] = [0, 2.7]$. 在考虑交叉操作时, 假设搜索空间中存在两点:

$$x = (x_1, x_2) = (1.8, 2.3), x' = (x_1', x_2') = (0.9, 3.5),$$

其任意线性组合 $\lambda x + (1-\lambda)x' (0 \le \lambda \le 1)$ 也为搜索空间中的一点, 并且满足所有约束条件, 从而实现了交叉操作[8,9]. 由于搜索空间是凸性的, 设计这样的遗传操作使解向量限制在可行解域内.

## 2.2 消除等式约束

假设等式约束 $Ax = b$ 中有 $m$ 个独立的等式, $m$ 个变量 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m} (\{i_1, \cdots, i_m\} \subseteq \{1, 2, \cdots, n\})$, 可以用剩余的 $n - m$ 个变量表示. 等式消除的操作可描述如下:

将矩阵 A 在第 $j$ 列 $(j \in \{i_1, \cdots, i_m\})$ 处分割为两个分阵 $A_1$ 和 $A_2$, 类似地分割矩阵 C、向量 $l$ 和 $u$ ,对应分矩阵和向量加下标表示[11]. 这样, 等式约束成为:

$$A_1 x^1 + A_2 x^2 = b$$

由于 $A_1^{-1}$ 存在 $x^1 = A_1^{-1}b - A_1^{-1}A_2x^2$ 这样, 变量 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m}$ 可用剩余的变量的线性组合表示. 对于变量 $x_{i_j} (j = 1, \cdots, m)$ 的上、下限约束 $l_{i_j} \le x_{i_j} \le u_{i_j}$, 去掉其中所有的 $x_{i_j}$, 有下列新的不等式成立:

$$l_1 \le A_1^{-1}b - A_1^{-1}A_2x^2 \le u_1$$

加上原问题中不等式 $Cx \le d$, 即:

$$C_1x^1 + C_2x^2 \le d$$

将 $x^1$ 代入上式转化为:

$$C_1(A_1^{-1}b - A_1^{-1}A_2x^2) + C_2x^2 \le d$$

因此, 将 $m$ 个变量 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m}$ 消除后, 最终的约束由以下的不等式的约束组成[10]:

① 原上下限约束:

$$l_2 \le x^2 \le u_2$$

② 新增加的不等式约束:

$$A_1l_1 \le b - A_2x^2 \le A_1u_1$$

③ 原不等式:

$$(C_2 - C_1A_1^{-1}A_2)x^2 \le d - C_1A_1^{-1}b$$

## 2.3 GENOCOP 算法

GENOCOP 算法和其它算法一样, 采用随机法生成初始种群, 这样就有可能使得初始种群的个体不能均匀地遍布整个可行域, 可能对算法的性能造成以下影响:

(1) 计算速度不理想.

(2) 算法提前收敛到局部最优解, 即早熟收敛.

将改进的 GENOCOP 算法用于 Michalewicz 写的 GENOCOP 算法的一个求解有限性约束条件的数值优化问题[3,4], 原问题消除等式约束变 GENOCOP 算法与常规约束最优化方示比较.

对于非线性目标函数的构造, 考虑下面几种测试函数 $A(x)$~$E(x)$.

① 函数 $A(x)$

$$A(x) = \begin{cases} c_{ij}\dfrac{x}{S}, & 0 < x \le S \\ c_{ij}, & S < x \le 2S \\ c_{ij}\left(1 + \dfrac{x - 2S}{S}\right), & 2S < x \end{cases} \tag{10}$$

② 函数 $B(x)$: $B(x) = c_{ij}x^2$

③ 函数 $C(x)$: $C(x) = c_{ij}\sqrt{x}$

④ 函数 $D(x)$:

$$D(x) = c_{ij}\left(\frac{1}{1 + (x - 2s)^2} + \frac{1}{1 + \left(x - \frac{9}{4}S\right)^2} + \frac{1}{1 + \left(x - \frac{7}{4}S\right)^2}\right) \tag{11}$$

在(12)式中, $S$ 和典型的 $x$ 具有同样的阶.

⑤ 函数 $E(x)$:

$$E(x) = c_{ij}(\sin(x\frac{5\pi}{4S}) + 1)$$

$S$ 和典型的 $x$ 具有同样的阶，非线性运输问题的目标函数为：$\sum_{i,j} f(x_{ij}) + P$ 这里，$f(x_{ij})$ 取测试函数 $A(x)$ ~$E(x)$ 中任一函数，$P$ 为罚函数：

$$P = k \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^p \cdot \overline{f} \cdot \sum_{i=1}^{14} d_i \tag{12}$$

在(13)式中，$\overline{f}$ 为第 $t$ 代群体的平均适应度. $k$ 和 $p$ 为参数,取 $k$=1, $p$=1/14. $T$ 为最大运作代数，$d_j$ 为第 $i$ 个约束的违反度. 对于约束 $\sum_{i \in W} x_i = val, W \subseteq \{1, \cdots, 49\}$ 个体的染色体表示为 $(v_1, \cdots, v_{49})$，其约束违反度定义为：

$$d_i = \left|\sum_{i \in W} v_i - val\right| \tag{15}$$

## 3 Matlab实验仿真与分析

设在某种物流运输中有 $m$ 个产地 $A_1, A_2, \cdots, A_m$, 各产地的产量分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_m$; 有 $n$ 个销地 $B_1, B_2, \cdots, B_n$, 各销地的销量分别为 $b_1, b_2, \cdots, b_n$, 假定从产地 $A_i$ ( $i$= 1, 2,⋯, $m$ ) 向销地 $B_j$ ( $j$ = 1, 2, ⋯, $n$ ) 运输单位物品的运价为 $c_{ij}$, 若用 $x_{ij}$ 表示从 $A_i$ 到 $B_j$ 的运输量, 则在产销平衡条件下, 总运费最小的调运方案的数学模型[12],构造 7*7 矩阵的运输规划问题作为实例.

表 1 7*7 运输规划问题费用参数表

| $c_{ij}$ | 27 | 28 | 25 | 20 | 20 | 20 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 0 | 21 | 50 | 62 | 93 | 77 | 1 000 |
| 20 | 21 | 0 | 17 | 54 | 67 | 1 000 | 48 |
| 20 | 50 | 17 | 0 | 60 | 98 | 67 | 25 |
| 23 | 62 | 54 | 60 | 0 | 27 | 1 000 | 38 |
| 26 | 93 | 67 | 98 | 27 | 0 | 47 | 42 |
| 25 | 77 | 1 000 | 67 | 1 000 | 47 | 0 | 35 |
| 26 | 1 000 | 48 | 25 | 38 | 42 | 35 | 0 |

推导 $S$, 需估计 $x$ 的典型值. 可通过初步运算的方式估算 $x_{ij}$ 的数目和大小. 用这种方式可估算每个弧线的平均流量, 找到 $S$ 的值. 对于函数 $A$ 使用 $S$=2, 对于 $A, D$ 和 $E$ 使用 $S$=5. 由于该规划问题含有 13 个独立的等式约束, 因此, 可以消除 13 个变量. 被消除的 $x_1, x_2, \cdots, x_8, x_{15}, x_{22}, x_{36}, x_{44}$, 其余的 36 个变量按顺序设定为:

$$y_1, y_2, \cdots, y_{36}, y_1 = x_9, y_2 = x_{10}, \cdots, y_{36} = x_{49}$$

以 $A(x)$~$E(x)$ 测试函数构成的目标函数, 设定群体大小 40, 均匀变异概率 0.08, 边界变异概率 0.03, 非均匀变异概率 0.07, 简单交叉概率 0.10, 单一算术交叉概率 0.10, 全体交叉概率 0.10, 实现 GENOCOP 算法, 进行演算 8000 代的试验. 如表 2 所示.

表 2 中间世代优化结果

| 函数 | 世代 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 500 | 1000 | 2000 | 4000 | 8000 |
| A | 1085.8 | 273.4 | 230.5 | 153.0 | 94.5 | 24.15 |
| B | 932.4 | 410.6 | 258.4 | 250.3 | 209.2 | 205.60 |
| C | 83079.1 | 14122.7 | 4139.0 | 2944.1 | 2772.7 | 2571.04 |
| D | 1 733.6 | 575.3 | 575.3 | 480.2 | 480.2 | 480.16 |
| E | 225.2 | 204.9 | 204.9 | 204.9 | 204.9 | 204.82 |
| F | 3 799.3 | 1 719.0 | 550.8 | 320.9 | 166.4 | 119.61 |

对于非线性目标函数的运输问题, 获取大范围全局最优解必须满足目标函数为凸性的要求, 而采用常规方法容易收敛于局部最优解. Michalewicz 将基于拟牛顿法的非线性最优化算法 GAMS 与 GENOCOP 算法进行比较, 分析比较结果见表 3.

从仿真实验结果分析, GENOCOP 算法比商品化的软件包 GAMS 获得的结果要理想. 对于费用函数 $A(x)$,$B(x)$ 以及特别"不规则的"费用函数 $E(x)$, GENOCOP 算法要好得多. 而对于其他费用函数 $B(x)$,$C(x)$ 和 $D(x)$, 两种方法的结果比较相近.

表 3 GAMS 与 GENOCOP 算法比较

| 函数 | GAMS | GENOCOP | 误差% |
|---|---|---|---|
| A | 96.00 | 24.15 | 297.52 |
| B | 1141.60 | 205.60 | 455.25 |
| C | 2535.29 | 2571.04 | -1.41 |
| D | 565.15 | 480.16 | 17.70 |
| E | 208.25 | 204.82 | 1.67 |
| F | 43527.54 | 119.61 | 36 291.22 |

## 4 结语

处理好约束条件是使用遗传算法求解约束优化问题时所面临的一个关键问题, 遗传算法作为现代最优化的手段, 数值仿真实验表明, 遗传算法应用于大规模、多峰态函数、含离散变量等情况下的全局优化问题是合适的. 在求解速度和质量上远超过常规方法, 因而是一种高速近似算法, 也是一种便于实现、通用性强、高效稳健的方法, 为利用遗传算法求解约束优化问题提供了一条可行的途径, 从而证明本文所提出的 GENOCOP 遗传算法可在一定程度上提高求解最优解的效率,提高求解最优解的有效性和可行性.

(下转第 197 页)

有同样的切分效果, 具有一定的普遍适用性和有效性, 为移动终端实现连续手写汉字的输入和识别提供了有效的参考依据.

## 参考文献

1 Knudsen MB, Pedersen GF. Spherical outdoor to indoor power spectrum model at the mobile terminal. IEEE Journal on Selected Areas in Communications,2002,20(6):1156–1169.

2 Lee J, Chung Y. Design of a wireless handwriting input system for mobile devices. Proc. of the 9th International Symposium on Consumer Electronics. Macau: IEEE Computer Press, 2005,222–225.

3 韩勇,须德,戴国忠.MST 在手写汉字切分中的应用.软件学报,2006,17(3):403–409.

4 Casey RG, Lecolinet E. A survey of methods and strategies in character segmentation. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,1996,18(7):690–706.

5 罗佳,王玲.基于凹凸特性的非限制粘连手写数字串切分.微计算机信息,2007,23(25):275–276.

6 马瑞,夏永泉,杨静宇.基于背景分析的手写数字切分方法.计算机科学,2007,34(1):198–200.

7 赵姝岩,郭捷,施鹏飞.基于笔画分析和背景细化的粘连手写汉字切分.上海交通大学学报,2003,37(9):1434–1437.

8 Hong C, Loudon G, Wu Y, Zitserman R. Segmentation and recognition of continuous handwriting Chinese text. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 1998,12(2):223–232.

9 Lin YuT, Chen RC. Segmenting handwritten Chinese characters based on heuristic merging of stroke bounding boxes and dynamic programming. Pattern Recognition Letters, 1998,19(8):963–973.

10 Tseng LY, Chuang CT. An efficient knowledge based stroke extraction method for multi-font Chinese characters. Pattern Recognition,1992,25(12):1445−1458.

11 吕岳,施鹏飞,张克华.基于汉字结构特征的自由格式手写体汉字切分.电子学报,2000,28(5):1–3.

12 傅永和.汉字结构和构造成分的研究.现代汉语用字信息分析.上海:上海教育出版社,1993.108–169.

(上接第 142 页)

## 参考文献

1 Deb K.An efficient constraint handling method for genetic algorithms.Computational Methods for Applied Mechanical Engineering,2000,18(9):311–318.

2 Michalewicz,Z,S choenauer,M.Evolutionary algorithms for constrained parameter optimization problems.Evolutionary Computation Journal,1996,4(1):1–32.

3 张晶,翟鹏程.惩罚函数法在遗传算法处理约束问题中的应用.武汉理工大学学报,2002,24(2):56–59.

4 荣喜民,安智宇.非线性规划的混合遗传算法.系统工程与电子技术,2003,25(5):621–624.

5 刘伟,刘海林.基于外点法的混合遗传算法求解约束优化问题.计算机应用,2007,27(1):238–240.

6 周永华,李鹏,毛宗源.一种新的混合杂交方法及其约束优化中的应用.计算机工程与应用,2006,27(6):48–51.

7 刘淳安.解非线性约束规划问题的新型多目标遗传算法.计算机工程与设计,2006,27(5):756–757.

8 余新华,孙作龙.带约束函数优化问题的新算法.武汉理工大学学报,2002,24(5):13–16.

9 李秀梅,刘华毅,徐景德.一种新的遗传算法求解约束优化问题.计算技术与自动化,2003,22(1):17–20.

10 林丹,李敏强,寇纪凇.基于遗传算法求解约束优化问题的一种算法.软件学报,2001,12(4):628–632.

11 敖友云,迟洪钦.一种求解约束函数优化问题的遗传算法.燕山大学学报,2005,29(4):294–297.

12 戴庆,申静波.基于遗传算法的运输问题最优解研究.天津理工大学学报,2008,24(3):43–45.