

改进的 TV 模型图像修复算法^①

王 涛, 王军锋, 白 青, 张 伟

(西安理工大学 理学院应用数学系, 西安 710054)

摘 要: 分析了基于 TV 模型的图像修复算法, 针对各参考点梯度模值的大小不同, 对原始模型进行了改进. 该算法通过计算待修复区域像素点的梯度信息来构造一个扩散函数, 利用其控制各参考点对待修复区域的贡献值, 然后再进行加权处理. 实验结果表明修复变化剧烈和有较大破损的图像效果较好, 图像边缘清晰, 过渡自然.

关键词: 图像修复; 各向异性; TV 算法; 扩散函数; 梯度信息

Improved Method of Total Variation Image Inpainting

WANG Tao, WANG Jun-Feng, BAI Qing, ZHANG Wei

(School of Science, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: The image inpainting algorithm based on total variation model is analyzed. For the different size of the gradient value of each reference point, an improved image inpainting algorithm is proposed. The algorithm constructs a spread function by calculating the gradient information of pixel, and then they are weighted. Spread function control the contribution of the reference point on the repair area. Experimental results show that this algorithm works better in repair of damaged images which changes dramatically and the region is larger. Also, the image sharp edges and the boundary transit naturally.

Key words: image inpainting; anisotropic; total variation; spread function; gradient information

所谓图像修复是指针对图像中遗失或者缺损的部分, 利用未丢失或未被损坏的图像信息, 按照一定的方法自动地填补, 使修复后的图像接近或达到原始图像的视觉效果. 2000 年, Bertalmio M, Sapiro G, Caselles V, and Ballester C^[1]首先提出了一个基于三阶偏微分方程的 BSCB 修复模型, 它开创了基于偏微分方程图像修复方法的先河, 利用待修补区域的边缘信息, 将待修复区域外的信息沿梯度垂直方向扩散到待修复区域内. 2001 年, Chan T 和 Shen J 在 Rudin L, Osher S, and Fatemi E^[2]全变分去噪模型的启发下提出了一种总变分(Total Variation, TV)模型^[3], 他们采用了欧拉-拉格朗日方程和各向异性扩散的方式来保持等照度线的方向. 本文在 TV 模型的基础上, 借鉴文献[4]提出了一种改进的修复模型, 实验表明该算法通过计算待修复区域像素点的梯度信息来构造一个扩散函数, 再进行

加权处理, 能够有效的改善其修复效果, 实现了基于 TV 模型修复算法的改进和完善.

1 各向异性扩散方程

Perona 和 Malik^[5]给出的各向异性扩散方程(P-M 方程)为:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \text{div}[g(|\nabla u(x, y, t)|)\nabla u(x, y, t)] \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $u_0(x, y)$ 为图像的像素值, ∇ 是梯度算子, div 是散度算子, g 是扩散系数, 它是一个非负的有界递减函数满足 $g(0) = 1, g(\infty) = 0$ 的条件. 对于一幅图像在边缘处 $|\nabla u|$ 很大 $g(|\nabla u|)$ 很小, 在平坦的区域是 $|\nabla u|$ 很小扩散程度变大, 这样就可以有选择的把图像进行平滑. 各向异性扩散的基本思想是将定义在凸域 $\Omega \in R \times R$ 上的原始

① 基金项目:国家自然科学基金(91120014)

收稿时间:2012-08-07;收到修改稿时间:2012-09-10

图像 u 作为一种媒介, 在其上以非恒定的速率进行扩散, 从而得到一系列的逐渐平滑的图像 u_t . 根据分析给出两种形式的扩散系数:

$$g(|\nabla u|) = \exp\left(-\left(\frac{|\nabla u|}{k}\right)^2\right) \quad (2)$$

或

$$g(|\nabla u|) = \frac{1}{1 + (|\nabla u|/k)^2} \quad (3)$$

都满足以上条件, 因此在一定程度上实现对边缘的保持和增强.

2 基于TV模型的图像修复算法

记 D 是待修复区域, E 是待修复区域的外部, Γ 是 D 的边界, 如图 1 所示. 该模型的主要思想^[6,7]是用已知信息 E 通过扩散的方法去修复破损的图像区域 D . 它主要是通过建立图像模型, 根据整体变分原理, 将图像建立的模型, 转化为约束最优化问题, 再利用 Lagrange 乘子法进行求解.

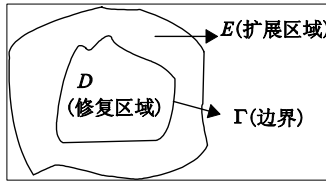


图 1 TV 修复模型

定义代价函数:

$$R(u) = \int_{E \cup D} r(|\nabla u|) dx dy \quad (4)$$

并满足如下噪声约束条件:

$$\frac{1}{A(E)} \int_E |u - u_0| dx dy = \sigma^2 \quad (5)$$

其中, u 是图像函数, u_0 是被高斯白噪声 σ 污染的图像, r 为非负实函数, $A(E)$ 为区域 E 的面积. 式(4)使待修复区域及边界尽可能平滑, 式(5)使得修复过程对噪声有良好的鲁棒性. 同时为较好地修复边缘, 需选择一个合适的函数 r , 这里取 $r(|\nabla u|) = |\nabla u|$. 运用 Lagrange 乘子法将式(4)和式(5)转化为无约束条件的极值问题, 其新的代价函数为:

$$J_\lambda(u) = \int_{E \cup D} |\nabla u| dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_E |u - u_0|^2 dx dy \quad (6)$$

根据 Euler-Lagrange 方程可知, 使得 $J_\lambda(u)$ 最小的 u 应满足如下条件:

$$- \operatorname{div} \left[\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] + \lambda_e (u - u_0) = 0 \quad (7)$$

用梯形下降法得:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left[\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] + \lambda_e (u_0 - u) \quad (8)$$

其中, $\lambda_e = \begin{cases} \lambda, & (x, y) \in E \\ 0, & (x, y) \in D \end{cases}$, 即在待修复区域 D 内, 可以得到 TV 修复的基本公式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left[\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] = 0 \quad (9)$$

解得的 u 为所求的最终修复图像.

3 TV模型的改进与实现

3.1 改进的 TV 模型图像修复算法

由于 TV 修复方程的迭代过程是一种各向异性扩散的过程, 求解 $J_\lambda(u)$ 最小的 u 时, 不管梯度大的地方还是梯度小的地方都用相同的权值对待修复区域的邻域参考点进行修复, 此方法对变化平滑的图像修复效果比较好, 但对变化剧烈和较大的待修复区域的图像会产生过渡不自然和边缘模糊的现象. 因此本文采用一种对待修复区域取不同的权值来实现, 即对 TV 模型引入一个扩散函数, 该函数用梯度模值作为参数. 借鉴文献[4]采用 Perona 和 Malik 给出的式(3)构造扩散方程, 该函数在梯度小的区域, $g(|\nabla u|)$ 的值较大, 从而实现强平滑, 能去除噪声; 在梯度大的区域, $g(|\nabla u|)$ 的值较小, 从而降低平滑, 保护图像边缘的信息. 本文对文献[4]去噪模型的扩散函数进行修改, 并引入 TV 修复方程的式(7)为:

$$- g(|\nabla u|) \cdot \operatorname{div} \left[\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] + \lambda_e (u - u_0) = 0 \quad (10)$$

修改的扩散函数为 $g(|\nabla u|) = \begin{cases} 1, & |\nabla u| = 0 \\ (|\nabla u|/k)^2, & \text{otherwise} \end{cases}$, 它

可以在图像变化平滑的区域强平滑, 而在图像边缘降低平滑, 这样保护了图像的边缘信息, 使图像边缘清晰, 过渡自然.

3.2 数值计算

首先对式(10)的散度算子 $\operatorname{div} \left[\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right]$ 进行离散化,

采用半点格式^[8]进行数值求解, 如图 2, 点 O 是目标像素

点,也就是待修复点, N, E, S, W 是四邻域的参考点, 记 $\Lambda = \{N, E, S, W\}, \{n, e, s, w\}$ 为的半像素邻域点, 引入中间像素点的目的是为了数值计算的稳定性和减少误差.

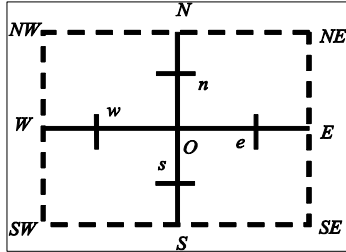


图 2 半点格式化

令 $V = (v^1, v^2) = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$, v^1, v^2 代表 $\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ 在待修复区

域横向和纵向的分量, 则散度通过中心差分可离散化为:

$$\text{div}(V) = \frac{\partial v^1}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = \frac{v_e^1 - v_w^1}{h} + \frac{v_n^2 - v_s^2}{h} \quad (11)$$

其中 h 表示步长, 选取 $h=1$. 然后下面估算上式的半像素点 $\{n, e, s, w\}$ 的梯度值, 如下以 e 点为例:

$$\begin{cases} v_e^1 = \frac{1}{|\nabla u_e|} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{1}{|\nabla u_e|} \frac{u_E - u_O}{h} \\ |\nabla u_e| \approx \frac{1}{h} \sqrt{(u_E - u_O)^2 + [(u_{NE} + u_N - u_S - u_{SE})/4]^2} \end{cases} \quad (12)$$

将式(12)代入式(11)得:

$$\begin{aligned} \text{div}(V) &= (v_e^1 - v_w^1) + (v_n^2 - v_s^2) \\ &= \frac{1}{|\nabla u_e|} (u_E - u_O) - \frac{1}{|\nabla u_w|} (u_O - u_W) + \frac{1}{|\nabla u_n|} (u_N - u_O) - \frac{1}{|\nabla u_s|} (u_O - u_S) \\ &= \frac{1}{|\nabla u_e|} (u_E - u_O) + \frac{1}{|\nabla u_w|} (u_W - u_O) + \frac{1}{|\nabla u_n|} (u_N - u_O) - \frac{1}{|\nabla u_s|} (u_S - u_O) \\ &= \sum_{P \in \Lambda} \frac{1}{|\nabla u_P|} (u_P - u_O) \end{aligned} \quad (13)$$

由以上分析对于目标像素点 O , 方程(10)离散化为:

$$\sum_{P \in \Lambda} \frac{g(|\nabla u_P|)}{|\nabla u_P|} (u_P - u_O) - \lambda_e(O) (u_O - u_O^0) = 0 \quad (14)$$

上式中, u_O^0 表示原始图像数据. 记

$$w_P = \frac{g(|\nabla u_P|)}{|\nabla u_P|_\alpha} = \frac{g(|\nabla u_P|)}{\sqrt{(|\nabla u_P|)^2 + \alpha^2}}, \quad P \in \Lambda \quad (15)$$

式中 α 是为了抑制权重的附加小量, 避免分母为 0.

方程(14)进一步整理为:

$$u_O = \sum_{P \in \Lambda} \frac{w_P}{\sum_{P \in \Lambda} w_P + \lambda_e(O)} u_P + \frac{\lambda_e(O)}{\sum_{P \in \Lambda} w_P + \lambda_e(O)} u_O^0 \quad (16)$$

◆

$$\begin{cases} h_{OP} = \frac{w_P}{\sum_{P \in \Lambda} w_P + \lambda_e(O)} \\ h_{OO} = \frac{\lambda_e(O)}{\sum_{P \in \Lambda} w_P + \lambda_e(O)} \end{cases} \quad (17)$$

式(17)可以简化为:

$$u_O = \sum_{P \in \Lambda} h_{OP} u_P + h_{OO} u_O^0 \quad (18)$$

本文取 $\lambda_e(O) = 0$. 最后采用 Gauss-Jacobi 迭代法对方程化简求解为:

$$u_O = \frac{\frac{g(|\nabla u_e|)}{|\nabla u_e|} u_E + \frac{g(|\nabla u_w|)}{|\nabla u_w|} u_W + \frac{g(|\nabla u_n|)}{|\nabla u_n|} u_N + \frac{g(|\nabla u_s|)}{|\nabla u_s|} u_S}{\frac{g(|\nabla u_e|)}{|\nabla u_e|} + \frac{g(|\nabla u_w|)}{|\nabla u_w|} + \frac{g(|\nabla u_n|)}{|\nabla u_n|} + \frac{g(|\nabla u_s|)}{|\nabla u_s|}} \quad (19)$$

式(19)是对待修复点 O 进行一次迭代的具体形式, 那么对 n 次迭代, 式(19)可改写为:

$$u_O^{(n)} = \frac{\frac{g(|\nabla u_e|)}{|\nabla u_e|} u_E^{(n-1)} + \frac{g(|\nabla u_w|)}{|\nabla u_w|} u_W^{(n-1)} + \frac{g(|\nabla u_n|)}{|\nabla u_n|} u_N^{(n-1)} + \frac{g(|\nabla u_s|)}{|\nabla u_s|} u_S^{(n-1)}}{\frac{g(|\nabla u_e|)}{|\nabla u_e|} + \frac{g(|\nabla u_w|)}{|\nabla u_w|} + \frac{g(|\nabla u_n|)}{|\nabla u_n|} + \frac{g(|\nabla u_s|)}{|\nabla u_s|}} \quad (20)$$

上式即本文修复方程(10)的迭代形式, 在算法开始之前, 先将 D 区域像素值初始化为随机噪声, 然后采用式(20)进行迭代, 当图像变化稳定时停止, 得到最终的修复结果.

3.3 算法步骤

Step1: 读入待修复图像;

Step2: 设置迭代次数 n 和梯度门限 k , 计算图像的掩码信息, 对掩码中的每一个像素执行 Step3、Step4、Step5;

Step3: 对掩码中每个像素点根据(12)式计算其周围参考点梯度的模和扩散函数的值.

Step4: 若像素位于待修复区域外, 则不改变像素的值, 否则, 执行 Step5;

Step5: 计算(20)式, 得到新的像素值, 并保存到新的图像中;

Step6: 重复上面的步骤, 迭代 n 次后结束并显示修复后的图像.

3.4 实验结果及分析

本文对不同破损程度的同一幅图像分别按本文算法、文献[4]算法和 TV 算法进行修复仿真实验.

实验 1 对破损较小的 lena.bmp(512×512)进行修复, 取迭代次数 500 次, 梯度门限 $k = 251$, 修复结果如图 3 所示.

实验 2 对破损较大的 lena 图像(512×512)进行修复, 取迭代次数 500 次, 梯度门限 $k = 251$, 修复结果如图 4 所示.



图 3 实验 1 修复对比图



图 4 实验 2 修复对比图

从两组实验结果看出, 当图像划痕较小、破损区域较窄时, 三种修复算法表现的差不多. 当图像划痕较粗或破损较大时, 从视觉上就可以明显看到原始算法和文献[4]的不足, 而本文算法克服了不同程度的边缘模糊和修复不足的缺陷, 因此本文算法效果较优.

当修复结果不能明显从视觉效果区分时, 则从图像质量的数据上分析修复效果. 一般地, 计算对比修

复前、后的图像与原始图像 u 之间的误差, 常用均方差误差(MSE)来度量^[9]. 同时基于 PDE 的图像修复多数采用峰值信噪比(PSNR)来衡量^[10], 即 PSNR 的值越大说明修复效果越好. 最后对比这三种算法所花费的时间. MSE、PSNR 定义如下:

$$MSE = \frac{1}{M \times N} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [u(i,j) - u_0(i,j)]^2 \quad (21)$$

$$PSNR = 10 \log_{10} \left[\frac{255 \times 255}{\frac{1}{M \times N} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [u(i,j) - u_0(i,j)]^2} \right] \quad (22)$$

其中, $M \times N$ 为图像的大小, $u(i, j)$ 和 $u_0(i, j)$ 分别代表原图像和修复后的图像在对应像素点的像素值. 表 1、表 2 分别列出了两组实验的相应 MSE、PSNR 和修复时间的统计结果, 表中 MSE 表示待修复图像与原始正常图像之间的均方差, MSE1 表示修复后的图像与原始正常图像之间的均方差, PSNR 表示待修复图像的峰值信噪比, PSNR1 表示修复后图像的峰值信噪比.

表 1 实验 1 统计结果

实验 1	TV 算法	文献[4] 算法	本文 算法
MSE	18 224		
MSE1	1 262.9	1 154.4	218. 1421
PSNR/dB	23.6461		
PSNR1/dB	31. 3233	31.645 8	42.8 650
运行时间/s	11. 9	15.2	68.8

表 2 实验 2 统计结果

实验 2	TV 算法	文献[4] 算法	本文 算法
MSE	20 182		
MSE1	1 790.9	1 510.4	241. 5794
PSNR/dB	22.3656		
PSNR1/dB	29. 4404	30.065 3	41.5 437
运行时间/s	13. 3	15.7	70.1

从表中的数据进一步看出本文算法修复后的图像均方误差值较小, 修复后的图像 PSNR 值比 TV 算法和文献[4]有很大的提高, 但在运行速度上有待改进, 因此, 本文算法从主客观两方面相比较优于原始 TV 算法.

4 结语

本文介绍了 TV 模型在图像修复的应用, 分析了

该模型的特点, 鉴于 TV 模型不具备反扩散的能力, 在此基础上对原 TV 模型进行了改进, 引入一个扩散函

(下转第 58 页)

www.c-s-a.org.cn

www.c-s-a.org.cn

```

>#*3063012201945#* //发送方位角设定信息;
<#*320432505793#* //返回方位角设定结果;
>#*4060012221818#* //发送俯仰角设定信息;
<#*420436605829#* //返回俯仰角设定结果;
>#*5#* //发送参数检测命令,此命令周期发送;
<#*520435305835#* //周期返回电流和电压数据;

```

说明:当系统测控单元接收到远程终端发来的 GSM 通信命令时,均需要返回相关结果信息,其中“*#”和“#*”分别为命令的起止标识。

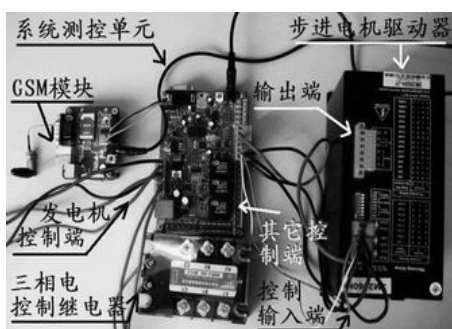


图6 测控系统电气连接实物图

4.2 结果分析

通过长时间的调试与测试,并根据测试规则分析

其数据信息,确定该测控系统工作正常,且系统远程终端能够远程测量并正常控制该系统测控单元。

5 结语

沼光一体化发电测控系统是将现有的沼气发电技术、光伏发电技术有效结合,并利用单片机 Atmega88 设计而成的。该设计实现了沼气发电、太阳能发电和蓄电池三个通道智能供电的功能,系统所选用的元器件及系统参数均按照工业级要求设计的,系统设计具有 GSM 远程控制测量反馈功能,完全适合于解决偏远山区或小型手工业工厂的供电问题。

参考文献

- 1 曾宝国,程远东.2kW 沼光互补一体化智能发电系统研究.现代电子技术,2011,34(5):192-201.
- 2 王际洲.一种新型太阳自动跟踪系统的设计.新能源及工艺,2009:22-24.
- 3 薛建国,张洁.基于单片机的太阳能电池自动跟踪系统的设计.长春师范学院学报,2005,24(3):26-30.
- 4 谭春毅,高峰.基于 GSM 的车载无线防盗系统.江南大学学报,2005,4(4):386-389.

(上接第 124 页)

数,以此区分对待不同的待修复区域.实验结果说明了该算法修复变化剧烈和较大破损的图像效果明显较好,使图像边缘清晰,过渡自然,其峰值信噪比和均方误差都有了明显的提高,两组实验一定程度上也验证了本文算法的可行性和有效性,但是本文算法运行时间有待提高,这将是后面工作的重点。

参考文献

- 1 Bertalmio M, Sapiro G, Caselles V. Image inpainting. Proc. ACM SIGGRAPH. 2000:417-424.
- 2 Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. Proc. PhysicalD, 1992(60):149-179.
- 3 Chan T, Shen J. Mathematical models for local non-texture inpainting. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2001, 62(3):1019-1043.
- 4 陈利霞,冯象初,王卫卫,宋国乡.加权变分的图像去噪算法.

系统工程与电子技术,2010,32(2):392-396.

- 5 Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990,12(7):629-639.
- 6 Wen YW, Chan RH, Yip AM. A Primal-Dual Method for Total Variation Based Wavelet Domain inpainting. IEEE Trans. on Image Processing, 2012,21(1):106-114.
- 7 Bugeau A, Bertalmio M, Caselles V, Sapiro G. A Comprehensive Framework for Image Inpainting. IEEE Trans. on Image Processing, 2010,19(10):2634-2645.
- 8 刘庚龙,檀结庆.一种改进的整体变分图像修复方法.计算机工程与应用,2012,48(7):194-196.
- 9 肖志云,张文霞,姜玉莉.基于快速行进法的快速图像修复算法.计算机应用,2007,27(12):60-65.
- 10 林云莉,赵俊红,朱学峰.改进的 TV 模型图像修复算法.计算机工程与设计,2010,31(4):776-779.