

图像中边缘信号高斯平滑后的偏移问题^①

蒋爱德, 陈炎龙

(郑州牧业高等专科学校 信息工程学院, 郑州 450011)

摘要: 高斯平滑是一种常见的预处理方式, 但小尺度下的高斯平滑不能完全消除噪声, 而大尺度下的高斯平滑可能引起图像边缘的偏移. 对此进行了分析, 提出了大尺度高斯平滑下的边缘偏移补偿方法, 并利用多尺度理论解决了下获得图像的精确的、少噪声的边缘难题.

关键词: 高斯平滑; 边缘检测; 边缘偏移

Edge Signals Offset Problems After Gauss Smooth in Image

JIANG Ai-De, CHEN Yan-Long

(Department of Information and Engineering, Zhengzhou College of Animal Husbandry Engineering, Zhengzhou 450011, China)

Abstract: Gauss smooth is a common pretreatment way, but it can't eliminate noise in small scale and cause image edge offset in large scale. The paper analyzed it, proposed edge offset compensation method under larger scale gauss smooth, and solved the problem of gaining precise and less noise image edge by using multi-scale theory.

Key words: Gauss smooth; edge detection; edge offset

数字图像的噪声主要来源于图像的获取和传输过程, 在图像预处理中, 对图像进行平滑, 去除噪声, 恢复原始图像是一个重要内容. 图像平滑处理的方法多种多样, 有邻域平均、中值滤波, 高斯滤波、灰度最小方差的均值滤波等. 其中高斯滤波是一种比较常用的平滑方法. 但是高斯平滑在抑制噪声的同时能引起边缘偏移, 本文对这一问题进行了研究分析.

1 图像中边缘信号的分析

图像的边缘是图像的最基本特征. 所谓边缘是指其周围像素灰度有阶跃变化或屋顶变化的那些像素的集合. 如下图所示: 图中第一排是一些图像的边缘模型^[1]示例, 不同的深浅代表不同的灰度. 第二排是沿图像水平方向的一个剖面图.

图像边缘模型中, 灰度发生变化的地方就是边缘, 对上述两种边缘模型图做数学建模分析, 发现图 1 中的(a)图与阶跃信号相似, (b)图与矩形边缘信号相似. 为研究方便, 分别将两种信号理解为单位阶跃信号和

矩形单位脉冲信号.



图 1 图像中的两种常见信号

单位阶跃信号用 $\varepsilon(x)$ 表示, 定义为

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (1)$$

从 $-a$ 处起始, 到 a 处结束, 宽度为 $2a$ 的矩形单位脉冲信号, 定义为

$$p(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (2)$$

^① 收稿时间:2012-05-03;收到修改稿时间:2012-05-28

2 图像中的信号高斯平滑研究

高斯平滑就是将图像中的信号函数与高斯函数做卷积。在图像进行高斯平滑过程中，一般以正态分布函数作为高斯函数。其离散形式就是对高斯函数中心两边等距离采样求权得到高斯模板，如 3×3、5×5 模板等，将高斯模板在图像中逐像素移动，并对每个像素进行指定数量的过程就是卷积^[2]过程。设一维高斯函数为

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

对于阶跃函数，高斯函数与(1)式做卷积：

$$g(x) * \varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \varepsilon(x-\tau) d\tau \quad (3)$$

当 $x-\tau < 0$ 时， $\varepsilon(x-\tau) = 0$ 。当 $x-\tau > 0$ 时， $\varepsilon(x-\tau) = 1$ 。故(3)式为：

$$g(x) * f(x) = \int_{-\infty}^x g(\tau) d\tau \quad (4)$$

(4)式右边部分是标准正态分布的分布函数。将高斯函数与阶跃函数做卷积，用 Matlab 模拟图形来验证，如图 2 所示。

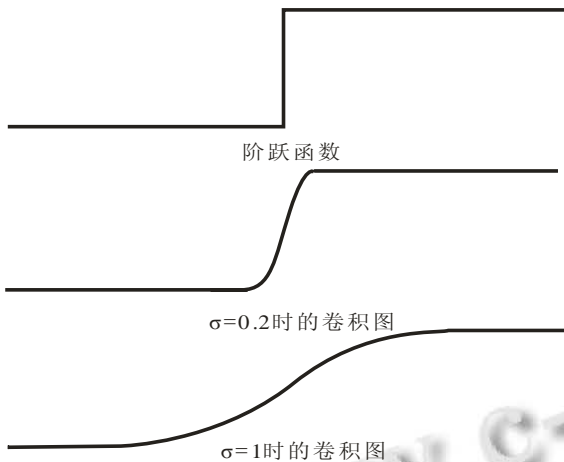


图 2 阶跃函数与高斯函数做卷积

从图 2 中来看，做卷积后的函数是高斯函数的左半部分，边缘点仍处于中间位置，所以边缘点没有发生偏移。

矩形脉冲函数可以用阶跃函数表示，即

$$p(x) = \varepsilon(x+a) - \varepsilon(x-a) \quad (5)$$

将高斯函数与(5)式做卷积

$$\begin{aligned} g(x) * p(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) p(x-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) [\varepsilon(x+a-\tau) - \varepsilon(x-a-\tau)] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \varepsilon(x+a-\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \varepsilon(x-a-\tau) d\tau \end{aligned}$$

根据前面对阶跃函数的分析，上式可写为

$$g(x) * P(x) = \int_{-\infty}^{x+a} g(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{x-a} g(\tau) d\tau \quad (6)$$

当 $a=1$ 时，用 $\sigma=0.2$ 和 $\sigma=1$ 的高斯函数分别与 $a=1$ 的矩形函数做卷积，用 Matlab 模拟后的图形如图 3 所示。

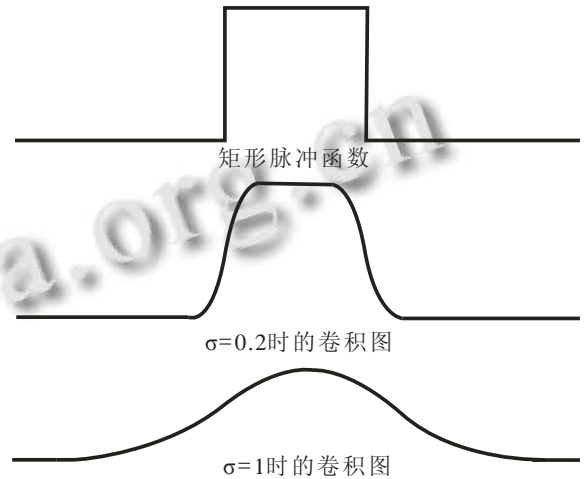


图 3 矩形脉冲函数与高斯函数做卷积

由图 3 可以发现，当尺度 σ 小的时候，矩形脉冲信号的顶端没有被平滑掉，也就是说，图像达不到平滑的效果。当尺度 σ 大的时候，图像中的边缘会向两边发生偏移。在试验过程中发现，当高斯函数的宽度与矩形脉冲的宽度相等时，图像边缘既达到平滑效果而且边缘没有发生平移。所以在图像平滑过程中，既要使信号达到平滑效果，又不能使信号边缘发生偏移，选择合适的尺度对图像平滑是很重要的。

从数学统计的理论可知，高斯函数区间 $(-2.58\sigma, 2.58\sigma)$ 上的面积占总面积的 99%，如图 4 所示。

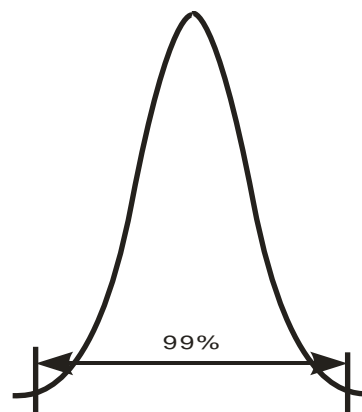


图 4 高斯函数的面积分布

假如矩形脉冲函数中 a 已知的情况下，用 $\sigma = a/2.58$ 得出高斯函数的尺度，然后用高斯函数与矩形脉冲函数做卷积，Matlab 结果如图 5 所示。

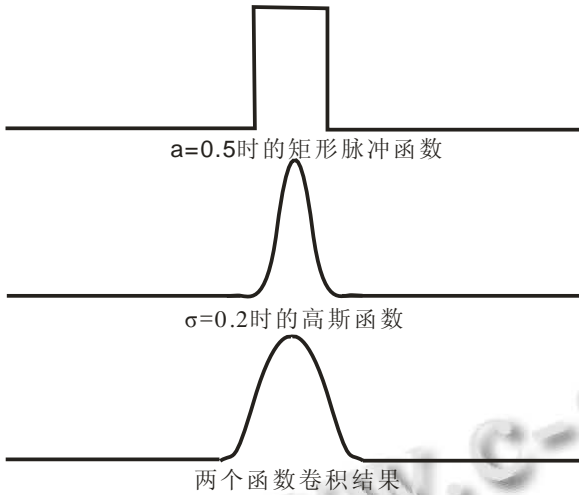


图 5 矩形脉冲函数与高斯函数做卷积

从图 5 可以看出，当高斯函数的宽度与矩形脉冲函数的宽度相等的时候，矩形脉冲边缘信号与高斯函数做卷积后，矩形脉冲函数刚好得到平滑而没有发生偏移。当 $a < a/2.58$ 时候，边缘不会发生偏移。反之，则会发生偏移。

当 a 已知的情况下，以 $\sigma = a/2.58$ 为基准尺度，记为 $\bar{\sigma}$ ，以 $\bar{\sigma}$ 的倍数分别对矩形脉冲函数做卷积。用 Matlab 模拟后得到矩形脉冲函数边缘的偏移结果，并以 σ 为 x 轴， m 为 y 轴，将这些点用线连接起来，其结果如图 6 所示。

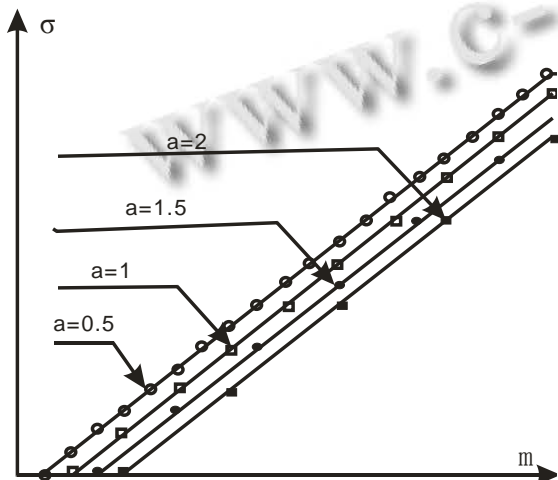


图 6 不同尺度下的矩形脉冲边缘偏移图

如图 6 所示，不同尺度的高斯函数与单一矩形脉冲函数做卷积的结果可以连接成一条线。最后用 $y = kx + b$ 拟合直线，其中， x 代表高斯函数尺度 σ ， y 代表矩形脉冲函数与不同尺度高斯函数做卷积后的偏移距离。将表 1 结果代入，计算结果为 $k = 1.25$ ，当 a 值为 0.5, 1, 1.5, 2 时， b 值为 -0.25, -0.5, -0.75, -1。从计算结果分析，当 $a = 0.5p$ ， $b = -0.25p$ ，这里 p 为倍数。从而得出偏移距离：

$$y = 1.25x - 0.25 \times (a/0.5) = 1.25x - 0.5a \quad (7)$$

3 图像高斯平滑后的边缘检测

图像平滑的目的就是为了减少和消除图像中的噪声，以改善图像质量，有利于抽取图像的特征进行分析。但由于物理和光照等原因，实际图像中的边缘常常发生在不同的尺度范围上，并且每一边缘的尺度信息是未知的。高斯平滑实际上是用单一尺度的高斯函数与图像中不同的信号做卷积。就前面的信号分析结果进行分析，阶跃函数与高斯函数做卷积后边缘不会发生偏移，而矩形脉冲函数与高斯函数做卷积后边缘可能发生偏移。这样的结果造成用小尺度的高斯平滑达不到消除噪声的目的，大尺度的高斯平滑容易造成图像边缘的偏移，这就是边缘信号的多尺度特征^[3]。

根据尺度空间^[4]理论，采用从小到大不同尺度的高斯函数平滑图像，平滑的同时采用边缘检测算子检测图像的边缘，随着尺度的增大，对发生偏移的边缘进行补偿修正。根据采样理论，图像中 $0 < a < 0.5$ 的情况不可能出现，所以高斯平滑最小尺度选择为 $\sigma = \frac{a}{2.58} = \frac{0.5}{2.58} \approx 0.2$ ，然后以 0.2 的倍数选择尺度，以 m 为偏移距离， p 为倍数，代入式得：

$$m = 1.25 \times 0.2p - \frac{a}{2} = 0.25p - 0.5a \quad (8)$$

图像的边缘检测采用 Prewitt 算子，这种边缘检测算子使用的是两个有向算子，每一个逼近一个偏导数。与图像 $f(x, y)$ 做卷积后得到水平方向上的梯度 $\varphi_x(x, y)$ 和垂直方向上的梯度 $\varphi_y(x, y)$ 。

则图像 $f(x, y)$ 上的梯度的模用 $Mf(x, y)$ 表示

$$Mf(x, y) = \sqrt{\varphi_x(x, y)^2 + \varphi_y(x, y)^2} \quad (9)$$

其角度等于平面 (x, y) 中梯度方向上的夹角 $Af(x, y)$ 。

$$\text{则 } Af(x, y) = \begin{cases} \alpha & \varphi(x) \geq 0 \\ \pi - \alpha & \varphi(x) < 0 \end{cases} \quad (10)$$

其中 $\alpha = \arctan\left(\frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}\right)$

由(9)~(10)可看出: $f * \varphi(x, y)$ 的剧烈变化点(即为拐点)正是那些梯度方向 $Af(x, y)$ 上 $Mf(x, y)$ 的局部极大值. 以局部极大值为边缘点, 以两个相近的方向相反的边缘点的 $1/2$ 为 a , 从小尺度逼近大尺度^[5], 并补偿大尺度高斯平滑下的边缘偏移 m . 因此在图像平面上模取极大值的那些点的连线构成图像的边缘, 而这些边缘点可从(9)、(10)式中得出, 这就是多尺度下的边缘检测^[6,7].

以辣椒图像为例, 图 8 中(a)图像是小尺度高斯平滑后边缘检测得到的图像的右上角部分, 从中可以看出边缘中包含一些噪声信号. (b)图像是大尺度高斯平滑后边缘检测得到的图像的右上角部分, 从中可以看出, 虽然抑制了噪声, 但是造成图像边缘的偏移. 而(c)图是采用多尺度的理论及本文提出的边缘偏移补偿方法得到的边缘局部图像, 可以看出不仅抑制了噪声, 而且解决了图像边缘的偏移问题.



图 7 原始辣椒图像



(a) (b) (c)

图 8 不同尺度高斯平滑后得到的局部边缘图像

4 结语

本文对高斯平滑后图像中矩形脉冲边缘的偏移问题进行了研究, 解决了小尺度高斯平滑不能很好的抑制噪声, 大尺度高斯平滑下图像中的一些边缘偏移的问题. 实际上, 在获取图像的过程中, 由于受到椒盐噪声、高斯噪声等噪声的影响, 图像的边缘信号差别很大, 本文只是就两种常见信号建立理想模型并进行了分析, 对于更复杂的图像信号, 还需要进一步分析研究.

参考文献

- 1 Shah M, Sood A. Pulse and Staircase Edge Models. Computer Vision Graphics Image Process, 1986,34:321-343.
- 2 Cabml B, Leedom L. Imaging vector fields using line integral convolution. Computer Graphics, 1993,27(4):263-270.
- 3 Mallat S, Zhong S. Characterization of Signals from Multi-scale Edge. IEEE Trans PAMI, 1992,14(7):710-732.
- 4 Canny J. A computational approach to edge detection. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1986,8(6):679-698.
- 5 Feng X, Milanfar P. Multi-scale principal components analysis for image local orientation estimation. Proc. of the 36th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, PacificGrove, CA, November 2002.
- 6 Ziou D, Tabbone S. A Multi-Scale Edge Detector. Pattern Recognition, 1993,26(9):1305-1314.
- 7 Brown MA, Blackwell KT, Khalak H Getal. Multi-scale edge detection and feature binging: An integrated approach. Pattern Recognition, 1998,31(10):1479-1490.