

# 三维线性倒立摆模型在双足机器人系统中的应用<sup>①</sup>

陈 华, 刘国栋

(江南大学 物联网工程学院, 无锡 214122)

**摘 要:** 机器人稳定的步行行走模式在双足机器人的控制中占有很重要的地位, 提出了一种基于三维线性倒立摆的机器人行走模型。通过机器人的三维倒立摆模型得到机器人质心的位置和速度, 再结合机器人的逆运动学, 求得机器人各关节的关节角度, 驱动机器人关节运动。从而得到机器人完整的运动轨迹。

**关键词:** 双足机器人; 三维线性倒立摆; 逆运动学

## Three-Dimensional Linear Inverted Pendulum Model in the Biped Robot System

CHEN Hua, LIU Guo-Dong

(Internet of Things Engineering Institute, Southern Yangtze University, Wuxi 214122, China)

**Abstract:** The stable walking pattern plays an important role in the control of biped robot. This research proposes a three-dimensional linear inverted pendulum model of walking robot. Through the three-dimensional inverted pendulum, the location of center of mass and speed of the robot can be calculated, combined with the robot's inverse kinematics, the angle of each joint of robot can be obtained. Then, these angles can be used to drive the movement of each joint of robot. At last, the complete trajectory of robot can be obtained.

**Key words:** biped robot; three-dimensional linear inverted pendulum; inverse kinematics

### 1 引言

自上世纪五十年代在美国诞生了第一台工业机器人之后, 随着科学与技术的发展, 以及社会的进步, 机器人迅速进入了社会的各个方面, 在工业、服务行业及军事等多个领域做出了不可磨灭的贡献。与其他类型的机器人相比, 双足机器人适合在人类生活和工作环境中与人协同工作; 对步行环境有较好的适应性, 可在非结构性的复杂地面行走(进入狭窄空间、跨越障碍、上下台阶、上下斜坡、在不平整地面运动等)。

为了使机器人稳定地行走, 就必须对机器人建立一个精确的数学模型, 以实现对其步态的控制。近几十年来, 许多研究者已经提出了多种数学模型, 像被动行走, 非线性摆。但这些模型由于复杂度过高, 对外部环境的要求过高等各种原因, 一般达不到工程应用的要求。而三维线性倒立摆模型作为一种简化模型, 使用工程应用的实现, 且其对环境的要求相

对较低<sup>[1-4]</sup>。本文将三维线性倒立摆模型展开对机器人的研究。

### 2 运动学建模

本课题所用的硬件平台为 AF10 机器人, 该机器人一共有 21 个自由度, 其结构简图如图 1 所示<sup>[5]</sup>。

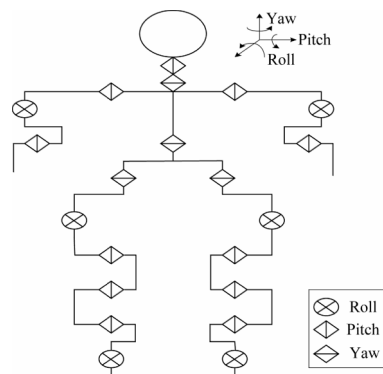


图 1 AF10 机器人的结构简图

<sup>①</sup> 收稿时间:2011-11-21;收到修改稿时间:2012-01-03

当考虑其双足行走时，其运动学简化模型如图 2 所示。

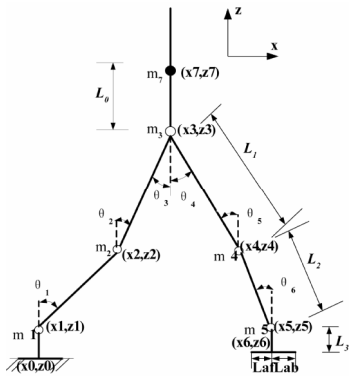


图 2 AF10 的运动学模型简图

其中  $L_0$ 、 $L_1$ 、 $L_2$  分别表示髋关节到质心、大腿和小腿的长度； $L_3$  表示踝关节的高度， $m_i$  表示机器人各连杆的质量； $(x_i, z_i)$  为各个关节（即连杆质心）的坐标， $i=1\sim 7$ ； $\theta_1\sim\theta_7$  为各个关节的转角。

设定以下几个增量，用来描述类人机器人关节运动的变化量；髋关节相对于支撑脚底坐标的运动变化量为  $(\Delta x_3, \Delta z_3)$ ，髋关节相对于摆动脚底坐标的运动变化量为  $(\Delta x_6, \Delta z_6)$ 。

则有图中的几何关系可得：

$$\begin{cases} x_3 = x_3 - x_0 \\ z_3 = z_3 - z_0 - L_3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \Delta x_6 = x_6 - x_3 \\ \Delta z_6 = z_6 - z_3 + L_3 \end{cases} \quad (2)$$

则：

$$\begin{cases} \Delta x_3 = L_2 \sin \theta_1 + L_1 \sin \theta_2 \\ \Delta z_3 = L_2 \cos \theta_1 + L_1 \cos \theta_2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_6 = L_1 \sin \theta_5 + L_2 \sin \theta_6 \\ z_6 = L_1 \cos \theta_5 + L_2 \cos \theta_6 \end{cases} \quad (4)$$

又由于机器人的大腿、小腿腿长相等。即  $L_1 = L_2$ ，所以由 (3) 式可得

$$\begin{cases} \theta_1 = \arccos \frac{\sqrt{\Delta x_3^2 + \Delta z_3^2}}{2L_1} + \arctan \frac{\Delta x_3}{\Delta z_3} \\ \theta_2 = -\arccos \frac{\sqrt{\Delta x_3^2 + \Delta z_3^2}}{2L_1} + \arctan \frac{\Delta x_3}{\Delta z_3} \end{cases} \quad (5)$$

其中， $-\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ 。

同样，对 (4) 式进行变换得

$$\begin{cases} \theta_5 = \arccos \frac{\sqrt{\Delta x_6^2 + \Delta z_6^2}}{2L_1} + \arctan \frac{\Delta x_6}{\Delta z_6} \\ \theta_6 = -\arccos \frac{\sqrt{\Delta x_6^2 + \Delta z_6^2}}{2L_1} + \arctan \frac{\Delta x_6}{\Delta z_6} \end{cases} \quad (6)$$

其中， $-\frac{\pi}{2} < \theta_5 < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \theta_6 < \frac{\pi}{2}$ 。

又由机器人的髋部与脚底与地面保持平行，可得约束条件：

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0 \\ \theta_4 + \theta_5 + \theta_6 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$\text{得} \begin{cases} \theta_3 = -\theta_1 - \theta_2 \\ \theta_4 = -\theta_5 - \theta_6 \end{cases} \quad (8)$$

### 3 三维倒立摆模型的算法

通过观察双足步行动物的行走模式可以发现，这些动物的质量大部分集中于上半身，例如人的上半身质量占到了体重的 70%，而鸟类的更多，可以占到 90%。本课题所采用的 AF10 机器人也如此，其控制器位于机器人的上半身，上半身的质量约占机器人质量的 80%。在以下的理想条件下机器人可以简化成如图 3 所示的模型。

- 1) 机器人的髋部与脚底与地面保持平行。
- 2) 机器人的重心高度保持不变。

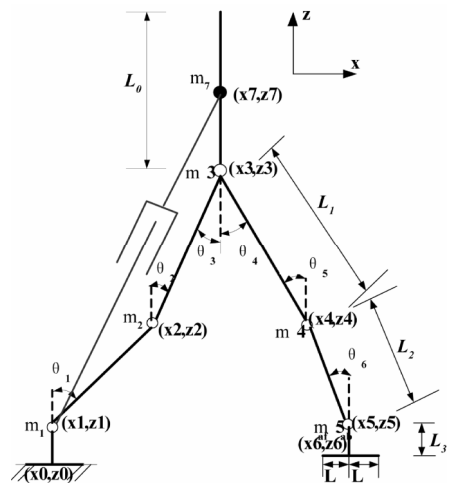


图 3 机器人的倒立摆模型图

3) 在机器人的行走过程中,其转动能量要比平动能量小的多,转动能量忽略不计。

倒立摆模型就是将机器人的质心到踝关节等效成一个移动可伸缩的连杆。通过机器人的腿部运动,可以改变倒立摆连杆的长度,并保持机器人的重心高度不变。

### 3.1 单腿支撑阶段

首先考虑机器人的单腿支撑阶段,以机器人的踝关节为原点 O,建立如图 4 所示的模型。

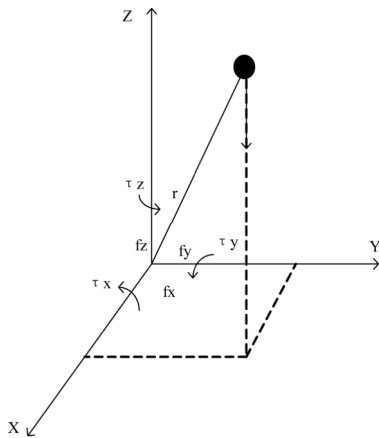


图 4 单腿倒立摆模型

其中  $f_x, f_y, f_z$  为机器人脚底所受的力在 X,Y,Z 方向的分量,  $\tau_x, \tau_y, \tau_z$  为地面对机器人的反作用力的力矩在 X,Y,Z 方向的分量。分别对 X, Y 轴进行力矩分析,可得如下微分方程:

$$\begin{cases} \tau_y + mgx = m\ddot{x}z - m\dot{z}\dot{x} \\ \tau_x - mgy = m\ddot{y}z - m\dot{z}\dot{y} \end{cases} \quad (9)$$

式中(x, y, z)表示质心的坐标, g 是重力加速度, m 为机器人的质量。

由于  $\tau_x, \tau_y$  是由踝关节的驱动电机决定的主动力矩,力矩越小,能量消耗越小,所以我们分析  $\tau_x, \tau_y$  都为 0 的情况。在机器人的行走过程中,机器人的重心高度一般保持不变,所以  $\dot{z} = 0$ 。则上述两式可以写成<sup>[6]</sup>:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{g}{z} x \\ \ddot{y} = \frac{g}{z} y \end{cases} \quad (10)$$

解这两个微分方程可得

$$\begin{cases} x(t) = x(0) \cosh(t/\sqrt{z/g}) \\ \quad + \sqrt{z/g} \dot{x}(0) \sinh(t/\sqrt{z/g}) \\ \dot{x}(t) = x(0)/\sqrt{z/g} \sinh(t/\sqrt{z/g}) \\ \quad + \dot{x}(0) \cosh(t/\sqrt{z/g}) \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} y(t) = y(0) \cosh(t/\sqrt{z/g}) \\ \quad + \sqrt{z/g} \dot{y}(0) \sinh(t/\sqrt{z/g}) \\ \dot{y}(t) = y(0)/\sqrt{z/g} \sinh(t/\sqrt{z/g}) \\ \quad + \dot{y}(0) \cosh(t/\sqrt{z/g}) \end{cases} \quad (12)$$

### 3.2 双腿行走模型

在单腿支撑的终止时刻,只要将另一只脚摆到合理的位置,质心就有了新的支撑点。以该新支撑点为坐标原点 O,前一个支撑点的终止状态为初始状态,机器人又开始了新的单腿倒立摆,将这些单腿倒立摆连接起来就形成了机器人连续的行走模式。其示意图如图所示<sup>[7]</sup>。

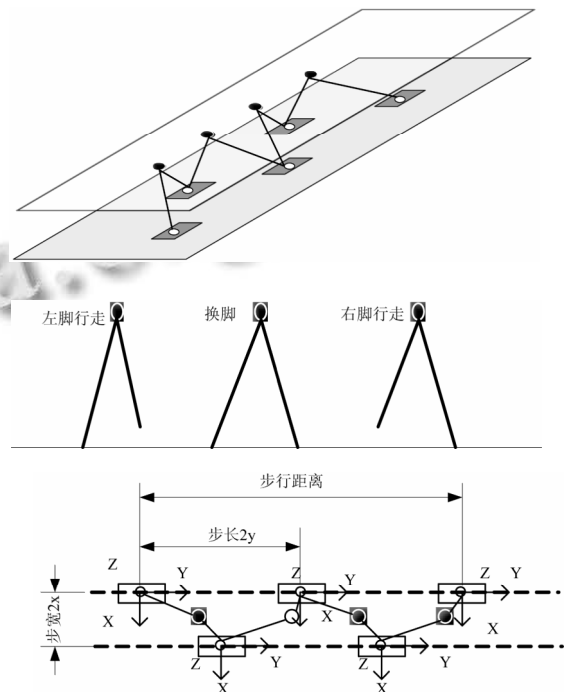


图 5 机器人的行走轨迹示意图

在实际的步行中,机器人从单腿着地到单腿提起的支撑时间给定,步行的步长和步宽也给定。如图所

示,机器人的步长为  $2y$ , 步宽为  $2x$ , 单腿步行周期为, 步行的方向为沿  $Y$  轴。根据单腿步行的对称性可得, 机器人步行的初始位置为  $((-1)^{n+1}x, -y)$ , 终止位置为  $((-1)^{n+1}x, y)$ , 其中  $n$  表示机器人步行的第  $n$  步步数。由式 (11) (12) 可解得机器人的步行终止速度为

$$\begin{cases} v_x = (-1)^{n+1}x(C-1)/(\sqrt{z/g}S) \\ v_y = y(C+1)/(\sqrt{z/g}S) \end{cases} \quad (13)$$

$$C = \cosh(t_s/\sqrt{z/g}) \quad S = \sinh(t_s/\sqrt{z/g})$$

利用单腿步行单元很容易形成如图所示的步行轨迹, 对步长为  $2y$ , 步宽为  $2x$  的直线步行, 只需将相同的步行单元连接起来而交替改变  $x$  轴分量的符号即可<sup>[8]</sup>。

由定性分析机器人的步行单元可得以下规律: 单腿支撑的下一步在较近处落脚时速度加大, 而较远时, 速度减小。照此原理, 启动时, 可让机器人以较小的步伐启动, 待取得合适的前向速度时进入稳定的步行周期; 而当终止时, 只要合理地迈出一大步, 即当  $y = 0$  时,  $v_y$  接近于 0, 机器人即停止。

当机器人需要转向时, 我们假设转向的角度为  $\theta$ , 转向的轨迹示意图如图 6 所示。

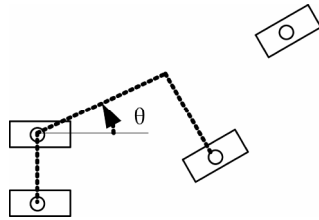


图 6 机器人步行转向示意图

由图可求得机器人的终止位置为

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{n+1}x \\ y \end{bmatrix} \quad (14)$$

则终止速度为

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{n+1}v_x \\ v_y \end{bmatrix} \quad (15)$$

上两式的  $n$  均表示第  $n$  步行走的步数。

### 3.3 机器人的步行流程图

基于以上的机器人运动学和倒立摆模型的分析, 我们可以得到双足机器人行走的流程图, 如图 7 所示。

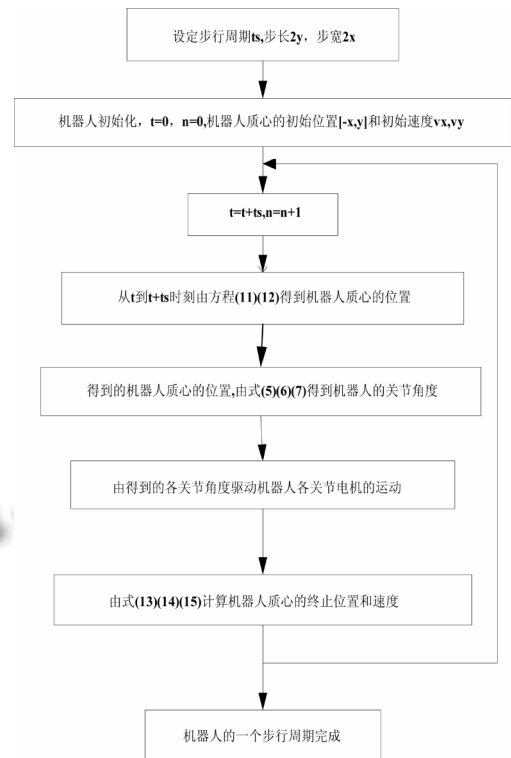
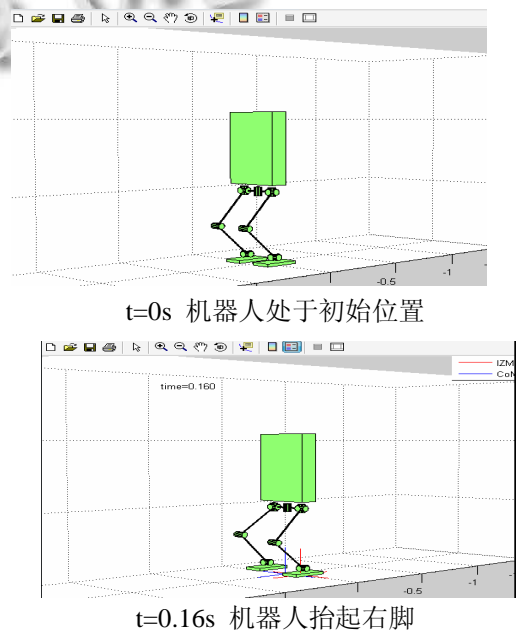
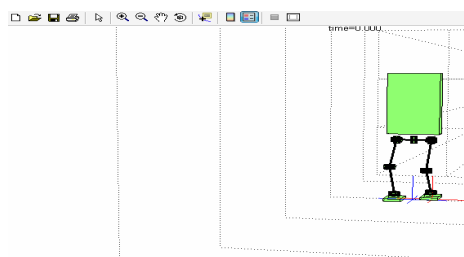


图 7 机器人步行流程图

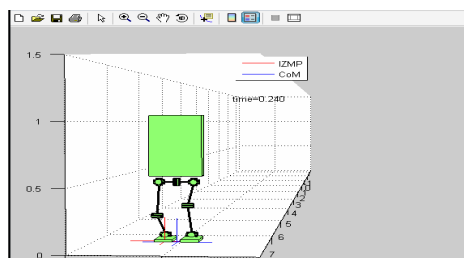
### 4 软件仿真及硬件实现

本课题所用到的仿真平台为 MATLAB, 设定机器人单步行走的周期为  $0.34s$ , 步长  $2y=0.2m$ , 步宽  $2x=0.05$ , 质心高度为  $0.3m$ , 通过在 MATLAB 中的 M-file 里编程, 模拟了一个 3D 环境中的机器人行走仿真实验。实验仿真图如图 8 所示。





t=0.34s 机器人右脚着地



机器人走完 2.8m

图 8 机器人的 MATLAB 仿真图

从前三个仿真图可以看出机器人在一个周期  $t=0.34s$  内的运动情况，最后一个仿真图表示的是机器人稳定地行走了 2.8m 以后停住。

通过将 MATLAB 改编成 C 语言，在 AF10 机器人上运行以后，得到的 AF10 机器人步行图如图 9 所示。

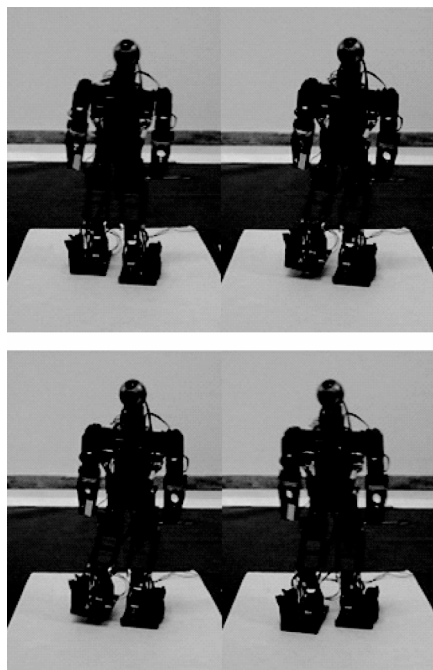


图 9 AF10 机器人的步行图

从图中可以看出，基于以上的三维倒立摆模型，AF10 机器人实现了稳定的行走。

### 5 结语

本文给出了一种基于三维倒立摆的机器人步态模型方法。首先，通过单腿模型的推导，得到机器人的质心位置和速度，再将相同的步行单元连接起来，即得到了机器人完整的步行行走模型。通过机器人逆运动学的求解，可以得到机器人各关节的运动角度，从而驱动机器人的运动。软件仿真实验和机器人硬件平台上的实现，都表明该方法取得了很好的效果。

基于以上方法的设计的 AF10 机器人在 2011 年 8 月 23 日甘肃兰州全国机器人大赛上取得了三等奖的成绩。

### 参考文献

- 1 Kajita S, Kanehiro F, Kaneko K, Fujiwara I, Yokoi K, Hirukawa H. A Realtime Pattern Generator for Biped Walking. IEEE, International Conference on Robotics & Automation, 2002, 5.
- 2 Feng S, Sun ZQ. A Simple Trajectory Generation Method for Biped Walking. Conf. on Control, Automation, Robotics and Vision Hanoi, Vietnam, 2008, 12: 17-20.
- 3 Gong X, Tian YT, Liu DJ. On Three-dimensional Model of Biped Walking Robot. Proceedings of the 29th Chinese Control Conference, 2010, 7: 29-31.
- 4 Sakka S, Hayot C, Lacouture P. A generalized 3D inverted pendulum model to represent human normal walking. IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots Nashville, 2010, 12: 6-8.
- 5 朱嘉翔. 两足步行移动的步态分析与优化[硕士学位论文]. 合肥: 中国科技大学, 2005.
- 6 程南瑞. 类人机器人控制系统的底层设计与步态规划[硕士学位论文]. 无锡: 江南大学, 2009.
- 7 Aoyama T, Sekiyama K, Hasegawa Y, Fukuda T. PDAC-based Underactuated 3D Bipedal Walking. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2009, 5: 12-17.
- 8 梶田秀司. 管贻生译. 仿人机器人. 北京: 清华大学出版社, 2007.