

带有通信时滞的二阶多智能体系统一致问题^①

缪盛, 崔宝同

(江南大学 物联网工程学院, 无锡 214122)

摘 要: 针对具有双向等时延的二阶无向通信拓扑系统, 采用带有通信时滞的线性一致控制率协议, 分析了使系统稳定的条件。由于系统的阶次较高, 直接对其特征方程进行分析是比较困难的, 提出了一种新的分析方法, 把系统的特征方程分解为多个子系统的乘积, 然后利用 CTCR 方法, 求得每个子系统对应的时滞最大值, 比较后得出使系统达到一致稳定的最大时滞, 作出了控制率边界曲线图并标出了稳定区域。结果表明, 在有向生成树的情况下, 当时滞小于决策值时, 系统能达到稳定。最后, 数值仿真验证了所得结果的有效性。

关键词: 渐进一致稳定; 二阶多智能体; 通信时滞

Consensus of Second-Order Multiagent Systems with Communication Delay

MIAO Sheng, CUI Bao-Tong

(School of IoT Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract: For a class of second-order multi-agent systems with a fixed and undirected communication topology and uniform delays systems, linear consensus protocols with time-delayed communications are adopted, the stability conditions are analysed. As the order of system is very high, the stability analysis of the characteristic equation becomes intractable. This paper proposes a new analysis approach via decomposing the characteristic equation of system into a set of factors and using the CTCR method, derives the communication delay of each eigenvalue, and obtains the accurate upper bound of delay of the system. We also explore the stability region generated through the protocol. The results show that in a case of a spanning tree, when time delay is less than the decision value, the stability of the system can be achieved. Finally, numerical simulation shows the effectiveness of the results.

Key words: consensus; second-order multi-agent systems; communication delay

近年来, 随着计算机技术、网络技术和通信技术的飞速发展, 多智能体系统的分布式协调控制问题引起了科学界的广泛关注。其中, 又以多智能体的一致性问 题最为热门。在多智能体系统中, 所有智能体的最终状态能趋于一致, 称为一致性问题。在早期的研究中, Olfati-Saber 和 Murray 基于 Fax 的工作^[1-2]在文^[3-4]中提出和解决动态智能体网络一致性问题的理论框架。随后很多学者对智能体网络的一致性问 题展开了广泛的研究。然而, 大多数实际系统中的智能体都通过速度和位置两个变量来调整其运动行为, 而不是仅仅对位置项的调整。因此, 研究二阶网络的一致性问 题是十分必要的。

文^[5]中利用 LMI 工具箱提出了一个近似算法, 给出了通信时滞的保守上界。文 [6-8] 利用了 CTCR(Cluster treatment of characteristic roots)的方法阐述了有关时滞上界的问题。吴文宇^[9,10]提出了通信拓扑的拉普拉斯矩阵特征值的实部和虚部在一致问题中都起着重要的作用, 并且给出了时滞上界的最大值。

但是目前关于位置项系数 k_1 和速度项系数 k_2 的取值与时滞的关系还没有一个精确的描述。本文基于 P. Lin^[11]提出的一个多智能体系统控制率, 假设通信拓扑是无相且连通的, 智能体之间的通信时滞固定且统一, 给出使系统达到一致稳定的充分条件。

① 基金项目:国家自然科学基金(61174021)

收稿时间:2011-12-06;收到修改稿时间:2012-02-18

1 问题描述

设 $G(V, E, A)$ 表示顶点集为 V ，边集为 E ，权重邻接矩阵为 A 的有向图。其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 表示具有 n 个节点的集合；图的每条边表示为 $e = (v_i, v_j)$ ，其中 v_i 为边的尾， v_j 为边的头。邻接矩阵 $A = [a_{ij}]$ ，其中矩阵元素 $a_{ij} \geq 0$ 表示节点 i 到节点 j 的连接权重，如果节点 i 可以得到节点 j 的信息，则 $a_{ij} > 0$ ，否则 $a_{ij} = 0$ 。定义矩阵 $D = \text{diag}\{d_i, i=1, \dots, n\}$ ，其中

$$d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{ 为矩阵 } A \text{ 的第 } i \text{ 行元素和(称为节点的出}$$

度)，则矩阵 $L = D - A$ 为图 G 的 Laplace 矩阵。当图 G 是无向图时，有 $a_{ij} = a_{ji}$ ，无向图 G 的 Laplace 矩阵是对称正半定矩阵，它的特征值为非负实数且有 $1^T L = 0$ 。若无向图 G 中任意两个不同的点都可以通过边连接起来，则称该无向图时连通的，对于无向连通图，它的 Laplace 矩阵可以写成 $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{\max}$ [12]。

不失一般性，本文考虑的系统含有 n 个智能体，其网络通信拓扑为无相连通图。

考虑具有双积分特性的智能体动态模型：

$$\dot{x}_i = v_i, \dot{v}_i = u_i, i \in \{1, \dots, n\} \tag{1}$$

其中 $x_i \in R^n, v_i \in R^n$ 分别为智能体 i 的位置，速度状态。 $u_i \in R^n$ 为控制输入。为了保证所有智能体位置状态能趋于一致，采用文[9-10]中使用的控制策略：

$$u_i = \sum_{v_j \in N_i} a_{ij} [k_1(x_j(t-\tau) - x_i(t-\tau)) + k_2(v_j(t-\tau) - v_i(t-\tau))] \tag{2}$$

其中， $k_1, k_2 > 0$ 为控制增益， τ 为智能体 j 传送给智能体 i 的信息时滞，邻接元素 a_{ij} 如前面定义。

将(2)代入式(1)，得到系统方程如下：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ L \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-\tau) \\ v(t-\tau) \end{bmatrix} \tag{3}$$

其中

$$x = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$$

$$v = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)]^T$$

一致性控制器(2)的目标就是当 $t \rightarrow \infty$ 时，使得

$$\|x_i - x_j\| \rightarrow 0, \|v_i - v_j\| \rightarrow 0.$$

2 系统的稳定性分析

本文利用频域中的结构奇异值方法，对照文[6-8]提出的 CTCR 步骤，得到了有关 k_1, k_2, τ 的准确边界。

考虑如下通信拓扑图

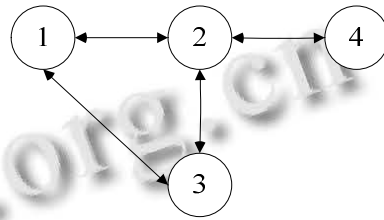


图 1 系统的通信连接拓扑图

在控制率 (3) 下，其特征方程为 $\det(sI - A - Be^{-\tau s}) = 0$ ，

其中 $A = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} & I_4 \\ 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} & 0_{4 \times 4} \\ -Lk_1 & -Lk_2 \end{bmatrix}$ ，得到：

$$s^8 + 8k_2 e^{-\tau s} s^7 + (8k_1 e^{-\tau s} + 19k_2^2 e^{-2\tau s}) s^6 + (38k_1 k_2 e^{-2\tau s} + 12k_2^3 e^{-3\tau s}) s^5 + (36k_1^2 k_2 e^{-3\tau s} + 19k_1^2 e^{-2\tau s}) s^4 + 36k_1^2 k_2 e^{-3\tau s} s^3 + 12k_1^3 e^{-3\tau s} s^2 = 0 \tag{4}$$

我们可以看出，特征方程是高阶的，这给理论分析带来了很大的困难，而且随着智能体数量的增加，特征方程的阶次将变得更高。本文提出一种分解方法，把系统的特征方程分解为多个子系统的乘积，使得计算量大大简化。

定理 1 对于控制率 (3)，系统的特征方程 $\det(sI - A - Be^{-\tau s}) = 0$ 可以被分解为多个子系统的乘积，子系统的数量与智能体的个数相等。

证明 考虑控制率(3)，我们将其写成如下形式：

$$\dot{y} = (I_n \otimes M) y(t) - (L \otimes N) y(t-\tau) \tag{5}$$

其中：

$$y = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$M, N \in R^{r \times r}$$

因为 L 是无相连接拓扑图的 Laplace 矩阵, 所以 L 是可对角化的。设存在一个非奇异矩阵 T , 使得

$$T^{-1}MT = \Lambda, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ 是一个对角矩阵,}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 是 L 的特征值。引入一个 $y = (T \otimes I_r)\xi \in R^{nr}$, 代入(5)式, 我们得到

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= (T^{-1} \otimes I_r)(I_n \otimes M)(T \otimes I_r)\xi(t) \\ &\quad - (T^{-1} \otimes I_r)(L \otimes N)(T \otimes I_r)\xi(t-\tau) \end{aligned} \quad (6)$$

当 (U, W) 和 (V, Z) 维数相同时,

$$(U \otimes V)(W \otimes Z) = UW \otimes VZ \quad (7)$$

(6)式变为

$$\dot{\xi}_{(t)} = (I_n \otimes M)\xi_{(t)} - (\Lambda \otimes N)\xi_{(t-\tau)} \quad (8)$$

由于 I_n, Λ 是对角矩阵, 方程(8)能块对角化, 所以(8)可以被分解为 n 个 r 阶系统, 每个系统有以下方程

$$\dot{\xi}_{(t)} = M\xi_{j(t)} - \lambda_j N\xi_{j(t-\tau)}, j = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

我们得到(7)的特征方程:

$$\det(sI_r - M - \lambda_j Ne^{-\tau s}) = 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

整个系统的特征方程是(10)中所有子系统特征方程的乘积

$$\begin{aligned} \det(sI_r - A - Be^{-\tau s}) \\ = \prod_{j=1}^n \det(sI_r - M - \lambda_j Ne^{-\tau s}) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

证毕

考虑如图 1 所示通信拓扑, 将定理 1 应用于控制率(11)有

$$\prod_{j=1}^n \det \left(\begin{bmatrix} s & \\ & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda_j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} e^{-\tau s} \right) = 0 \quad (12)$$

即

$$\prod_{j=1}^n s^2 + s\lambda_j k_2 e^{-\tau s} + \lambda_j k_1 e^{-\tau s} = 0 \quad (13)$$

对于(13)的一个子系统,

$$s^2 + \lambda_j(k_2 s + k_1)e^{-\tau s} = 0 \quad (14)$$

我们分别考虑 $\lambda = 0, 1, 3, 4$ 的情况。当 $\lambda = 0$ 时式(14)变为

$$s^2 = 0 \quad (15)$$

我们看出, 系统的稳定性与 τ 无关。

当 $\lambda \neq 0$ 时, 我们有

$$s^2 = -\lambda_j(k_2 s + k_1)e^{-\tau s} \quad (16)$$

CTCR 的第一步是求出方程(16)的虚根。

令 $s = wi$, 代入(16)可得

$$-w_j^2 = -\lambda_j(k_2 w_j i + k_1)e^{-i\tau w_j} \quad (17)$$

对上式两边取模, 我们有

$$w_j^4 - \lambda_j^2 k_2^2 w_j^2 - \lambda_j^2 k_1^2 = 0 \quad (18)$$

我们令 $w_j^2 = m, a = -\lambda_j k_2^2, b = -\lambda_j k_1^2$ 得到

$$m^2 + am + b = 0 \quad (19)$$

若(19)存在正实根, 则(18)必有虚根, 即系统能穿越虚轴。注意到 $a = -\lambda_j k_2^2, b = -\lambda_j k_1^2$, 根据劳斯判据, 劳斯表第一列的符号改变了一次, (19)有且仅有一个正实根, (18)存在一个虚根, 所以对于任何参数的选择, 系统的穿越频率是不变的。

我们把(17)式写成如下形式

$$\arctan \frac{0}{-w_j^2} = \arctan \frac{k_2 w_j}{k_1} - \tau w_j \quad (20)$$

得到

$$\tan(w_j \tau) = \left[\frac{w_j k_2}{k_1} \right] \quad (21)$$

则

$$\tau_k = \frac{1}{\omega_j} \arctan \frac{k_2 \omega_j}{k_1} + \frac{2k\pi}{\omega_j}, k = 0, 1, \dots, n \quad (22)$$

其中 w_j 的值由(18)式给出

$$\omega_j^2 = \frac{\lambda_j^2 k_2^2 + \sqrt{\lambda_j^4 k_2^4 + 4k_1^2 \lambda_j^2}}{2} \quad (23)$$

当(22)中的 k 取不同的值时,我们可以求得无数个等时间间隔的时滞,显然并不是所有的时滞都能使系统达到稳定,能使系统稳定的值我们由定理 2 给出。

为了验证定理 2 的有效性,我们先给出如下引理

引理 1^[9] 假设网络包含有向生成树,对于每个 $s^2 + \lambda_j(k_2 s + k_1)e^{-\tau s} = 0, 2 \leq j \leq N$, 总有

$$R\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)\Bigg|_{\tau \in \Psi} > 0.$$

定理 2 当且仅当

$$\tau < \frac{\arctan \frac{k_2 \sqrt{\frac{\lambda_{\max}^2 k_2^2 + \sqrt{\lambda_{\max}^4 k_2^4 + 4k_1^2 \lambda_{\max}^2}}{2}}}{k_1}}{\sqrt{\frac{\lambda_{\max}^2 k_2^2 + \sqrt{\lambda_{\max}^4 k_2^4 + 4k_1^2 \lambda_{\max}^2}}{2}}} \text{ 时}$$

系统能达到一致稳定。

证明 文^[6]提出根的变化趋势由下式决定

$$RT = \operatorname{sgn} \left[R\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)\Bigg|_{s=\omega i, \tau=\tau_c} \right]$$

其中

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (24)$$

$\tau = 0$ 时, (14)变为

$$s^2 + \lambda_j(k_2 s + k_1) = 0 \quad (25)$$

根据劳斯判据,方程的根都在左半平面,此时系统稳定。由引理 1 得出 $RT=+1$,随着 τ 的增加,系统特征根将会从左半平面移到唯一的穿越频率 $s = \omega i$,又因为 RT 是一个不变量,所以当特征根从左半平面运动到右半平面后,不会再回到左半平面。因此(22)式的取 $k_1, 2, \dots, n$ 时的 τ 值都会造成系统的

不稳定。所以 k 取 0, (22)式变为

$$\tau_j = \frac{1}{\omega_j} \arctan \frac{k_2 \omega_j}{3} \quad (26)$$

从(23)中我们看出, ω_j 与 λ_j 成正比,另外,由(26)可知 τ_j 的值与 ω_j 成反比,所以对于不同的 λ ,最大的 λ 值对应的 τ 最小值,即时滞的上界。证毕。

注 1 与文^[9]只讨论了控制增益 k_1, k_2 均取于 1 的情况相比,本文分析了 k_1, k_2 取不同值的情况,具有更小的保守性。

3 仿真示例

考虑图 1 所示的通信拓扑,根据代数图论,

$$\text{求得 } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 3 & & \\ & & 2 & \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L 的特征根为

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = 4$$

如前文所定义,取 $k_1 = 3$,运用式(26),改变 k_2 的值,得到 k_2 与 τ 的对应曲线如下图所示

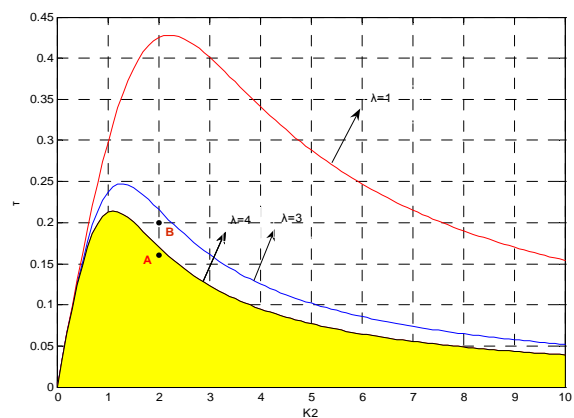


图 2 k_2 的取值与 τ 的关系

根据定理 2, 最大 λ 值对应的 τ 为最大时滞上界, 图中黄颜色部分表示稳定区域。为了验证理论的正确性, 取 A, B 两点, 其中 $A(2, 0.16)$ 位于黄色区域内, $B=(2, 0.2)$ 位于黄色区域外。 A, B 两点对应的 k_2 都相同, 均为 2, A 点的时滞比 B 点少 0.04s。随机定义初始速度和位置值

$$\mathbf{x} = [3 \quad 2 \quad 1 \quad 5]^T$$

$$\mathbf{v} = [0.5 \quad 0.2 \quad 0.3 \quad 0.7]^T$$

对于图 2 中 A 点, 可以得到图 3 和图 4 所示时间与速度、时间与位置的关系曲线。从仿真图看, 系统的速度, 位置关系随着时间的推移逐渐趋于一致, 所以系统在 A 点是稳定的。

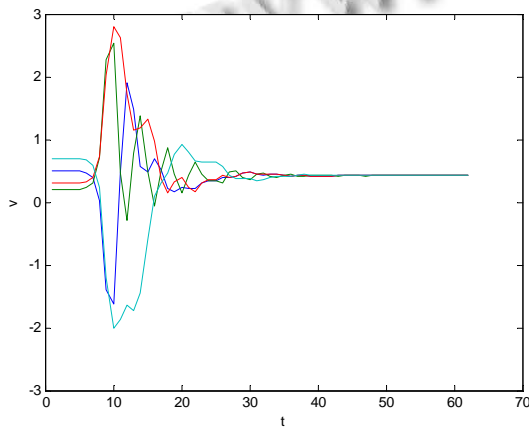


图 3 k_2 取 2, τ 取 0.16 时的速度关系曲线

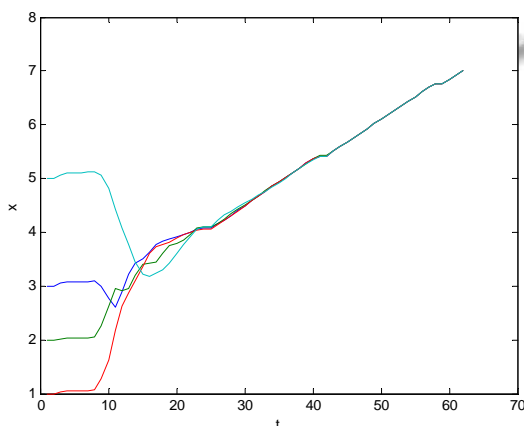


图 4 k_2 取 2, τ 取 0.16 时的位置关系曲线

再考虑点, 相应地可以得到图 5 和图 6。

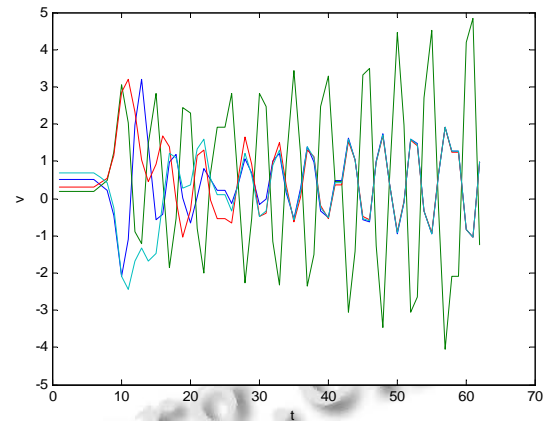


图 5 k_2 取 2, τ 取 0.2 时的速度关系曲线

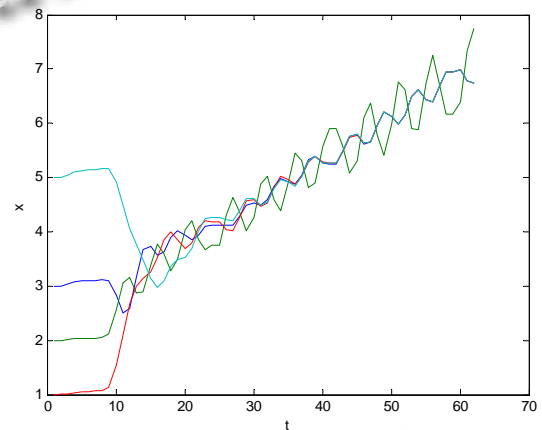


图 6 k_2 取 2, τ 取 0.2 时的位置关系曲线

从仿真图看, 系统的速度, 位置关系随着时间的推移不趋于一致, 所以系统在点是不稳定的, 所得的仿真结果与理论分析相吻合。

4 结论

在本文中, 我们研究了有向生成树条件下的具有固定时滞的二阶多智能体渐进一致问题。利用特征方程分解法和 CTCR 步骤, 计算了能使多智能体系统达到稳定的精确时滞范围。当智能体数量较多时, 特征方程分解法的优势将体现出来, 因为我们只求得最大特征值对应的时滞范围, 即为整个系统的时滞范围。数值例子和计算机仿真说明了所得结果的有效性。

参考文献

- 1 Fax JA. Optimal and Cooperative Control of Vehicle Formations. Pasadena, CA: Control Dynamical System, California Institute of Technology, 2001.

- 2 Fax JA, Murray R. Information Flow and Cooperative Control of Vehicle Formations. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2004,49(9):1465–1476.
- 3 Olfati-Saber R, Murray R. Consensus Protocols for Networks of Dynamic Agents. *Proceedings of the American Control Conference*, Denver. Colorado June 4–6,2003.951–956.
- 4 Olfati-Saber R, Murray R. Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays. *IEEE Trans. on Automatic Control*,2004,49(9):1520–1533.
- 5 Lin P, Jia Y. Further Results on Decentralized Coordination in Networks of Agents with Second-Order Dynamics. *IET Control Theory and Applications*, 2009,3:957–970.
- 6 Olgac N, Sipahi R. An Exact Method for The Stability Analysis of Time-Delayed Linear Time Invariant Systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*,2002,47:793–797.
- 7 Olgac N, Sipahi R. Complete Stability Robustness of Third Order LTI Multiple Time Delay Systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*,2005,41:1413–1422.
- 8 Olgac N, Sipahi R. An Improved Procedure in Detecting The Stability Robustness of Systems with Uncertain Delay. *IEEE Trans. on Automatic Control*,2006,51:1164–1165.
- 9 Yu WW, Chen GR, Cao M. On Second-Order Consensus in Multi-Agent Dynamical Systems with Directed Topologies and Time Delays. *Proc. of the Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*, Shanghai, China, Dec. 12-15,2009,3709–3714.
- 10 Yu WW, Chen GR, Cao M. Some Necessary and Sufficient Conditions for Second-Order Consensus in Multi-Agent Dynamical Systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2010,46:1089–1095.
- 11 Lin P, Jia Y. Distributed Control of Multi-Agent Systems with Second Order Dynamics and Delay-Dependent Communications. *Asian Journal of Control*,2008,10:54–59.
- 12 Lynch NA. *Distributed Algorithms*. Morgan Kaufmann, San Francisco,1997.

(上接第 88 页)

而且从仿真效果来看,这样获得的控制律依然能够得到较好的控制效果。

参考文献

- 1 Qin SJ. A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering*,2003,7(11):733–764.
- 2 邹志强.一种基于多面体描述系统的非线性预测控制. *同济大学学报*,2006,34(6):813–817.
- 3 黄西平,刘军.一种改进的神经网络非线性预测控制. *计算机仿真*,2006,23(4):145–148.
- 4 Bemporad A, Morari M, Dua V, Pistikopoulos EN. T11e Explicit Linear Quadratic Regulator for Constrained Systems. *Automatica*,2002,38:3–20.
- 5 Motee N, Jadbabaie A. Distributed Multi-Parametric Quadratic Programming. *IEEE Transactions on automatic control*, 2009,10(54):2279–2289.
- 6 张聚,丁靖.倒立摆系统显式模型预测控制. *控制工程*, 2010,17(4):551–556.
- 7 Rauová I, Kvasnica M. Separating Functions for Complexity Reduction of Explicit Model Predictive Control. *Institute of Automation.18th International Conference on Process Control*. Bratislava:2011:427–433.
- 8 Tanaka K. An Approach to Stability Criteria of Neural-Network Control Systems, *IEEE Transactions on neural networks*,1996,7(3):629–642.
- 9 Tanaka K. An Approach to Stability Criteria of Neural-Network Control Systems, *IEEE Transactions on neural networks*,1996,7(3):629–642.
- 10 Lofberg J. Modeling and solving uncertain optimization problems in YALMIP, *IFAC World Congress*,2008,6(11): 1337–1341
- 11 Kvasnica M, Grieder P, Baotic M, et al. Multi-Parametric Toolbox (MPT) in Hybrid Systems Computation and Control. *Institut für Automatik, Swiss Federal Institute of Technology*,2006.448–462.