

混合模因算法在求解带装箱约束的车辆路径问题中的应用^①



汪洋广, 陈 振

(中国科学技术大学 管理学院, 合肥 230026)

通讯作者: 汪洋广, E-mail: ygw@mail.ustc.edu.cn

摘 要: 带有回程取货约束的车辆路径问题 (Vehicle Routing Problem with Backhauls, VRPB) 和二维装箱问题 (two-dimensional Bin Packing Problem, 2L-BPP) 是两个经典的组合优化问题, 在融合两者的基础上, 本文提出了一种新的组合最优化问题, 即 2L-VRPB. 在该问题中, 车队的最优路径规划和货物的最优装载设计需要同时进行考虑, 该问题的优化目标是在满足所有客户的送货和取货需求的前提下, 为车队中的车辆制定尽可能最优的行驶路线和货物装载方案, 使得车队的总的服务成本最低. 该问题在实际生活中有着广泛的应用场景, 例如在设备维修和零售行业的货物运输中可经常遇到此类情形, 但是文献中关于此类问题的研究论文仍然较少. 为了求解 2L-VRPB 问题, 我们提出了一种具有自适应性机制的混合模因算法 (HMA), 该算法采用改进的模因算法 (IMA) 来规划最优路径, 并通过增强的组合装箱算法 (MultiPack) 来设计货物的最优装载方案. 在实验环节, 通过在 VRPB 问题的 Goetschalckx & Jacobs-Blecha 测试算例和 2L-VRPB 问题的 Gendreau 测试算例上设计对比实验, 我们验证了混合模因算法在求解 VRPB 和 2L-VRPB 问题时的鲁棒性和有效性.

关键词: 元启发式算法; 配送问题; 二维装箱; 模因算法; 车辆路径问题

引用格式: 汪洋广, 陈振. 混合模因算法在求解带装箱约束的车辆路径问题中的应用. 计算机系统应用, 2021, 30(11): 127-137. <http://www.c-s-a.org.cn/1003-3254/8166.html>

Application of Hybrid Memetic Algorithm to Vehicle Routing Problem with Loading Constraints

WANG Yang-Guang, CHEN Zhen

(School of Management, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: This work studies a new practical combinatorial optimization problem (known as 2L-VRPB) which combines the classic Vehicle Routing Problem with Backhauls (VRPB) and two-dimensional Bin Packing Problem (2L-BPP). The 2L-VRPB aims to find the route set at the minimum cost for a homogeneous fleet of vehicles to satisfy the delivery requirements of linehaul customers and the pickup demands of backhaul customers. This study investigates two versions of the 2L-VRPB. Both versions are loaded with unrestricted loading, but one is packed with rotation while the other is not. These two variants are frequently employed in the industry of appliance maintenance service and grocery, but they have been less examined in the literature. To solve these two variants, we propose a metaheuristic integrating an enhanced memetic algorithm with a combinatorial packing heuristic. The packing algorithm checks the loading feasibility by employing five basic packing heuristics with two additional improvement strategies. Extensive computational experiments show that the proposed metaheuristic is a practical and effective solution to both VRPB and 2L-VRPB.

Key words: metaheuristic; pickup and delivery problem; two-dimensional packing; memetic algorithm; vehicle routing problem

① 基金项目: 国家自然科学基金 (71671168)

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (71671168)

收稿时间: 2021-01-20; 修改时间: 2021-02-23; 采用时间: 2021-03-11; csa 在线出版时间: 2021-10-22

1 引言

在物流运输系统中,当需要为车队中的车辆规划最优行驶路线和安排相应的货物装载方案时,就会涉及到车辆路径问题(VRP)和装箱问题(BPP)的求解.这两个优化问题均属于NP难问题,虽然文献中已存在了大量的论文对两者进行了研究^[1],但对两者的组合问题进行研究的论文仍然较少.组合后的新问题需要同时进行车辆路径的规划和货物的装载方案的设计,这将无疑增加了求解的复杂性.

VRP问题中最具代表性的是带容量限制的车辆路径问题(CVRP)^[2].CVRP根据一组客户提出的配送需求为车队设计一个最优路线集合,使总的运输成本最小.CVRP的一个常见扩展是带回程取货约束的车辆路线问题(VRPB)^[3,4],它包括两种类型的客户:待送货客户,本文称之为配送客户;待取货客户,本文称之为回程客户.VRPB与CVRP不同之处在于它将送货和取货过程结合起来,从而显著降低了车辆在返程时的空载率,进而降低了运输成本.

在相关文献中,Iori等人^[5]首次考虑了CVRP和二维装箱问题的组合,提出了2L-CVRP问题,并给出了一般性的求解算法.在2L-CVRP问题中,每个货物形状被假设为一个长方体,并且由于货物的易碎性特征或对堆叠的稳定性要求而不允许货物的堆叠摆放.在相关文献中,该问题进一步衍生出了4个变体^[6,7]:根据在装载时是否允许货物旋转和是否有先后次序可将原问题细分为4种具体类型的子问题,即有序定向装载、有序旋转装载、无序定向装载和无序旋转装载.

在相关文献中,据我们所知只有Malapert等人和Dominguez等人研究过此类问题^[6,8].Malapert等人^[8]考虑了2L-VRPB的有序定向装载版本,并基于调度方法提出了一个多约束规划模型,但他们没有提出解决该问题的具体算法.Dominguez等人^[6]同时考虑了该问题的有序旋转装载和有序定向装载,并进一步提出了一种基于有偏随机化的邻域搜索元启发式算法,该算法通过对CWS^[9]、Best Fit^[10]和MTP^[11]算法进行有偏随机化进而成功得到了问题的高质量解.

在本文中,我们具体研究2L-VRPB中的两种新变体,即无序定向装载和无序旋转装载,这两种变体的应用实例可以在设备维修、家具以及工业机械的运输中找到^[6,12].为此,本文提出了一种新的混合模因算法(Hybrid Memetic Algorithm, HMA),通过在搜索过程中

维持可行种群和不可行种群的迭代和更新,使得当前最好解不断逼近全局最优解.

本文在相关文献的基础上,提出了一个具有实际应用价值的带二维装箱约束的车辆路径问题.考虑到新问题所带来的求解复杂性的提升,我们基于组合化策略、全局优化和有偏随机化策略设计了一个增强型装箱求解算法,并将其整合到一个模因算法的搜索框架中.最后,基于VRPB和2L-VRPB问题的标准测试算例的实验表明,本文提出的HMA算法能在可接受的时间内对VRPB和2L-VRPB问题产出高质量的解,同时本文提出的二维装箱算法同文献中的主流二维装箱算法相比也有明显的性能优势.

2 问题描述与数学模型

令 $G=(V,E)$ 是一个图,其中 $V=\{0,1,\dots,N\}$ 是顶点集, $E=\{(i,j)|i,j\in V,i\neq j\}$ 是边集.顶点集 V 由3个子集 $V=V^0\cup V^l\cup V^b$ 组成:子集 V^0 仅包含一个顶点 v_0 ,代表配送中心;子集 V^l 和 V^b 分别代表配送客户集合和回程客户集合,令 $V^c=V^l\cup V^b$.对于边 $(i,j)\in E$,行驶成本 c_{ij} 定义为从 v_i 到 v_j 或从 v_j 到 v_i 的直接行驶距离.在配送中心,有 K 辆同类型的运输车辆组成的车队,每辆车具有最大装载能力 D 且其矩形装载面积为 $S=W\times L$,其中 W 代表车厢宽度, L 代表长度.每个客户 $i\in V^c$ 有 m_i 个矩形货物,其集合表示为 I_i ,并且该 m_i 个矩形货物总质量为 d_i .每件货物 $I_{ir}\in I_i$ 的宽度和长度分别记作 $w_{ir}(r=1,2,\dots,m_i)$ 和 $l_{ir}(r=1,2,\dots,m_i)$.因此, I_i 中所有的货物所占的总面积为 $s_i=\sum_{r=1}^{m_i} w_{ir}l_{ir}$.

2L-VRPB问题的目标是找到能够为所有配送和回程客户提供服务的一组车辆行驶路线集合,使得总的服务成本(即车队的总行驶里程)最小.该问题对应的约束可以被分为两个部分,第一部分是关于车辆路径的相关约束,第二部分是关于装箱可行性的相关约束.两个部分的约束的语意描述如下:

- (1) 每辆车都在配送中心出发,完成任务后返回该配送中心.
- (2) 车队中最多只有 K 辆同类型的车可供使用.
- (3) 每个客户(配送客户或回程客户)仅被访问一次.
- (4) 每条路线至少包括一个配送客户.
- (5) 对于每条路线,必须先服务完所有的配送客户

才能继续服务回程客户,即先完成送货任务再考虑取货任务。

(6) 在每一条路线中,所装载的货物总重量不能超过车辆的最大承载重量。

(7) 分配给同一车辆的所有货物,在装载时不可堆叠,并且货物的最终放置位置的边缘必须与车厢的边缘平行。

(8) 根据装载方式的不同,本文将问题细分为不允许旋转的装载(无序定向装载,UOL)和允许旋转的装载(无序旋转装载,URL)。我们使用VRPB-UOL表示无序定向装载的2L-VRPB,VRPB-URL表示无序旋转装载的2L-VRPB。

2L-VRPB 问题的路径规划部分的数学模型如下:

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{\substack{i, j \in V \\ i \neq j}} c_{ij} x_{ijk} \quad (1)$$

s.t.

$$\sum_{j \in V^l} x_{0jk} = \sum_{i \in V^c} x_{i0k}, \forall k \in K \quad (2)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in V} x_{ijk} = 1, \forall j \in V^c \quad (3)$$

$$\sum_{i \in V} x_{iuk} = \sum_{j \in V} x_{ujk}, \forall u \in V^c, \forall k \in K \quad (4)$$

$$\sum_{\substack{i \in V^b \\ j \in V^l}} x_{ijk} = 0, \forall k \in K \quad (5)$$

$$\sum_{\substack{i \in V^l \\ j \in V^b}} x_{ijk} \leq 1, \forall k \in K \quad (6)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in V^c} x_{0jk} \leq K \quad (7)$$

$$\sum_{\substack{i \in V^l \\ j \in V}} d_i x_{ijk} \leq D, \forall k \in K \quad (8)$$

$$\sum_{\substack{i \in V^l \\ j \in V}} s_i x_{ijk} \leq S, \forall k \in K \quad (9)$$

$$\sum_{\substack{i \in V^b \\ j \in V}} d_i x_{ijk} \leq D, \forall k \in K \quad (10)$$

$$\sum_{\substack{i \in V^b \\ j \in V}} s_i x_{ijk} \leq S, \forall k \in K \quad (11)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \forall i, j \in V, i \neq j, \forall k \in K \quad (12)$$

约束(1)旨在最大程度地降低总运输成本。约束(2)确保离开配送中心的车辆数量等于返回配送中心的车辆数量。约束(3)和约束(4)确保每个客户只能被一辆车访问一次,且车辆在访问完客户后必须离开该客户。约束(5)和约束(6)确保仅在服务完所有配送客户之后才能为回程客户提供服务。约束(7)要求使用车辆的数量不超过车队中的最大可用车辆数量。约束(8)和约束(9)确保配送客户的货物总重量和总装载面积必须不超过车辆的最大载重能力和最大装载表面积,约束(10)和约束(11)对回程客户的货物做了同样的约束。

第二部分是关于装箱可行性的约束。在本文中,我们将车辆的装载表面视为笛卡尔坐标系下的一个矩形区域。因此,坐标 $(\alpha_{ir}, \beta_{ir})$ 表示客户*i*的货物*r*的左下角在车厢表面的笛卡尔坐标。对于特定路线 R_k ,可以将其分为两个子路线:一个由配送客户组成,称为linehaul子路线;另一个由回程客户组成,称为backhaul子路线。对一条路线进行装箱可行性检查等同于分别对两条子路线进行检查。为了简化表示,令*R*表示其中的一条子路线。此外我们使用二进制变量 μ_{ir} 来表示客户*i*的货物*r*在装载时是否允许旋转。涉及子路线*R*的装箱约束如下:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha_{ir} \leq (W - w_{ir})(1 - \mu_{ir}) + (W - l_{ir})\mu_{ir} \\ \wedge 0 &\leq \beta_{ir} \leq (L - l_{ir})(1 - \mu_{ir}) + (L - w_{ir})\mu_{ir} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{ir} + w_{ir}(1 - \mu_{ir}) + l_{ir}\mu_{ir} &\leq \alpha_{jr'} \\ \forall \alpha_{jr'} + w_{jr'}(1 - \mu_{jr'}) + l_{jr'}\mu_{jr'} &\leq \alpha_{ir} \\ \forall \beta_{ir} + l_{ir}(1 - \mu_{ir}) + w_{ir}\mu_{ir} &\leq \beta_{jr'} \\ \forall \beta_{jr'} + l_{jr'}(1 - \mu_{jr'}) + w_{jr'}\mu_{jr'} &\leq \beta_{ir} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \forall i, j \in R, \forall r \in \{1, \dots, m_i\}, \\ \forall r' \in \{1, \dots, m_j\}, (i, r) \neq (j, r') \end{aligned} \quad (15)$$

约束(13)、约束(14)和约束(15)确保每辆车的货物均能被无重叠的放置在装载面上。

3 改进的模因算法设计

改进的模因算法(IMA)是在具有自适应性机制的混合遗传搜索算法(HGSADC)^[13-15]的基础上进行改进得到。我们在个体评价方法、本地搜索程序(个体变异)、个体接受标准和种群多样性机制等方面进行了重新设计,从而显著提升了模因算法对于2L-VRPB问

题的求解能力. 在本节中我们将介绍 IMA 算法的各个部分: 第 3.1 小节简要介绍了搜索空间和新个体的评价方法; 第 3.2 小节介绍了种群中新个体的产生机制; 第 3.3 小节介绍了本地搜索(个体变异)机制; 第 3.4 小节介绍了种群在进化过程中的多样化管理机制.

3.1 搜索空间和种群个体表示

VRP 相关的文献表明, 对非可行解的有效利用可以显著的提升解的质量^[13]. 本文中, 我们将模因算法的搜索空间定义为两种类型的解的集合, 即可行解的集合和非可行解的集合, 后者通过放松车辆最大可承载重量约束(8)和装载可行性约束(9)、(13)、(14)和(15)获得.

$$\varphi(w) = \sum_{r \in R(w)} \varphi(r) = \sum_{r \in R(w)} \left\{ \begin{aligned} &c(r) + \omega^D \max\{0, d(r^l) - D\} + \omega^S \max\{0, s(r^l) - S\} \\ &+ \omega^D \max\{0, d(r^b) - D\} + \omega^S \max\{0, s(r^b) - S\} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

3.2 新个体的产生

在每次迭代中, IMA 通过二元锦标赛方法^[13]从可行种群和不可行种群的联合种群中随机选择两个父代个体. 随后, 父代个体的各条线路被依次连接为一条巡回路线, OX 交叉方法^[13]将作用于两条巡回路线并生成两个新的巡回路线. 伯努利分布将选择其中的一个巡回路线, 随后 Split 算法^[16]将作用于该路线并生成一个新的完整的个体, 新个体将进一步通过本地搜索程序予以改进.

3.3 本地搜索

本地搜索程序将对种群个体采用 swap, relocate, intra2opt 和 inter2opt 操作算子进行变异操作. 由 Split 算法产生的新个体将先后经历两个阶段. 在本文中, 我们将本地搜索程序的首次执行称为“教育过程”, 第 2 和第 3 次执行则被称为“修复过程”, 其中“修复过程”旨在促使非可行解向可行解的转化. 对于一个新个体, 其将首先经历一次本地搜索以提升自身解的质量. 随后, 若改善后的解不可行, 则以概率 P_m 决定是否执行修复过程. 在修复过程中, 在第 2 次执行前会将惩罚参数乘以 10, 如果得到的解仍不可行, 则将惩罚系数乘以 100 再执行第 3 次.

为了提升本地搜索程序的搜索能力, 我们对变异操作设计了新的接受标准, 当标准中的任一情况得以满足时将接受和执行当前变异操作. 同文献中普遍采用的接受标准相比, 本文提出的接受标准显著提升了本地搜索的效率, 其包含以下 3 种情形(为了简述该标准, 假定变异操作涉及两条路线):

此外, 为了促进非可行解向可行解的转化, IMA 将根据不可行解的可行性偏离程度对其适应度值进行相应的“惩罚”, 偏离程度越大, “惩罚”越严苛. 令 $R(w)$ 表示解 w 的路线集合, 路线 $r \in R(w)$ 表示集合中的单条线路. 令 r^l 和 r^b 分别表示 r 的配送子路线和回程子路线, 则解 w 的总适应度值 $\varphi(w)$ 可由约束(16)求得. 相关符号的表示如下: $d(r^l)$ 、 $d(r^b)$ 分别表示 r^l 和 r^b 各自的货物总重量; $s(r^l)$ 、 $s(r^b)$ 分别表示 r^l 和 r^b 各自所装载的货物占用的面积; ω^D 和 ω^S 表示相应的惩罚系数, 初始值均设为 1; $\varphi(r)$ 表示路线 r 的适应度值, 它定义为 r^l 和 r^b 的总行驶距离和各自的惩罚值的累加; $\varphi(w)$ 表示为解 w 的适应度值, 它为所有路线的适应度值的累加和.

(1) 在执行变异操作之后, 相关路线中从回程客户到配送客户的弧的数量减少.

(2) 变异操作所涉及的路线的总成本降低, 并且相关路线在执行该操作后均可行.

(3) 在执行变异操作之前, 相关路线中至少一条是不可行的. 在执行操作之后, 两者路线均可行.

在本地搜索程序的一次执行中, 对于每一次迭代, 若变异操作将被接受, 迭代过程将重新开始. 该过程将不断重复, 直到无法再产生能够被接受的新的变异操作.

此外, 本文采取了“邻域修剪”策略^[13,15]以提升对解的改进效率. 对于给定的客户 v_i , 其相应的“有希望”的客户的集合 $\Gamma(v_i)$ 定义为 $|\Gamma|$ 个与其最接近的客户. 可以将 $\Gamma(v_i)$ 所包含的客户视为从 v_i 出发去访问下一站的理想目的地, 对于 $v_j \in \Gamma(v_i)$, 弧 (v_i, v_j) 即为“有希望的”边的子集. 对某次变异操作, 只有当其产生了至少一个有“希望的”边^[15]才会去进一步评估其是否符合接受标准.

3.4 种群管理机制

在进化过程中模因算法会始终维持两个种群, 即可行解种群和非可行解种群. 每个种群的个体数量均保持在 λ 和 $\lambda + \delta$ 之间, 其中 λ 表示最小种群数量, δ 表示能允许的最大新增数量. 在初始化阶段, IMA 将随机生成 4μ 个新个体并根据可行性将其添加到对应的种群中. 为了避免解的过早收敛和保持种群的多样性, 我们对种群中的个体实行严格的分散化规则, 任何两个个体之间的适应度值 $\varphi(w)$ 的间隔必须大于 0.5, 其中违背分散化规则的个体将被丢弃. 对于每个种群, 当其种群大小达到最大上限 $\lambda + \delta$ 时, IMA 将触发筛选机制, 该机制

会剔除种群中适应度值最差的 δ 个个体。最后,当 IMA 每执行 it^{div} 次迭代而未能更新当前最好解时便会触发一个多样化程序。在该程序中, IMA 仅保留每个种群中最好的 $\lambda/3$ 个个体,然后执行初始化,即生成 4μ 个新个体并将其添加到对应的种群中。

4 MultiPack 启发式装箱算法设计

本文在 5 种基本的装箱构造算法的基础上提出了 MultiPack 启发式算法来检查装载的可行性,它通过采用 5 种装箱构造算法和 2 种额外的提升策略来生成货物放置方案。MultiPack 算法由 3 个部件构成,每个部件均可独立的产生可行的装载方案。这 3 个部件会依次被调用,只有当当前部件无法生成可行装载方案时才会调用下一个更复杂的部件。第 1 个部件采用了 5 种启发式装箱构造算法,第 2 个部件是在对第 1 个部件采用全局最优策略进行改进得到,第 3 个部件通过对最大接触边界 (MTP) 装箱启发式算法采用有偏随机化改造得到。

对于单条路线上的客户集 R_{set} , R_{seq} 表示按照某种排序规则将客户集 R_{set} 的所有货物进行排序之后的序列。 $freeList$ 表示车辆装载表面上的空闲矩形列表。在装载之前, $freeList$ 中只有一个矩形,即车辆的矩形表面,之后每装载一件货物,所选的目标矩形将从 $freeList$ 中删除,同时新生成的空闲矩形将被添加到 $freeList$ 中,随后 $freeList$ 中的所有可用矩形将经历一轮检查,以删除不必要的矩形。

在 MultiPack 的第 1 个部件中,5 种构造算法 $Heur_i$ ($i = 1, 2, \dots, 5$)将依次被调用。对于任一个构造装箱算法 $Heur_i$,将依据货物在 R_{seq} 中的先后次序依次安排其所对应的最佳放置位置。不同的基本装箱构造算法具有不同的“最佳匹配”评估标准,相关描述如下:

Heur₁: 对于所有在 $freeList$ 里的可放置的空闲矩形, BL (Bottom-Left) 启发式方法^[17]总是选择一个左下角的横纵坐标最小的矩形。

Heur₂: 在所有 $freeList$ 里的可放置的空闲矩形中, BAU (Best Area Utilization) 启发式方法^[18]选择表面积最小的矩形,使得所选矩形在放置货物之后的面积利用率最高。

Heur₃: 在 $freeList$ 里的可放置的空闲矩形中, BSEM (Best Short-Edge Match) 选择“剩余边”较短的最短矩

形。令 w'_j 和 l'_j 表示其中一个空闲矩形的宽度和长度, w_i 和 l_i 分别表示当前待放货物的宽度和长度。BSEM 启发式方法将在可放置的空闲矩形中选择目标值 $\min(w'_j - w_i, l'_j - l_i)$ 最小的矩形。

Heur₄: 在 $freeList$ 中的可放置的空闲矩形中, BLEM (Best Long-Edge Match) 启发式选择目标值 $\max(w'_j - w_i, l'_j - l_i)$ 最小的可行空闲矩形来放置当前货物。

Heur₅: 在 $freeList$ 的所有可行的空闲矩形中, MTP (Maximum Touch Perimeter)^[11]选择一个使接触周长最大的空闲矩形来放置新货物。

在第 1 个部件中,每种基本的装箱构造算法 $Heur_i$ ($i = 1, 2, \dots, 5$)将根据货物序列 R_{seq} 进行装载。这些算法的优势是运行效率很高,但是在某些极端情况下,其效果可能会很差。因此,第 1 个部件中的 5 种基本启发式方法适用于处理简单的装箱情况。

为了应对更复杂的情况,我们采用全局最优策略来改进第 1 个部件中的 5 种基本算法。在第 2 个部件中包含 5 种改进后的装箱算法,标记为 $impHeur_i$ ($i = 1, 2, \dots, 5$),每种 $impHeur_i$ 都是通过对 $Heur_i$ 采用全局最优策略进行改进得到。改进后的 $impHeur_i$ 将不再根据输入序列 R_{seq} 来进行装载,而是在每一次装载时将每个待装载的货物和该货物的所有可放置位置进行评估,然后选择最佳位置。

对于给定的货物集合,第 2 个部件中的改进启发式算法极大地扩展了给定货物及其相关可行位置的搜索范围,因而可以生成更好的装载方案。我们采用类似 Burke 等人^[10]的算法实现方式来提升算法的运行性能。

最后,为了提升 MultiPack 算法对更为复杂的装箱情形的处理能力,本文采用了有偏随机化技术^[6]来改进 MTP 装箱构造算法,标记为 Biased-MTP,它构成了 MultiPack 算法的第 3 个部件。在每一次装载时, Biased-MTP 会评估每个未装箱的货物及其对应的所有可行放置位置,对所有生成的可行放置将基于接触周长来排序,随后将使用几何分布来决定执行哪个可行装载。Biased-MTP 使用两个参数 θ 和 $PackIter$ 来校准算法:前者表示单次伯努利实验成功的概率,后者表示为某个货物寻找其放置位置时,若一直无法找到可行的放置位置,则随机 MTP 启发式算法将会被调用的最大次数。

为了降低调用 MultiPack 带来的时间开销,本文使用了特殊的数据结构 (Trie)^[19]来记录已检查路线的装箱可行性。在这里,我们将 Trie 树中的最大存储数量限

制为 10 000 000. 当 Trie 树中的数量达到上限时, 将仅保留最近生成的 2/3 部分的元素.

5 数值实验

在本节中, 我们首先测试 HMA 算法在经典 VRPB 基准算例上的性能表现, 并将实验结果与其他最新启发式算法进行比较. 然后, 我们进一步在 2L-VRPB 算例上进行测试, 检验 HMA 算法针对本文提出来的 2L-VRPB 问题的求解性能. HMA 算法基于 C++ 编程语言实现, 运行平台为 Windows 10, 硬件环境为 3.4 GHz Intel i7 6700 处理器和 16 GB RAM.

5.1 VRPB 的计算结果

由于 2L-VRPB 问题是在经典的 VRPB 问题上的扩展, 故我们首先检验 HMA 算法在求解原 VRPB 问题的求解性能, 这将体现 HMA 的路径规划的能力. 基于 Goetschalckx 和 Jacobs-Blecha 发布的 VRPB 基准算例^[20], HMA 的求解结果同文献中的相关算法的求解结果的对比如表 1 所示. 所引用文献中的算法的描述如下: LS12 表示 Zachariadis 等人提出的本地搜索算法^[21], ILS14 表示由 Palhazi Cuervo 等人提出的迭代局部搜索算法^[22], DILS16 表示 Brandão 等人提出的确定性局部迭代搜索算法^[4], HMA 表示本文提出的混合模因算法. HMA 的参数设置和终止条件与 Vidal 等人^[13]的设置相同.

在表 1 中, 对于每个实例, BKS 指的是所列出文献中得到的已知最好解^[12], Gap 列表示 HMA 的求解结果同已知最好解的百分比偏差, Time 表示 HMA 的平均耗时. 在所有的测试算例中, 只有 3 个实例 (C1、G1、I5) 没有达到已知最好水平, 其对应的百分比偏差均小于 0.5%. 综合来看, HMA 对于求解 VRPB 问题是一种极具竞争力的元启发式算法, 它拥有很强的路径寻优能力.

5.2 2L-VRPB 的计算结果

2L-VRPB 是 2L-CVRP 的扩展, Toth 等人采用了一种从经典 VRP 数据集生成 VRPB 数据集的方法^[23]. 本文采用 Dominguez 等人^[6]的方法从 Gendreau 等人^[24]的经典 2L-CVRP 基准算例来生成 2L-VRPB 算例. 具体而言, 即在 2L-CVRP 的每个算例中, 每隔 4 个客户便将最后 1 个客户指定为回程客户, 前面的 3 个指定为配送客户. 生成的新的 2L-VRPB 数据集中包含 180 个算例, 总共分为 5 个类别, 每个类别包含 36 个算例, 算例中的客户规模从 10 到 255. 在第 1 个类别中, 由于所有的货物的长宽均设置为单位 1, 故其可以视为

纯 VRPB 问题. 对于第 2 类到第 5 类, 每个客户对应着一组不同尺寸的矩形货物, 且装箱复杂程度依次增加.

针对 2L-VRPB 基准算例, 我们选取部分中等规模的算例进行初步实验以校准 HMA 算法的参数. 这里, it^{\max} 用来设置停机条件, 表示 HMA 在交叉了 it^{\max} 次之后终止运行. 在对解的质量和求解时间进行权衡之后, 我们给出了最终的参数设定值: $\lambda=12$, $\delta=20$, $|\Gamma|=40$, $P_m=0.5$, $4\mu=50$, $it^{\text{div}}=600$, $it^{\max}=6000$.

对 2L-VRPB 的每一个算例, HMA 算法将执行 3 次, 每次执行将设置一个不同的随机数种子, 3 次执行的结果中的最好值将作为 HMA 的解. 文本将解决 2L-VRPB 的两个变体, 即无序定向装载 (记为 VRPB-UOL), 和无序旋转装载 (VRPB-URL), 最终的求解结果如表 2 所示. 由于两个变体在针对算例中的第 1 类的结果是一样的, 故不再重复列出. class1 为 HMA 对 2L-VRPB 在无序装载模式下的求解结果 (不再区分定向装载和旋转装载), class2 到 class5 为 HMA 针对 VRPB-UOL 的求解结果, class6 到 class9 为 HMA 针对 VRPB-URL 的求解结果. 在本文所设置的停机条件下, 所有的算例均在可比较的时间内完成了计算. 对于同一算例, 旋转装载的解要好于定向装载的解, 这是由于在可旋转的条件下装箱算法有更大的灵活性.

为了进一步验证 HMA 对 2L-VRPB 问题的求解性能, 尤其是验证 MultiPack 算法在复杂装箱情况的求解能力, 我们对 VRPB-UOL 和 VRPB-URL 两个变体分别设计了 3 组对比实验. 在 IMA 算法的基础上, 我们采用 3 种不同的装箱算法来代替 HMA 算法中的 MultiPack, 并在基准算例上测试其性能. 首先, 我们用 Leung 等人^[25]提出的装箱启发式算法 (PHB) 来代替 HMA 中的 MultiPack. 此外, 在 PHB 装箱算法的基础上, 我们对其基本装箱构造算法采用全局化策略进行改进, 并将改进后的部分同 PHB 串联, 得到新的装箱算法并记为 ImpPHB. 最后, 我们将 Dominguez 等人^[6]提出的随机有偏化 MTP 算法^[11]记为 BiasMTP.

表 3 和表 4 分别给出了 4 种算法在 VRPB-UOL 问题和 VRPB-URL 问题上的平均性能表现, 每一个值都是特定算例在类别 2 到 5 的数据上的平均值. BKS 表示 4 种算法所给出的结果中的最好值, Gap 表示各个算法同当前最好值之间的百分比偏差, 由于值越小越好, 故百分比偏差越小则表示该算法的性能越优.

由表 3 和表 4 可看出, 对于小、中和大规模算例, 在 4 种算法中, HMA 对于所有算例均能给出最好解.

表1 VRPB 的计算结果

Instance	BKS	LS12	ILS14	DILS16	HMA	Gap (%)	Time (s)
A1	229.89	229.89	229.89	229.89	229.89	0.000	16.82
A2	180.12	180.12	180.12	180.12	180.12	0.000	19.34
A3	163.41	163.41	163.41	163.41	163.41	0.000	19.06
A4	155.80	155.80	155.80	155.80	155.80	0.000	25.22
B1	239.08	239.08	239.08	239.08	239.08	0.000	23.68
B2	198.05	198.05	198.05	198.05	198.05	0.000	25.68
B3	169.37	169.37	169.37	169.37	169.37	0.000	33.26
C1	249.45	250.56	250.56	250.56	250.56	0.445	35.24
C2	215.02	215.02	215.02	215.02	215.02	0.000	36.38
C3	199.35	199.35	199.35	199.35	199.35	0.000	37.06
C4	195.37	195.37	195.37	195.37	195.37	0.000	41.28
D1	322.53	322.53	322.53	322.53	322.53	0.000	30.56
D2	316.71	316.71	316.71	316.71	316.71	0.000	29.14
D3	239.48	239.48	239.48	239.48	239.48	0.000	34.28
D4	205.83	205.83	205.83	205.83	205.83	0.000	42.78
E1	238.88	238.88	238.88	238.88	238.88	0.000	49.34
E2	212.26	212.26	212.26	212.26	212.26	0.000	57.84
E3	206.66	206.66	206.66	207.05	206.66	0.000	51.22
F1	263.17	263.17	263.17	263.17	263.17	0.000	71.16
F2	265.21	265.21	265.21	265.21	265.21	0.000	69.88
F3	241.12	241.12	241.12	241.12	241.12	0.000	84.42
F4	233.86	233.86	233.86	233.86	233.86	0.000	92.18
G1	306.31	306.31	306.31	306.31	306.54	0.075	61.71
G2	245.44	245.44	245.44	245.44	245.44	0.000	64.36
G3	229.51	229.51	229.51	229.51	229.51	0.000	77.16
G4	232.52	232.52	232.52	232.52	232.52	0.000	71.10
G5	221.73	221.73	221.73	221.73	221.73	0.000	79.32
G6	213.46	213.46	213.46	213.46	213.46	0.000	89.48
H1	268.93	268.93	268.93	268.93	268.93	0.000	107.24
H2	253.37	253.37	253.37	253.37	253.37	0.000	87.27
H3	247.45	247.45	247.45	247.45	247.45	0.000	112.68
H4	250.22	250.22	250.22	250.22	250.22	0.000	97.96
H5	246.12	246.12	246.12	246.12	246.12	0.000	98.44
H6	249.14	249.14	249.14	249.14	249.14	0.000	99.88
I1	350.25	350.25	350.25	350.25	350.25	0.000	146.25
I2	309.94	309.94	309.94	309.94	309.94	0.000	127.70
I3	294.51	294.51	294.51	294.51	294.51	0.000	171.38
I4	295.99	295.99	295.99	297.24	295.99	0.000	152.04
I5	301.23	301.24	301.24	302.38	301.24	0.003	137.84
J1	335.01	335.01	335.01	335.01	335.01	0.000	131.46
J2	310.42	310.42	310.42	310.42	310.42	0.000	142.08
J3	279.22	279.22	279.22	279.22	279.22	0.000	158.66
J4	296.53	296.53	296.53	297.62	296.53	0.000	189.44
K1	394.07	394.07	394.07	395.08	394.07	0.000	205.46
K2	362.13	362.13	362.13	365.75	362.13	0.000	231.80
K3	365.69	365.69	365.69	369.05	365.69	0.000	217.60
K4	348.95	348.95	348.95	350.3	348.95	0.000	218.98
L1	417.90	417.90	417.90	418.45	417.90	0.000	643.28
L2	401.23	401.23	401.23	401.97	401.23	0.000	492.52
L3	402.68	402.68	402.68	403.15	402.68	0.000	459.26
L4	384.64	384.64	384.64	385.55	384.64	0.000	397.70
L5	387.57	387.57	387.57	388.53	387.57	0.000	468.64
M1	398.59	398.59	398.59	401.45	398.59	0.000	284.96
M2	396.92	396.92	396.92	399.3	396.92	0.000	362.18
M3	375.70	375.70	375.70	377.98	375.70	0.000	461.40

表1 (续) VRPB 的计算结果

Instance	BKS	LS12	ILS14	DILS16	HMA	Gap (%)	Time (s)
M4	348.14	348.14	348.14	348.67	348.14	0.000	271.64
N1	408.10	408.10	408.10	408.69	408.10	0.000	429.64
N2	408.07	408.07	408.07	409.36	408.07	0.000	419.10
N3	394.34	394.34	394.34	394.55	394.34	0.000	406.52
N4	394.79	394.79	394.79	395.00	394.79	0.000	371.94
N5	373.48	373.48	373.48	378.99	373.48	0.000	524.44
N6	373.76	373.76	373.76	376.88	373.76	0.000	587.04
Avg	—	—	—	—	—	0.008	173.93

表2 2L-VRPB 实验结果

序号	class 1	class 2	class 3	class 4	class 5	class 6	class 7	class 8	class 9
1	269.32	270.16	270.16	272.68	269.32	270.16	270.16	272.68	269.32
2	303.78	303.78	311.91	303.78	303.78	303.78	309.76	303.78	303.78
3	353.02	358.15	359.87	354.47	353.02	353.96	358.15	354.44	353.02
4	375.34	375.34	390.47	375.34	375.34	375.34	375.34	375.34	375.34
5	373.99	373.99	379.07	373.99	373.99	373.99	379.07	373.99	373.99
6	432.44	432.44	440.11	432.44	432.44	432.44	434.33	432.44	432.44
7	647.78	735.49	720.45	704.25	686.46	707.27	702.85	703.11	686.46
8	647.78	694.59	723.83	723.83	673.28	694.15	715.00	721.27	673.28
9	553.83	555.78	553.83	560.17	553.83	553.83	553.83	560.17	553.83
10	545.77	629.46	601.52	695.57	609.72	610.16	591.02	679.26	609.23
11	545.77	657.98	621.34	734.98	594.78	629.99	621.34	697.56	594.78
12	513.96	532.21	522.57	530.66	513.96	516.33	513.96	530.66	513.96
13	2237.20	2487.85	2433.21	2440.39	2421.50	2473.10	2414.30	2439.98	2391.49
14	757.30	886.73	903.49	881.99	811.87	886.73	897.44	881.99	776.24
15	757.30	893.18	975.13	1019.59	1015.61	883.31	904.42	1011.89	1015.61
16	604.57	604.57	610.26	616.20	604.57	604.57	604.57	608.77	604.57
17	716.42	716.42	716.42	722.22	716.42	716.42	716.42	716.42	716.42
18	741.53	956.96	976.66	1011.62	889.27	911.09	951.47	990.16	878.56
19	572.78	715.14	722.17	722.45	646.03	680.39	695.69	707.90	633.76
20	278.22	479.15	437.49	465.86	389.57	446.74	425.93	458.81	389.30
21	725.23	924.06	986.61	868.89	836.63	907.90	962.04	857.30	836.91
22	754.21	946.57	954.26	1016.99	851.88	913.58	931.42	1003.80	840.67
23	802.94	979.08	989.74	1008.97	893.39	922.35	970.14	976.86	874.82
24	912.39	1038.71	967.37	1019.50	945.36	1003.08	960.79	991.21	940.74
25	847.04	1272.74	1225.86	1271.11	1051.31	1221.86	1193.36	1244.86	1042.54
26	814.91	1179.20	1229.36	1203.91	1107.15	1157.62	1193.75	1196.83	1099.22
27	1003.33	1152.03	1254.86	1175.56	1129.62	1101.38	1222.06	1162.32	1102.70
28	1014.01	2176.82	2149.22	2210.49	1973.15	2088.19	2039.72	2124.09	1957.37
29	1125.36	1896.38	1871.85	1948.93	1832.19	1844.65	1839.20	1908.05	1813.74
30	1051.83	1560.94	1632.26	1598.78	1433.61	1507.28	1587.10	1549.05	1407.64
31	1258.46	2005.35	2069.47	2091.02	1767.80	1914.97	1971.06	2031.41	1736.61
32	1261.71	1985.92	1954.18	1983.54	1724.25	1899.99	1884.86	1936.89	1681.13
33	1253.90	1999.44	2061.38	2054.54	1754.92	1902.80	1991.85	1996.03	1724.73
34	634.62	1013.18	1034.97	1044.08	898.87	961.61	999.51	1021.54	882.39
35	795.91	1193.74	1239.90	1272.45	1048.93	1142.57	1188.88	1240.10	1045.11
36	550.99	1384.55	1433.49	1399.74	1242.95	1324.43	1378.40	1349.31	1220.77
Avg	750.97	1010.22	1020.13	1030.86	936.85	978.83	993.03	1011.40	926.46

在 VRPB-UOL 问题中, HMA 算法给出的解在所有算例上的平均值为 999.52, 该值同所有算例的已知最好解的平均值相同. BiasMTP 算法给出的解的平均值同已知最好解的平均值的百分比偏差为 0.011%, ImpPHB 算法对应的偏差为 0.006%, PHB 对应的偏差为 0.021%,

由于 $0.021\% > 0.011\% > 0.006\% > 0.000\%$, 4 种算法的性能表现为 $HMA > ImpPHB > BiasMTP > PHB$; 对于 VRPB-URL 问题, HMA 算法在所有算例上的平均值为 977.49, BiasMTP 算法同其相比的百分比偏差为 0.008%, ImpPHB 算法为 0.004%, PHB 对应的偏差为 0.014%,

可得 $0.014\% > 0.008\% > 0.004\% > 0.000\%$, 4种算法的性能表现为 $HMA > ImpPHB > BiasMTP > PHB$. 综合4种算法在 VRPB-UOL 和 VRPB-URL 问题上的性能表现, HMA 算法的性能显著优于 ImpPHB 算法、BiasMTP

算法和 PHB 算法. 由此可得出结论, 本文提出的 Multi-Pack 算法同文献中的主流二维装箱算法相比很有竞争力, 同时本文提出的混合模因算法 (HMA) 对于 2L-VRPB 问题是一个高效的求解算法.

表3 VRPB-UOL 问题的计算结果

序号	BKS	PHB	Gap (%)	ImpPHB	Gap (%)	BiasMTP	Gap (%)	HMA	Gap (%)
1	270.58	271.64	0.004	270.58	0.000	270.58	0.000	270.58	0.000
2	305.81	308.88	0.010	305.81	0.000	305.81	0.000	305.81	0.000
3	356.38	359.00	0.007	359.00	0.007	358.79	0.007	356.38	0.000
4	379.12	387.81	0.023	379.12	0.000	379.12	0.000	379.12	0.000
5	375.26	383.54	0.022	375.26	0.000	376.63	0.004	375.26	0.000
6	434.36	437.58	0.007	434.36	0.000	437.56	0.007	434.36	0.000
7	711.66	712.51	0.001	711.66	0.000	712.84	0.002	711.66	0.000
8	703.88	716.07	0.017	709.05	0.007	705.33	0.002	703.88	0.000
9	555.90	561.91	0.011	555.90	0.000	557.07	0.002	555.90	0.000
10	634.07	655.41	0.034	641.31	0.011	644.25	0.016	634.07	0.000
11	652.27	665.39	0.020	662.29	0.015	656.99	0.007	652.27	0.000
12	524.85	525.99	0.002	524.92	0.000	524.96	0.000	524.85	0.000
13	2445.74	2457.66	0.005	2451.57	0.002	2468.28	0.009	2445.74	0.000
14	871.02	904.16	0.038	872.79	0.002	882.16	0.013	871.02	0.000
15	975.88	994.78	0.019	978.80	0.003	982.70	0.007	975.88	0.000
16	608.90	614.66	0.009	612.41	0.006	610.80	0.003	608.90	0.000
17	717.87	718.65	0.001	717.87	0.000	717.87	0.000	717.87	0.000
18	958.63	991.50	0.034	973.15	0.015	974.76	0.017	958.63	0.000
19	701.45	718.29	0.024	705.27	0.005	709.07	0.011	701.45	0.000
20	443.02	457.78	0.033	447.37	0.010	450.76	0.017	443.02	0.000
21	904.05	940.74	0.041	915.69	0.013	921.87	0.020	904.05	0.000
22	942.42	963.01	0.022	948.60	0.007	956.80	0.015	942.42	0.000
23	967.79	991.38	0.024	975.57	0.008	982.10	0.015	967.79	0.000
24	992.74	1010.95	0.018	997.00	0.004	1008.28	0.016	992.74	0.000
25	1205.26	1236.26	0.026	1212.25	0.006	1230.82	0.021	1205.26	0.000
26	1179.91	1212.47	0.028	1186.00	0.005	1196.55	0.014	1179.91	0.000
27	1178.02	1212.27	0.029	1185.73	0.007	1201.44	0.020	1178.02	0.000
28	2127.42	2177.68	0.024	2147.29	0.009	2161.14	0.016	2127.42	0.000
29	1887.34	1939.95	0.028	1902.97	0.008	1912.51	0.013	1887.34	0.000
30	1556.40	1595.38	0.025	1567.75	0.007	1587.21	0.020	1556.40	0.000
31	1983.41	2030.87	0.024	1997.83	0.007	2013.82	0.015	1983.41	0.000
32	1911.97	1973.60	0.032	1924.20	0.006	1940.24	0.015	1911.97	0.000
33	1967.57	2023.90	0.029	1982.00	0.007	2003.18	0.018	1967.57	0.000
34	997.77	1022.79	0.025	1003.22	0.005	1013.00	0.015	997.77	0.000
35	1188.76	1232.87	0.037	1198.98	0.009	1212.68	0.020	1188.76	0.000
36	1365.18	1407.98	0.031	1371.28	0.004	1388.46	0.017	1365.18	0.000
Avg	999.52	1022.65	0.021	1005.69	0.006	1012.68	0.011	999.52	0.000

注: $Gap\% = (Value - BKS) / BKS \times 100\%$

6 结束语

本文研究了一个新的组合优化问题, 即带回程取货和二维装箱约束的车辆路径问题 (2L-VRPB), 该问题可以在实际物流系统中找到相应的应用实例. 本文首次研究了该问题的无序定向装载和无序旋转装载两种变体. 为了求出该问题的高质量解, 本文提出了一种新的混合模因算法 (HMA), 该算法通过改进的模因

算法 (IMA) 完成路径规划, 并通过定制化的组合装箱启发式算法 (MultiPack) 完成特定货物的装载方案的设计. 通过在 VRPB 问题和 2L-VRPB 问题的基准算例上设计对比实验, 本文提出的混合模因算法对两种问题均能在可接受的时间范围内给出高质量的解, 这表明该算法对 VRPB 问题和 2L-VRPB 问题均为一种高效的求解算法. 同时, 该算法可进一步应用于其他更复

杂的车辆路径和装箱问题相结合的问题的求解中. 本文的组合化策略、全局优化和有偏随机化策略对于求

解三维装载问题以及其他更为复杂的组合优化问题的算法设计都有很好的借鉴意义.

表4 VRPB-URL 问题的计算结果

序号	BKS	PHB	Gap (%)	ImpPHB	Gap (%)	BiasMTP	Gap (%)	HMA	Gap (%)
1	270.58	270.58	0.000	270.58	0.000	270.58	0.000	270.58	0.000
2	305.27	305.27	0.000	305.27	0.000	305.28	0.000	305.27	0.000
3	354.89	354.99	0.000	354.90	0.000	355.12	0.001	354.89	0.000
4	375.34	379.12	0.010	375.34	0.000	375.34	0.000	375.34	0.000
5	375.26	376.63	0.004	375.26	0.000	375.26	0.000	375.26	0.000
6	432.91	435.17	0.005	435.17	0.005	433.39	0.001	432.91	0.000
7	699.92	701.20	0.002	700.21	0.000	700.21	0.000	699.92	0.000
8	700.92	703.87	0.004	700.92	0.000	700.93	0.000	700.92	0.000
9	555.41	557.07	0.003	555.41	0.000	555.42	0.000	555.41	0.000
10	622.42	639.88	0.028	627.00	0.007	639.34	0.027	622.42	0.000
11	638.14	651.58	0.021	646.71	0.013	647.00	0.014	638.14	0.000
12	518.73	520.83	0.004	518.73	0.000	518.73	0.000	518.73	0.000
13	2429.72	2457.09	0.011	2429.72	0.000	2444.04	0.006	2429.72	0.000
14	860.60	875.73	0.018	862.74	0.002	865.25	0.005	860.60	0.000
15	953.81	972.78	0.020	956.06	0.002	956.77	0.003	953.81	0.000
16	604.57	607.48	0.005	605.62	0.002	604.57	0.000	604.57	0.000
17	716.42	716.42	0.000	716.42	0.000	716.42	0.000	716.42	0.000
18	932.82	946.60	0.015	940.90	0.009	940.71	0.008	932.82	0.000
19	679.43	693.28	0.020	684.21	0.007	688.13	0.013	679.43	0.000
20	430.19	438.74	0.020	433.41	0.007	435.04	0.011	430.19	0.000
21	891.04	904.62	0.015	896.33	0.006	897.42	0.007	891.04	0.000
22	922.37	933.73	0.012	926.73	0.005	929.74	0.008	922.37	0.000
23	936.04	958.72	0.024	939.77	0.004	949.41	0.014	936.04	0.000
24	973.95	991.09	0.018	980.58	0.007	982.75	0.009	973.95	0.000
25	1175.65	1202.28	0.023	1182.38	0.006	1187.97	0.010	1175.65	0.000
26	1161.86	1178.31	0.014	1165.07	0.003	1173.70	0.010	1161.86	0.000
27	1147.12	1172.88	0.022	1153.05	0.005	1162.98	0.014	1147.12	0.000
28	2052.34	2090.57	0.019	2073.56	0.010	2092.62	0.020	2052.34	0.000
29	1851.41	1873.59	0.012	1855.68	0.002	1862.07	0.006	1851.41	0.000
30	1512.77	1542.33	0.020	1522.72	0.007	1538.29	0.017	1512.77	0.000
31	1913.51	1957.15	0.023	1924.67	0.006	1944.34	0.016	1913.51	0.000
32	1850.72	1895.47	0.024	1864.56	0.007	1882.50	0.017	1850.72	0.000
33	1903.85	1950.55	0.025	1918.84	0.008	1936.31	0.017	1903.85	0.000
34	966.26	987.47	0.022	973.21	0.007	977.41	0.012	966.26	0.000
35	1154.16	1181.32	0.024	1162.47	0.007	1170.63	0.014	1154.16	0.000
36	1318.23	1351.29	0.025	1326.17	0.006	1337.13	0.014	1318.23	0.000
Avg	977.46	993.77	0.014	982.23	0.004	987.58	0.008	977.49	0.000

参考文献

1 Iori M, Silvano M. Routing problems with loading constraints. TOP, 2010, 18(1): 4–27. [doi: 10.1007/s11750-010-0144-x]

2 Toth P, Vigo D. The vehicle routing problem. SIAM monographs on discrete mathematics and applications. Society for Industrial and Applied Mathematics. 2002.

3 Gajpal Y, Abad PL. Multi-ant colony system (MACS) for a vehicle routing problem with backhauls. European Journal of Operational Research, 2009, 196(1): 102–117. [doi: 10.1016/

j.ejor.2008.02.025]

4 Brandão J. A deterministic iterated local search algorithm for the vehicle routing problem with backhauls. TOP, 2016, 24(2): 445–465. [doi: 10.1007/s11750-015-0404-x]

5 Iori M, Salazar-González JJ, Vigo D. An exact approach for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. Transportation Science, 2007, 41(2): 253–264. [doi: 10.1287/trsc.1060.0165]

6 Dominguez O, Guimarans D, Juan AA, et al. A biased-randomised large neighbourhood search for the two-dimensional vehicle routing problem with backhauls.

- European Journal of Operational Research, 2016, 255(2): 442–462. [doi: [10.1016/j.ejor.2016.05.002](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.05.002)]
- 7 Wei LJ, Zhang ZZ, Zhang DF, *et al.* A simulated annealing algorithm for the capacitated vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. European Journal of Operational Research, 2018, 265(3): 843–859. [doi: [10.1016/j.ejor.2017.08.035](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.08.035)]
 - 8 Malapert A, Gueret C, Jussien N, *et al.* Two-dimensional pickup and delivery routing problem with loading constraints. CIRRELT-2008–37, 2018.
 - 9 Clarke G, Wright WJ. Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points. Operations Research, 1964, 12(4): 568–581. [doi: [10.1287/opre.12.4.568](https://doi.org/10.1287/opre.12.4.568)]
 - 10 Burke EK, Kendall G, Whitwell G. A new placement heuristic for the orthogonal stock-cutting problem. Operations Research, 2004, 52(4): 655–671. [doi: [10.1287/opre.1040.0109](https://doi.org/10.1287/opre.1040.0109)]
 - 11 Lodi A, Martello S, Vigo D. Heuristic and metaheuristic approaches for a class of two-dimensional bin packing problems. INFORMS Journal on Computing, 1999, 11(4): 345–357. [doi: [10.1287/ijoc.11.4.345](https://doi.org/10.1287/ijoc.11.4.345)]
 - 12 Koç Ç, Laporte G. Vehicle routing with backhauls: Review and research perspectives. Computers & Operations Research, 2018, 91: 79–91.
 - 13 Vidal T, Crainic TG, Gendreau M. A unified solution framework for multi-attribute vehicle routing problems. European Journal of Operational Research, 2014, 234(3): 658–673. [doi: [10.1016/j.ejor.2013.09.045](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.09.045)]
 - 14 Vidal T, Crainic TG, Gendreau M, *et al.* A hybrid genetic algorithm for multidepot and periodic vehicle routing problems. Operations Research, 2012, 60(3): 611–624. [doi: [10.1287/opre.1120.1048](https://doi.org/10.1287/opre.1120.1048)]
 - 15 Vidal T, Crainic TG, Gendreau M, *et al.* A hybrid genetic algorithm with adaptive diversity management for a large class of vehicle routing problems with time-windows. Computers & Operations Research, 2013, 40(1): 475–489.
 - 16 Vidal T. Technical note: Split algorithm in $O(n)$ for the capacitated vehicle routing problem. Computers & Operations Research, 2016, 69: 40–47.
 - 17 Chazelle B. The bottom-left bin-packing heuristic: An efficient implementation. IEEE Transactions on Computers, 1983, C-32(8): 697–707. [doi: [10.1109/TC.1983.1676307](https://doi.org/10.1109/TC.1983.1676307)]
 - 18 Zachariadis EE, Tarantilis CD, Kiranoudis CT. A guided tabu search for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. European Journal of Operational Research, 2009, 195(3): 729–743. [doi: [10.1016/j.ejor.2007.05.058](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2007.05.058)]
 - 19 Wei LJ, Zhang ZZ, Zhang DF, *et al.* A variable neighborhood search for the capacitated vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. European Journal of Operational Research, 2015, 243(3): 798–814. [doi: [10.1016/j.ejor.2014.12.048](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.12.048)]
 - 20 Goetschalckx M, Jacobs-Blecha C. The vehicle routing problem with backhauls. European Journal of Operational Research, 1989, 42(1): 39–51. [doi: [10.1016/0377-2217\(89\)90057-X](https://doi.org/10.1016/0377-2217(89)90057-X)]
 - 21 Zachariadis EE, Kiranoudis CT. An effective local search approach for the vehicle routing problem with backhauls. Expert Systems with Applications, 2012, 39(3): 3174–3184. [doi: [10.1016/j.eswa.2011.09.004](https://doi.org/10.1016/j.eswa.2011.09.004)]
 - 22 Cuervo DP, Goos P, Sörensen K, *et al.* An iterated local search algorithm for the vehicle routing problem with backhauls. European Journal of Operational Research, 2014, 237(2): 454–464. [doi: [10.1016/j.ejor.2014.02.011](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2014.02.011)]
 - 23 Toth P, Vigo D. An exact algorithm for the vehicle routing problem with backhauls. Transportation Science, 1997, 31(4): 372–385. [doi: [10.1287/trsc.31.4.372](https://doi.org/10.1287/trsc.31.4.372)]
 - 24 Gendreau M, Iori M, Laporte G, *et al.* A Tabu search heuristic for the vehicle routing problem with two-dimensional loading constraints. Networks, 2008, 51(1): 4–18. [doi: [10.1002/net.20192](https://doi.org/10.1002/net.20192)]
 - 25 Leung SCH, Zhang ZZ, Zhang DF, *et al.* A meta-heuristic algorithm for heterogeneous fleet vehicle routing problems with two-dimensional loading constraints. European Journal of Operational Research, 2013, 225(2): 199–210. [doi: [10.1016/j.ejor.2012.09.023](https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.09.023)]