

# 基于约束 HMM 的变点检测算法<sup>①</sup>

庄 玉, 何振峰

(福州大学 数学与计算机科学学院, 福州 350108)

**摘 要:** 时间序列的变点分析在现今社会各个领域中都拥有着广泛的应用. 针对时间序列进行变点分析中要求变点状态需要连续持续一定的时间的应用背景, 提出了一种结合状态最短连续长度约束的隐马尔可夫模型. 给出了约束 Baum-Welch 训练算法和约束 Viterbi 状态提取算法. 应用在仿真数据和 GNP 数据集的实验表明, 结合状态最短连续长度约束的 HMM 相比于一般 HMM 在时间序列变点检测中效率较高.

**关键词:** 变点检测; 约束隐马尔可夫模型; 时间序列分割

## Change Point Detection Based on Constrained Hidden Markov Model

ZHUANG Yu, HE Zhen-Feng

(School of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou 350108, China)

**Abstract:** The change point detection of time series is widely applied in various fields. In some applications, a minimum period is required before a state change. Motivated by such applications, a constrained Hidden Markov Model, which combines with the shortest state continuous length constraint, is proposed in this study. Moreover, a constrained Baum-Welch training algorithm and a constrained Viterbi state extraction algorithm are also given. And experimental results based on the simulation data and GNP data sets indicate that the constrained HMM has higher performance than the general HMM.

**Key words:** change point detection; constrained Hidden Markov Model; time series segmentation

时间序列是随时间次序而变化的一系列数据, 是一类多维的复杂类型数据<sup>[1]</sup>. 当所观察的时间序列跨越时间越长时, 形成的时间序列的随机变量会由于某种条件的变化, 从某时间点开始不再服从原来的分布, 即出现了变点. 随着变点问题应用的愈加广泛, 在一些文献中有许多同义词, 包括了结构断点<sup>[2]</sup>, 时间序列分割<sup>[3]</sup>, 和检测“异常点”<sup>[4]</sup>.

时间序列的变点检测方法可以很好的用 HMM 来建模, 其中时间序列数据就是 HMM 中的输出符号, 可以通过时间序列数据来检测所处的状态, 判断是否出现变点. 一般的 HMM 对隐状态链没有任何限制, 即在隐状态链中可以自由的从一个状态转移到其他任何一个状态. 这样的 HMM 称为无约束 HMM. 在实际工作中, 需要解决的问题一般有领域背景. 希望训练出的 HMM 符合用户的预期. 例如, 在经济学中, 至少要有两个连续的负增长(收缩)状态, 才能说这段时间

处于经济衰退期<sup>[5]</sup>; 在遗传学中, 一个罕见的遗传现象比如, 至少要有几百个碱基长, 才能被认为出现了 CpG island(Aston and Martin, 2007)<sup>[6]</sup>.

针对于此, 本文提出了一种结合状态最短连续长度约束的隐马尔可夫模型, 一般的 HMM 假设时间序列是由一系列隐状态构成, 而系统的运行本质就是在不同的隐状态间转换, 一般的 HMM 对隐状态之间转换没有限制, 本文的方法限制了状态之间的转换. 首先扩展状态数为原来的倍, 并在训练模型时加约束, 限制了状态之间转移, 这样学习出约束 HMM 就自带限制最小变点连续长度, 满足在一些特定的应用情况下要求状态持续的长度限制. 在解码隐状态序列时, 控制最后一个状态一定是扩展状态的最后一个, 就能保证只要序列中出现状态变化即出现变点, 并且状态已经持续至少  $h$ . 并将该模型应用在两组已控制变点位置的模拟数据和 GNP 数据集, 检测其变点.

① 收稿时间:2016-08-06;收到修改稿时间:2016-09-20 [doi:10.15888/j.cnki.csa.005712]

## 1 相关工作

变点问题的研究始于 Page 在 *Biometrika* 上发表的一篇关于连续抽样检验的文章<sup>[7]</sup>. 近二十年来, 变点问题的研究在理论和世纪应用等方面有了快速的发展. 理论上已有了一系列较为成熟的结果, 国外的变点的应用研究主要涉及金融股票市场检测<sup>[8]</sup>、环境检测<sup>[9]</sup>、医药与生物工程<sup>[10]</sup>、系统维护<sup>[11]</sup>等. 我国学者对变点问题的研究始于上世纪 80 年代, 由陈希孺教授和缪柏其教授利用“局部法”开始了变点的研究<sup>[12]</sup>. 在我国对于变点问题的应用还是很少的, 只在少数领域获得了应用, 如张学新等<sup>[13]</sup>研究了最小二乘法检测多个变点的性能, 并成功检测出 1952-2003 年中国主要经济部门 GNP 的变点.

对实际应用背景下, Chib<sup>[14]</sup>和 Luong<sup>[15]</sup>提出了一种带约束的 HMM 即隐状态链中的状态转移是有一定限制的. Nam<sup>[16]</sup>提出了基于 HMM 的限制最小连续长度变点的定义, 描述了一个基于该定义的约束 HMM, 但是他没有给出明确的约束模型的定义, 没有说明状态迁移矩阵以及训练该模型的算法. 他是用一般的训练算法来学习 HMM, 对于限制的最小变点连续长度是在分析隐序列时来约束, 而且 Nam 提出的模型是用来做变点的风险分析. 而本文提出的结合状态最短连续长度的约束 HMM, 描述其状态之间的迁移限制, 给出了约束 HMM 的训练算法以及状态提取算法, 用来解决实际问题中对于最小状态连续长度的限制的问题.

## 2 结合状态最短连续长度约束的HMM

时间序列是一系列按时间先后次序到达的数据序列, 记为  $T = \{y_t | 1 \leq t \leq L\}$ . 在缺乏相关背景知识的情况下, 需要利用有限的信息来尽可能精确的描述时间序列, 并且要求建立这个模型的过程要尽可能简单, 不需要人为的干预, HMM 自身的特点恰好能满足这一要求.

### 2.1 隐马尔可夫模型

HMM 是一种双重随机过程, 一个是隐含的有限状态马尔可夫链即  $x_t$ , 它描述状态的转移, 另一个描述状态与观察值之间的统计对应关系. 在实际问题中我们只能看到观察值, 而不能直接看到隐状态. 只能通过研究观察值序列  $y_t$  去推断隐状态序列  $x_t$ <sup>[17]</sup>. 隐马尔可夫模型为一五元组  $\lambda = (S, V, A, B, \pi)$ , 其中:

隐状态集  $S$ : 隐状态有限集合, 状态数量是  $N$ , 记为  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ ,  $t$  时刻隐状态链所处的状态为  $x_t$ , 其中  $x_t \in S$ .

观察值  $V$ : 每个隐状态对应的可能观察值, 数量为  $M$ . 记为  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_M\}$ ,  $t$  时刻观测到的观测值为  $y_t$ , 则  $y_t \in V$ .

$\pi$  向量: 即状态初始概率,  $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N\}$ , 其中  $\pi_i = P(x_1 = s_i), 1 \leq i \leq N$ , 表示时序的初始状态为  $s_i$  的概率, 且  $\sum_{i=1}^N \pi_i = 1$ .

状态转移概率矩阵:  $A = (a_{ij})_{N \times N}$  其中  $a_{ij} = P(x_{t+1} = s_j | x_t = s_i), 1 \leq i, j \leq N$ , 即由状态  $s_i$  转移到状态  $s_j$  的概率且  $\sum_{j=1}^N a_{ij} = 1$ .

状态输出概率矩阵:  $B = (e_j(v_k))_{N \times M}$ , 其中  $e_j(v_k) = P(y_t = v_k | x_t = s_j), 1 \leq j \leq N, 1 \leq k \leq M$ , 即在状态  $s_j$  下观察到  $v_k$  的概率. 且  $\sum_{k=1}^M e_j(v_k) = 1$ .

### 2.2 变点

使用 HMM 为时间序列建模, 在已知隐状态序列的情况下, 时间序列变点的一般定义如定义 1.

定义 1. 在  $t$  时刻隐状态链的状态改变, 即  $t$  时刻出现变点, 即:

$$x_{t-1} \neq x_t \quad (1)$$

然而, 对于一些实际的应用中, 确定一个变点, 要求这个状态变化要持续一定的时间, 比如第四部分的分析 GNP 数据的经济周期等, 而用一般的 HMM 分析时, 无法限制. 在这些应用情况下, Nam 定义一个持续的变点如定义 2.

定义 2. 当一个状态改变持续了至少  $h(h \geq 1)$  才能确定在时间  $t$  出现变点, 即:

$$x_{t-1} \neq x_t = \dots = x_{t+j}, j \geq h-1 \quad (2)$$

定义 2 的两个重要的特性: 第一, 与其他基于 HMM 的变点方法相似, 变点的分析是从隐状态序列推断的; 第二, 相比于分析隐马尔可夫链的状态变化, 更重要的是分析在隐马尔可夫链中最短持续长度  $h$  的状态变化. 第二个点就是本文提出结合最短连续长度约束 HMM 的主要思想.

### 2.3 结合状态最短连续长度约束的 HMM

针对 Nam 定义的持续的变点, 本文提出结合状态最短连续长度约束的 HMM, 通过控制了状态之间的转移, 来控制状态的最短连续长度, 一个约束 HMM 为一新的五元组  $\lambda = (S', V', A', B', \pi')$ :

状态最短连续长度  $h, 1 \leq h \leq L$ ;

隐状态集  $S'$ : 隐状态数量扩展为  $N \times h$  个, 一般 HMM 的隐状态集为  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_N\}$ , 扩展  $h$  倍, 即  $s_1$  扩展为  $\{s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1h}\}$ , 在计算输出概率矩阵和分析状态链时,  $\{s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1h}\}$  等价于  $s_1$ , 依此类推, 扩展后的  $S' = \{s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1h}, \dots, s_{Nh}\}$ ,  $t$  时刻隐状态链所处的状态为  $q_t$ , 其中  $q_t \in S'$ ;

观察值  $V'$ : 每个隐状态对应的可能观察值, 数量为  $M$ , 记为  $V' = V = \{v_1, v_2, \dots, v_M\}$ , 若  $t$  时刻观测到的观测值为  $o_t$ , 则  $o_t \in V'$ ;

$\pi$  向量: 即状态初始概率,  $\pi' = (\pi_{11}, \dots, \pi_{1h}, \dots, \pi_{Nh})$  其中,  $\pi_{im}$  表示时序的初始状态为  $s_{im}$  的概率, 由于状态  $s_i$  扩展为  $s_{im}$ , 初始状态只能从  $s_{i1}$  开始, 所以当  $m \neq 1$  时,  $\pi_{im} = 0$  且  $\sum_{i=1}^N \pi_{i1} = 1$ ;

状态转移矩阵:  $A' = (a_{im,jn})_{Nh \times Nh}$ , 其中  $a_{im,jn} = P(x_{t+1} = s_{jn} | x_t = s_{im}), 1 \leq i, j \leq N, 1 \leq m, n \leq h$ , 即由状态  $s_{im}$  转移到状态  $s_{jn}$  的概率且  $\sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^h a_{im,jn} = 1$ .

与一般 HMM 不同的是, 约束 HMM 在学习状态转移矩阵时, 对状态之间的转移加上了限制. 如图 1 为状态数为 2,  $h=2$  时的状态转移图. 初始状态只能从扩展状态的第一个状态开始, 如图中的  $s_{11}, s_{21}$ , 当处于同一个状态时,  $s_{11}$  只能转移到  $s_{12}$ , 而处于  $s_{12}$  时, 说明  $s_1$  这个状态已经持续了  $h=2$ ,  $s_{12}$  可达的状态可以是自身  $s_{12}$  另一个状态的第一个扩展状态  $s_{21}$ . 在这样的限制下, 就可以保证一个状态可以持续至少  $h=2$ .

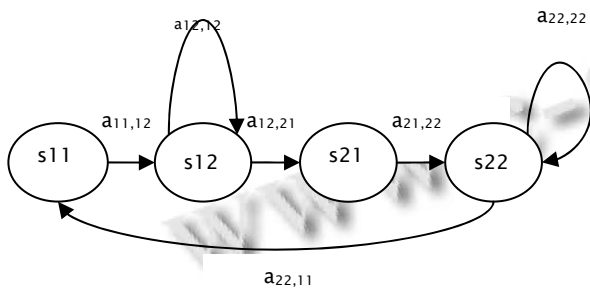


图 1 2-状态,  $h=2$  状态转移图

输出矩阵:  $B' = (e_{jm}(v_k))_{Nh \times M}$ , 其中  $e_{jm}(v_k) = P(y_t = v_k | x_t = s_{jm}), 1 \leq j \leq N, 1 \leq k \leq M, 1 \leq m \leq h$ , 即在状态  $s_{jm}$  下观察到  $v_k$  的概率. 且  $\sum_{k=1}^M e_{jm}(v_k) = 1$ . 与一般 HMM 不同的是, 在  $s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jh}$  观察到  $v_k$  对应的输出概率都相等, 因为在约束 HMM 中  $s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jh}$  等同于一般 HMM 中的状态  $s_j$ , 同一个状态观察到  $v_k$  的概率

应该是相等的, 即  $e_{j1}(v_k) = e_{j2}(v_k) = \dots = e_{jh}(v_k)$ .

当  $h=1$  时, 约束 HMM 就是一般 HMM 模型.

### 2.4 约束 HMM 的学习算法

Baum-Welch 算法是隐马尔科夫模型学习问题的一种常用解决方法. 约束 HMM 的学习算法是在 Baum-Welch 算法基础上加入状态最短连续长度的约束. 训练约束 HMM 的过程如下:

- 1) 初始化约束 HMM, 设置  $h$ , 初始化  $\lambda = (\pi, A, B)$
- 2) 计算辅助变量:

定义前向变量  $\alpha_t(i)$  表示已知模型  $\lambda$  及  $t$  时刻位于隐状态  $s_i$ , 从开始时刻到  $t$  时刻的  $(o_1 o_2 \dots o_t)$  的概率. 后向变量  $\beta_{t+1}(j)$  表示已知模型及  $t+1$  时刻处于隐状态, 从  $t+1$  时刻到  $L$  时刻的  $(o_{t+1} o_{t+2} \dots o_L)$  的概率.  $\xi_t(i, j)$  表示在  $t$  时刻位于隐状态  $s_i$  以及  $t+1$  时刻位于隐状态  $s_j$  的概率:

$$\xi_t(i, j) = P(q_t = i, q_{t+1} = j | O, \lambda) = \frac{\alpha_t(i) a_{ij} e_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j)}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_t(i) a_{ij} e_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j)} \quad (3)$$

$\gamma_t(i)$  表示在  $t$  时刻呈现状态  $s_i$  的概率:

$$\gamma_t(i) = \sum_{j=1}^N \xi_t(i, j) \quad 1 \leq k \leq L-1 \quad (4)$$

- 3) 参数更新, 重估公式:

$\overline{\pi_{im}}$  是在初始时刻出现状态的频率的期望值,

$$\overline{\pi_{im}} = \gamma_1(im) \quad (5)$$

与一般 HMM 不同, 由于隐状态扩展为原来的  $h$  倍, 初始状态只能从开始, 即  $m \neq 1$  时,

$\overline{a_{im,jn}}$  是从状态转移到状态的次数的期望值除以从状态转移出去的次数的期望值.

$$\overline{a_{im,jn}} = \frac{\sum_{t=1}^{L-1} \xi_t(im, jn)}{\sum_{t=1}^{L-1} \gamma_t(im)} \quad (6)$$

$\overline{e_j(v_k)}$  是在状态下观察到的概率. 由于状态扩展为原来的  $h$  倍, 即状态  $s_j$  有  $h$  个, 分别为  $\{s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jh}\}$ . 故的计算为在状态下观察到为的期望值除以从其他状态转移到状态的次数的期望值.

$$\overline{e_{j^*}(v_k)} = \frac{\sum_{t=1}^L \sum_{o_t=v_k} \sum_{n=1}^h \gamma_t(jn)}{\sum_{t=1}^L \sum_{n=1}^h \gamma_t(jn)} \quad (7)$$

并且, 对于相同的  $v_k$ ,  $\{s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jh}\}$  对应的输出概率都相等即  $e_{j1}(v_k) = e_{j2}(v_k) = \dots = e_{jh}(v_k)$ .

在每次循环的参数重估结束后, 都要修改转移矩阵  $A$ : 当  $i = j$  时, 当  $m = n + 1$ ,  $a_{im,jn} = 1$ , 如果  $m \neq n + 1$  或  $m = n \neq h$ , 其他情况下,  $a_{im,jn} = a_{im,jn}$ ; 当

时, 当  $m=1, n=h$  或者  $m=h, n=1$  时,  $a_{m,jn} = a_{m,jn}$  其他情况下,  $a_{m,jn} = 0$ . 控制状态之间的转移.

然后用新的参数再来计算前向变量、后向变量、 $\xi_i(i, j)$ 、 $\gamma_i(i)$ . 在每次训练参数时都要满足  $\sum_{i=1}^N \bar{\pi}_i = 1, \sum_{j=1}^N \bar{a}_{ij} = 1, \sum_{k=1}^M \bar{e}_j(v_k) = 1$ .

本文的方法与一般的 Baum-Welch 算法不同的地方就在于在参数重估步骤中, 对初始概率, 输出矩阵和状态转移矩阵的修改.

### 2.5 约束 HMM 的状态提取算法

解决给定模型及观测序列 O, 求生成此观测序列的最大可能的隐状态序列, 一般采用的是 Viterbi 算法, 解码最大可能的隐状态序列.

在分析隐状态序列变点时, 有两种情况一种是隐状态序列最后一个状态允许是一半状态, 另一种是状态必须满足 h 个, 本文的方法是用到后一种情况分析 Viterbi 序列. 限制了隐状态序列最后一个状态一定是扩展状态的最后一个状态, 保证了最后一个状态的持续时间也不小于 h. 算法 1 为约束 HMM 的状态提取算法.

#### 算法 1: 约束 HMM 的状态提取算法

输入: 约束 HMM 参数  $\lambda = (\pi, A, B)$ , 观测序列 O  
输出: 最大可能生成 O 的隐状态序列  $q_1, q_2, \dots, q_L$

Forwards Run: Set

$$\delta_1 = \pi_i e_i(o_1), \psi_1(i) = 0$$

for  $t=1, \dots, L-1$  do

$$\delta_{t+1}(j) = \max_{1 \leq i \leq N} [\delta_t(i) a_{ij}] \cdot e_j(o_t)$$

$$\psi_{t+1}(j) = \max_{1 \leq i \leq N} [\delta_t(i) a_{ij}] \quad \forall i, j \in \Omega S'$$

end for

if  $(m \neq h)$

$$\delta_L(im) = -1 \quad \forall i \in \Omega S'$$

Backwards Runs: Set  $q_L^* = \arg \max_{1 \leq i \leq N} [\delta_L(i)]$

For  $t=L-1, \dots, 1$  do

$$q_t^* = \psi_{t+1}(q_{t+1}^*)$$

end for

序列  $q_1, q_2, \dots, q_L$  就是生成观测序列 O 的最大可能的隐状态序列

与一般 HMM 不同的是, 约束 HMM 要限制隐状态序列最后一个状态一定是扩展状态的最后一个状态, 即一定是  $S_{th}$ , 本文状态提取算法与 Viterbi 算法不

同之处是把其他扩展状态的  $\delta_i(im)$  设置为 -1.

通过状态提取算法得到了最大可能的隐状态序列  $q_1, q_2, \dots, q_L$ , 便可分析变点. 在训练方法的限制和状态提取算法的限制下可直接找出变点, 即当  $q_{t-1} \neq q_t$ , t 时刻出现了变点. 而且这个变点满足了状态持续时间至少为 h.

## 3 实验

### 3.1 实验设计与数据准备

为了验证本文提出的约束 HMM 比一般的 HMM 在检测实际应用上的便捷性, 我们将约束 HMM 应用到实际数据的处理与分析工作中.

实验中用到的数据集:

① 已控制变点位置的模拟数据, 变点出现在  $t=10, t=20$  处.

第一组序列:

"baaaaaaaaaa bbbbbbbbbb aaaaaaaaaab "

第二组序列:

"baaaaaaaaaa bbbbbbbbbb aaaaaaabaa "

② Hamilton 美国 GNP 数据集(Hamilton, 1989), 是由美国的 1951 第二季度到 1982 年第四季度的 GNP 数据的对数增长率. 我们的任务是检测出这期间的经济周期衰退期的开始和结束.

根据经济周期理论, 一个完整的经济周期应包括复苏、高涨、衰退、萧条等四个阶段, 故将 GNP 数据即观测序列离散化为四个观测值, 离散化的结果如图 2.

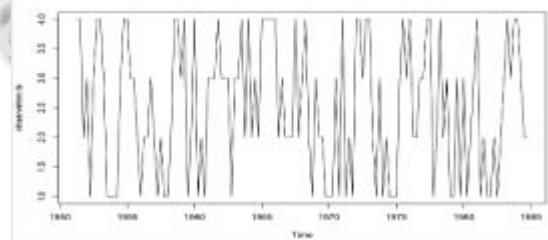


图 2 离散化后的 GNP 数据

基于约束 HMM 的变点检测方法步骤:

- ① 数据集, 整理数据
- ② 初始化约束 HMM
- ③ 用约束 Baum-Welch 算法训练约束 HMM
- ④ 用约束 Viterbi 算法解码隐状态序列
- ⑤ 根据实际应用背景分析隐状态序列变点

### 3.2 实验结果及分析

### 3.2.1 分别用约束 HMM 和 HMM 分析模拟数据

第一组序列:

用 HMM 为观察序列建模, 得出隐状态链得到的是:

12222222211111111112222222221

设定  $h=3$ , 约束 HMM 得到的隐状态链为:

1111111112222222221111111111

第二组序列:

用 HMM 得到隐状态链得到的是:

1222222221111111111222222222

用约束 HMM 得到的隐状态链为:

1111111112222222221111111111

对比序列 1 和 2 的结果, 一般 HMM 容易检测出小波动的变点, 即状态改变只有一两个时间点, 容易检测出额外的变点如  $t=1, t=29$ , 而使用约束 HMM 就能够准确地检测到变点的位置, 并保证了状态至少持续了  $h=3$  时间.

### 3.2.2 分别用约束 HMM 和 HMM 分析 GNP 数据的经济周期

根据离散化的 GNP 数据, 观测值有四个为("F", "G", "S", "X")分别代表一个完整经济周期的四个阶段: 复苏、高涨、衰退和萧条. 隐状态为("K", "S")分别代表经济活动的扩张和收缩状态. 在要求限定下, 设置  $h=2$ . 约束 HMM 隐状态扩展为("K1", "K2", "S1", "S2").

用一般的 HMM 检测到的变点分布如图 3 所示.

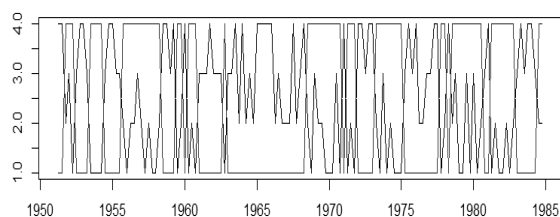


图 3 一般 HMM 检测到的变点分布

从图 3 可观察到检测出了 12 个变点, 分别分布在 1951/2~1952/2, 1953/3~1954/2, 1955/4~1958/2, 1959/3~1959/4, 1960/2~1960/4, 1962/4, 1968/3~1970/4, 1971/2~1971/4, 1973/2~1975/1, 1977/4~1978/1, 1978/3~1980/3, 1981/2~1982/4, 1984/3~1984/4

基于约束 HMM 检测到的变点如图 4.

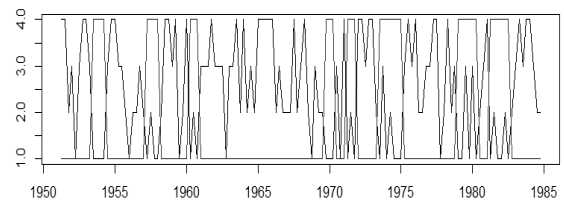


图 4 约束 HMM 检测到的变点分布

检测出 8 个变点分别分布在 1953/2~1954/2, 1957/2~1958/1, 1960/2~1960/1, 1969/4~1970/2, 1971/2~1971/4, 1973/3~1975/1, 1979/1~1980/2, 1981/2~1982/3.

由一般 HMM 检测到的变点和约束 HMM 检测到的变点对比分析可得到, 一般 HMM 检测到的变点, 无法满足经济周期拐点的定义, 即无法满足经济周期的衰退期至少持续两个季度, 比如变点 1962/4, 该变点只有一个季度, 无法判定为经济周期, 并且变点与变点之间相距时间太短, 如 1977/4~1978/1 和 1978/3~1980/3 之间, 约束 HMM 因为限制了  $h$  故不会出现这种情况. 还可以观察到一般 HMM 会把数据开始和结束当做变点, 这在约束 HMM 结果中不会出现.

## 4 结语

基于一般 HMM 的变点检测方法没有考虑到实际应用背景中要求变点状态持续一定时间, 比如本文实验中检测经济周期时, 需要衰退期至少持续两个季度. 本文提出结合状态最短连续长度约束 HMM 通过控制状态之间的转移, 能够有效的检测出时间序列的变点, 并且满足相关应用背景对状态持续一定时间的要求. 实验结果表明, 较之一般 HMM, 约束 HMM 在保证检测变点准确度前提下, 满足了状态最短持续时间, 提高了变点检测效率.

## 参考文献

- 1 Janacek G. Time series analysis forecasting and control. *Journal of Time Series Analysis*, 2010, 31(4): 303.
- 2 Davis RA, Lee TCM, Rodriguez-Yam G A. Structural break estimation for nonstationary time series models. *Journal of the American Statistical Association*, 2006, 101(473): 223-239.
- 3 Cheong SA, Forna RP, Lee GHT, et al. The Japanese economy in crises: A time series segmentation study. *Economics: The Open-Access, Open-Assessment E-Journal*, 2012, 6(2012-5): 1-81.

- 4 Zaccarelli N, Li BL, Petrosillo I, et al. Order and disorder in ecological time-series: Introducing normalized spectral entropy. *Ecological Indicators*, 2013, 28(5): 22–30.
- 5 Stock JH, Watson M W. Has the business cycle changed and why? *Nber Macroeconomics Annual*, 2002, 17(1): 159–218.
- 6 Aston JAD, Martin DEK. Distributions associated with general runs and patterns in hidden Markov models. *Annals of Applied Statistics*, 2007, 1(2): 585–611.
- 7 Page ES. Continuous inspection schemes. *Biometrika*, 1954, 41(1/2): 100–115.
- 8 Tseng YH, Durbin P, Tzeng GH. Using a fuzzy piecewise regression analysis to predict the nonlinear time-series of turbulent flows with automatic change-point detection. *Flow Turbulence & Combustion*, 2001, 67(2): 81–106.
- 9 Leone D, Nott DJ, Dunsmuir WTM. Smoothing and change point detection for gamma ray count data. *Mathematical Geology*, 2003, 35(2): 175–194.
- 10 Patra K, Dey DK. A general class of change point and change curve modeling for life time data. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 2002, 54(3): 517–530.
- 11 Moltchanov D. State description of wireless channels using change-point statistical tests. *Wired/wireless Internet Communications*, 2006, (3970): 275–286.
- 12 陈希孺. 只有一个转变点的模型的假设检验和区间估计. *中国科学*, 1988, 31(8): 817–827.
- 13 张学新, 段志霞. 最小二乘法对多变点检验的性能研究. *河南师范大学学报: 自然科学版*, 2009, 37(6): 7–10.
- 14 Chib S. Estimation and comparison of multiple change-point models. *Journal of Econometrics*, 1998, 86(2): 221–241.
- 15 Luong TM, Rozenholc Y, Nuel G. Fast estimation of posterior probabilities in change-point analysis through a constrained hidden Markov model. *Computational Statistics & Data Analysis*, 2013, (68): 129–140.
- 16 Nam CFH, Aston JAD, Johansen AM. Quantifying the uncertainty in change points. *Journal of Time Series Analysis*, 2012, 33(5): 807–823.
- 17 Concha OP, Xu RYD, Moghaddam Z, et al. HMM-MIO: An enhanced hidden Markov model for action recognition. *CVPR Workshops*, 2011: 62–69.