PUMA 机器人运动学逆解新算法①

葛小川 [1,2], 郑飂默 [2,3], 郑国利 [3], 吴纯赟 [1,2], 吕永军 [1,2]

[1](中国科学院大学, 北京 100049)
[2](中国科学院 沈阳计算技术研究所, 沈阳 110168)
[3](沈阳高精数控智能技术股份有限公司, 沈阳 110168)

摘 要: 6R 串联机器人的逆解求解复杂, 使用传统的 D-H 算法求解该问题计算量大且无法避免奇异点. 将 PUMA 机器人的逆运动学的求解分为位置求解和姿态求解两个过程. 首先使用D-H方法进行位置求解得到关节角 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$, 然后使用单位四元数的方法求解出 $\theta_4,\theta_5,\theta_6$. 最后, 在 PUMA 机器上进行验证, 新的方法能够正确求解出所有解析解. 对比新方法、D-H 方法和倍四元数的方法, 新方法较 D-H 方法速度提高了 15%左右.

关键词: 六关节机器人; 逆运动学; D-H 方法; 单位四元数; PUMA 机器人

Application of Double Quaternion in the Inverse Kinematics of 6R Serial Robots

GE Xiao-Chuan[1,2], ZHENG Liao-Mo[2,3], ZHENG Guo-Li[2],WU Chun-Yun[1,2], LV Yong-Jun[1,2]

[1](University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)
[2](Shenyang Institute of Computing Technology, Chinese Academy of Sciences, Shenyang 110168, China)
[3](Shenyang Golding NC Intelligence Tech.Co. Ltd., Shenyang 110168, China)

Abstract: The inverse kinematics of a general 6R serial robots has much difficulty to be solved.The method using traditional D-H need amount of computations and exists singular solution. Inverse kinematics of puma robot decomposes into position solution and pose solution. Firstly we use D-H method to solve $\theta_1,\theta_2,\theta_3$, then use the unit quaternion to solve $\theta_4,\theta_5,\theta_6$. At last we verify the new method in the robot of puma and new method can solve the inverse kinematics correctly. Compared with D-H method and double quaternion method, the new method has much increase about 15% in speed than D-H method.

Key words: 6-R robot; unit quaternion; D-H method; inverse kinematics; PUMA robot

机器人逆运动学是机器人路径规划和控制的基础. 国内外的研究人员采用了很多方法求解该问题. 逆运动学就是已知末端执行器的位姿, 求解相应的关节变量的过程[1]. Denavit 和 Hartenberg[2]在 1955 年提出了 D-H 运动学模型, 它是目前最常用到的运动学模型. 当相邻关节平行或接近平行时, D-H 模型存在奇异解的情况. Hayati[3]在 D-H 模型的基础上引入了特定坐标变换, 很好的解决了 D-H 模型的奇异问题. Stone 等在 D-H 模型基础上添加了两个参数提出了 S 模型. Zhuang 等[4]提出了 CPC(complete and parametrically continuous)模型, 随后又提出了 MCPC(Modified CPC)模型, 给出了相对于末端坐标系的误差模型. 但是, 这些方法都涉及到大量的矩阵运算, 计算复杂而且存在奇异性的问题, 不能满足实时在线控制的需求.

近年来许多研究人员采用单位四元数[4-6]、对偶四元素[7-9]和倍四元数[10,11]等旋转理论建立机器人的运动学方程求解问题. 如倪振松等[12]提出了一种四元数矩阵和对偶四元数矩阵的新方法, 张忠海等[13]结合四元数和 D-H 方法提出了包含 D-H 参数的四元数变换通用方程式. 基于旋场理论解决机器人逆运动学是最近研究的热点, 虽然已经有一些方法提出并得到了实际应用. 但是仍有很多的问题需要解决, 比如模型复杂度高、计算量大、求解困难等.

针对上述问题, 本文提出了结合传统 D-H 和单位

① 基金项目:国家科技重大专项(2013ZX04001-031)
收稿时间:2016-03-03;收到修改稿时间:2016-04-11 [doi:10.15888/j.cnki.csa.005433]

四元数求解机器人逆运动学新的方法. 该方法将机器人逆运动学的求解过程分为位置求解和姿态求解, 分别使用 D-H 方法和单位四元数方法求解. 仿真表明, 该方法较 D-H 的方法速度有很大的提高.

1　PUMA机器人运动学模型建立

PUMA 机器人的机械手臂构成一个开式运动链. 它由一系列连杆通过转动关节串联而成, 关节的相对转动带动连杆运动. 如图 1 建立连体坐标系, 根据 D-H 方法建立运动学方程式(1),其 D-H 参数见表 1.

$$T = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 \tag{1}$$

$$A_i = Trans(a_{i-1},0,0)Rot(X_{i-1},\alpha_{i-1})Trans(0,0,d_i)Rot(Z_i,\theta_i)$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin\theta_i\cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & -d_i\sin\alpha_{i-1} \\ \sin\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & d_i\cos\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

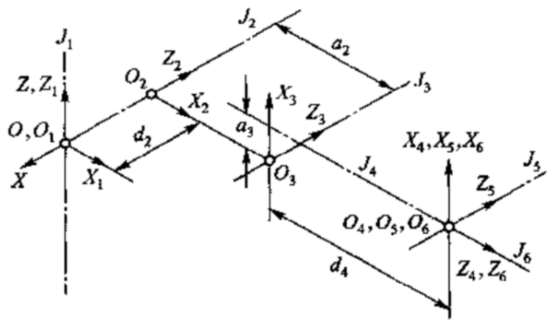

图 1　PUMA 机器人连体坐标系

表 1　PUMA 机器人 D-H 参数

关节 i	关节角 θ_i	扭转角 α_{i-1}	连杆长度 a_{i-1}	连杆偏移量 d_i	关节范围
1	90	-90	0	0	-160～160
2	0	0	α_i	d_2	-225～45
3	90	90	0	0	-45～225
4	0	-90	0	d_4	-110～170
5	0	90	0	0	-100～100
6	0	0	0	d_6	-226～226

注: 角度的单位是度, 长度的单位是毫米

2　基于单位四元数的运动学模型

2.1 单位四元数及速度比较

在坐标系变换中经常采用单位四元数描述两个坐标系之间的旋转关系, 单位四元数可以表示成:

$$q = s + \vec{v} = s + xi + yj + zk = [s,x,y,z] \tag{3}$$

其中, $s^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$. 有两个四元数 $q_1 = [s_1, \vec{v}_1], q_1 = [s_2, \vec{v}_2]$.

若存在旋转矩阵 R, 表示为:

$$R = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix}$$

R 可以映射为一个单位四元数 $q = [s, <x,y,z>]$, 其中

$$s = \frac{\sqrt{x_1 + y_2 + z_3}}{2}, x = \frac{\sqrt{x_1 + y_2 + z_3 + 1}}{2}$$
$$y = \frac{\sqrt{y_2 - x_1 - z_3 + 1}}{2}, z = \frac{\sqrt{z_3 - y_2 - x_1 + 1}}{2} \tag{4}$$

使用 C 语言上分别对旋转矩阵和四元数乘法运算的速度和求逆运算速度进行比较, 分别得到四个组合的 10 组数据, 如图 2 所示.

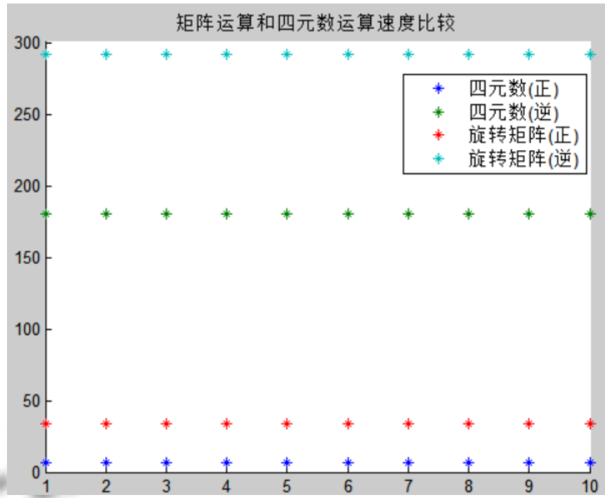

图 2　四元数和旋转运动乘法和求逆运算速度比较

对比旋转矩阵和四元数的乘法运算和求逆运算, 发现逆运算效率明显低于乘法运算. 四元数的乘法运算速度快于旋转矩阵, 时间上提高了近 2 倍, 逆运算提高了 60%因此, 可以得到使用四元数表示旋转的效率比旋转矩阵要高, 乘法运算和求逆运算越多体现的就越明显.

2.2 单位四元数的运动学模型

Q_i 表示第 i 次旋转的单位四元数表示, 将公式(2)中的旋转矩阵使用单位四元数表示后得到机器人的运动学方程:

$$T = Q_1 Q_2 Q_3 ... Q_n \tag{5}$$

Q_i 可以由公式(1)和公式(4F)联合得出.

3　PUMA逆运动求解新算法

文献[15]提出了对于一些位置和姿态解耦的机器人可将串联机器人的运动链拆分成位移运动和旋转运动两部分分别求解的假设. 本文采用 D-H 和单位四元数相结合的方法将 6R 机器人的逆运动学分解成位置求解和姿态求解两个过程, 分别求解出对应的关节角.

3.1 位置求解

由公式(1)得到

$$A_1^{-1}T = A_2A_3A_4A_5A_6 \tag{6}$$

将公式(6)等式两端展开, 得到式(7)和(8).

$$A_1^{-1}T = \begin{bmatrix} t_{111} & t_{112} & t_{113} & \cos\theta_1 p_x + \sin\theta_1 p_y \\ t_{121} & t_{122} & t_{123} & -\sin\theta_1 p_x + \cos\theta_1 p_y \\ t_{131} & t_{132} & t_{133} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$A_2A_3A_4A_5A_6 = \begin{bmatrix} m_{111} & m_{112} & m_{113} & a_2\cos\theta_2 + a_3\cos(\theta_2+\theta_3) - d_4\sin(\theta_2+\theta_3) \\ m_{121} & m_{122} & m_{123} & d_2 \\ m_{131} & m_{132} & m_{133} & -a_2\sin\theta_2 - a_3\sin(\theta_2+\theta_3) - d_4\cos(\theta_2+\theta_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

式(7)和(8)的第四列分别表示初始位置和末端位置, 由两公式可以看出末端位置只跟$\theta_1,\theta_2,\theta_3$有关. 利用式(7)和(8)第四列第二行的元素相等, 得到式(9).

$$-\sin\theta_1 p_x + \cos\theta_1 p_y = d_2 \tag{9}$$

利用三角函数公式得到式(10).

$$\theta_1 = \arctan 2(p_y, p_x) - \arctan 2(d_2, \pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}) \tag{10}$$

其中$\arctan(x,y) = \arctan(\frac{y}{x})$. 由式(7)和(8)中第四列前三列元素对应相等得到式(11).

$$\begin{cases} \cos\theta_1 p_x + \sin\theta_1 p_y = a_2\cos\theta_2 + a_3\cos(\theta_2+\theta_3) - d_4\sin(\theta_2+\theta_3) \\ -\sin\theta_1 p_x + \cos\theta_1 p_y = d_2 \\ p_z = -a_2\sin\theta_2 - a_3\sin(\theta_2+\theta_3) - d_4\cos(\theta_2+\theta_3) \end{cases} \tag{11}$$

对上式取平方和, 有

$$-\sin\theta_3 d_4 + \cos\theta_3 a_3 = k \tag{12}$$

其中, $k = \dfrac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - a_2^2 - a_3^2 - d_2^2 - d_4^2}{2a_2}$, 根据$\theta_1$的求法可以求得$\theta_3$的两个解.

$$\theta_3 = \arctan 2(a_3, d_4) - \arctan 2(k, \pm\sqrt{a_3^2 + d_4^2 - k^2}) \tag{13}$$

由式(11)第 1 个和第 3 个等式联立, 最终可以得到θ_2的解:

$$\begin{aligned} \theta_2 = {} & \arctan 2([(-a_3 - a_2\cos\theta_3)p_z + (\cos\theta_1 p_x + \sin\theta_1 p_y)(a_2\sin\theta_3 - d_4), \\ & (-d_4 - a_2\sin\theta_3)p_z - (\cos\theta_1 p_x + \sin\theta_1 p_y)(-a_3 - a_2\cos\theta_3)] - \theta_3 \end{aligned} \tag{14}$$

3.2 姿态求解

3.1 节的位置求解已经求解出了$\theta_1,\theta_2,\theta_3$. 采用单位四元数表示机器人姿态后, 机器人逆运动学可以描述为, 已知末端执行器的位姿$A = (s,x,y,z)$, 求解关节变量$\theta_4,\theta_5,\theta_6$. 构造一对四元数:

$$M_i = Q_iQ_{i+1}\ldots Q_6, (i = 4,5,6) \tag{15}$$

$$N_{j+1} = Q_j^{-1}N_j, (j = 3,4,5) \tag{16}$$

计算出M_i和N_i后, 令$M_1 = N_1 = A, M_2 = N_2, \ldots, M_6 = N_6$比较对应的元素结合位置求解中求出的$\theta_1,\theta_2,\theta_3$可以求解出$\theta_4,\theta_5,\theta_6$.

根据表 1 和式(14)可以将关节变换矩阵映射成单位四元数, 分别为:

$$\begin{aligned} Q_4 &= \frac{\sqrt{2}}{2}[\vec{c}\theta_4, \vec{c}\theta_4, \vec{s}\theta_4, \vec{s}\theta_4] \\ Q_5 &= \frac{\sqrt{2}}{2}[\vec{c}\theta_5, \vec{c}\theta_5, \vec{s}\theta_5, \vec{s}\theta_5] \\ Q_6 &= \frac{\sqrt{2}}{2}[\vec{c}\theta_6, \vec{c}\theta_6, \vec{s}\theta_6, \vec{s}\theta_6] \end{aligned} \tag{17}$$

式(15)和(16)得:

$$Q_3^{-1}Q_2^{-1}Q_1^{-1}A = Q_4Q_5Q_6 \tag{18}$$

将式(18)等式两段展开, 可以得到式(19)和(20).

$$Q_3^{-1}Q_2^{-1}Q_1^{-1}A = [f_{s1}(\theta_1,\theta_2,\theta_3), f_{x1}(\theta_1,\theta_2,\theta_3), f_{y1}(\theta_1,\theta_2,\theta_3), f_{z1}(\theta_1,\theta_2,\theta_3)] \tag{19}$$

$$Q_4Q_5Q_6 = [f_{s2}(\theta_4,\theta_5,\theta_6), f_{x2}(\theta_4,\theta_5,\theta_6), f_{y2}(\theta_4,\theta_5,\theta_6), f_{z2}(\theta_4,\theta_5,\theta_6)] \tag{20}$$

式(19)和(20)四元数对应的项相等得到方程组式(25).

$$\begin{cases} f_{s2}(\theta_4,\theta_5,\theta_6) = f_{s1}(\theta_1,\theta_2,\theta_3) \\ f_{x2}(\theta_4,\theta_5,\theta_6) = f_{s1}(\theta_1,\theta_2,\theta_3) \\ f_{y2}(\theta_4,\theta_5,\theta_6) = f_{y1}(\theta_1,\theta_2,\theta_3) \\ f_{z2}(\theta_4,\theta_5,\theta_6) = f_{z1}(\theta_1,\theta_2,\theta_3) \end{cases} \tag{21}$$

将位置求解中求得的$\theta_1,\theta_2,\theta_3$带入式(21), 联立方程组可以求出对应的$\theta_4,\theta_5,\theta_6$.

4　验证

这里采用文献[16]的数据对方法的正确性进行验证. 首先在在 MATLAB R2010b 上计算出 8 组解析解, 然后在 PUMA 上对这 8 组解进行验证. 6R 机器人的结构参数和位置参数为:

$d_1 = 100, d_2 = 50, d_3 = 50, d_4 = -50, d_5 = -20, d_6 = 10,$

$a_1 = 10, a_2 = 100, a_3 = 150, a_4 = 200, a_5 = 5, a_6 = 20,$

$\alpha_1 = \dfrac{-\pi}{6}, \alpha_2 = \dfrac{\pi}{6}, \alpha_3 = \dfrac{\pi}{3}, \alpha_4 = \dfrac{-\pi}{6}, \alpha_5 = \dfrac{-\pi}{6}, \alpha_1 = \dfrac{-\pi}{4},$

$\theta_1 = \dfrac{-\pi}{6}, \theta_2 = \dfrac{\pi}{2}, \theta_3 = \dfrac{-\pi}{3}, \theta_4 = \dfrac{\pi}{2}, \theta_5 = \dfrac{-\pi}{6}, \theta_6 = \dfrac{-\pi}{6}$

首先使用 D-H 的方法进行位置求解, 然后使用单

位四元数的方法进行姿态求解. 最终得到 8 组解析解. 将得到的 8 组解析解在 PUMA 机器人上进行验证, 最终都能够到达相同的末端位姿.

使用 Matlab robotics 分别使用 D-H 方法, 倍四元数的方法和本文提出的新方法对关节范围内 10 组关节角进行求逆运算. 为了计算结果更精确, 每组逆运动迭代 100 次然后求得平均值作为最终结果. 在 Intel Core i7-4710MQ 主频 2.5GHzCPU 和 8GB 内存的电脑上得到的结果如图 2 所示.

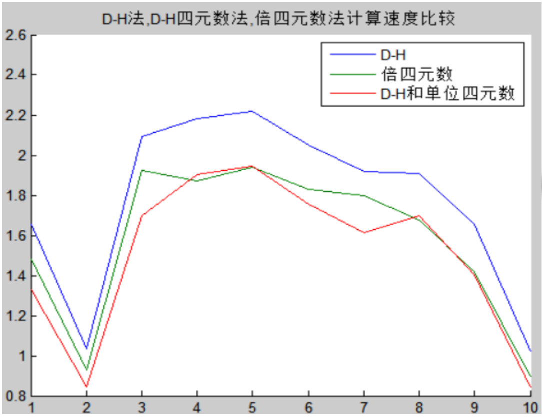

图 2　新方法与 D-H 法、倍四元数法计算速度比较

从图 2 可以看出新方法较 D-H 方法和倍四元数的方法速度有很大程度的提高. D-H 方法、倍四元数的方法和新方法依次平均耗时分别为 1.77s、1.57s、1.50s. 新方法比 D-H 方法逆运动的计算速度提高了 15.2%, 倍四元数方法比 D-H 方法提高了 11%左右. 从图中还可以发现新方法比 D-H 方法更鲁棒, 更因此, 新方法有很好的应用价值.

5　结论

采用 D-H 法和单位四元数相结合的新方法将 PUMA 机器人的逆运动学问题分解成位置求解和姿态求解, 首先使用 D-H 方法进行位置求解得到关节角 , 然后使用单位四元数的方法求解出 . 最后, 在 PUMA 机器上进行验证, 新的方法能够正确求解出所有解析解. 对比新方法、D-H 方法和倍四元数的方法, 新方法求解速度有很大的提高.

反解的方法在机器人仿真运动中得到了验证, 可以应用于机器人运动学参数的标定与补偿中. 同时使用单位四元数描述空间的旋转计算简单且不会出现奇异的情况.

参考文献

1 龚星如.六自由度工业机器人运动学标定的研究[硕士学位论文].南京:南京航空航天大学,2012.

2 毕洁明,蔡鹤皋.六自由度操作手的逆运动学问题.机器人,1994,16(2):92–97.

3 廖启征.空间一般 6R 机械手的位置逆解.中国科学技术库TP0093.北京:科学技术文献出版社,1997.

4 陈爱.基于四元数的 6R 串联机器人运动学逆解应用.机电工程技术,2013,(9):5–10.

5 屈健康.基于四元数向量的机器人运动学逆解研究.制造业自动化,2009,31(9):8–10.

6 徐娅萍.基于四元数向量的机器人运动学逆解研究.制造业自动化,2009,31(9):8–10.

7 杨勇.基于对偶四元数的 1P5R 串联机械手的位置反解.科技信息,2009,(14):14–15.

8 张劲夫,蔡泰信.对偶四元数及其在刚体定位中的应用.黄淮学刊(自然科学版),1993,(S4):27–30.

9 綦星光,王博.基于对偶四元数的移动机器人主动视觉定位.第 25 届中国控制与决策会议论文,2013.

10 宋婧,方康玲.基于倍四元数的机器人逆运动学分析.机械与电子,2010,(12):67–69.

11 乔曙光,廖启征,黄昔光.倍四元数及其在串联机构运动分析中的应用.机械设计与制造,2008,(2).

12 倪振松,廖启征,吴莘馨.基于四元数矩阵与 Groebner 基的 6R 机器人运动学逆解算法.清华大学学报(自然科学版),2013,(5):683–687.

13 张忠海,李端玲.串联机构运动学反解的 D-H 四元数方法.农业机械学报,2014,45:299–304.

14 探讨: 物体绕任意向量的旋转-四元数法 VS.旋转矩阵法的性能比较. http://www.xuebuyuan.com/2093321. 1html.

15 乔曙光.6 自由度串联机械手位置逆解新方法[硕士学位论文].北京:北京邮电大学,2008.

16 Husty ML, Pfurner M, Schrocker HP. A new and efficient algorithm for the inverse kinematics of a general serial 6R manipulator. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(1): 66–81.