QBF 问题中隐蔽集的求解过程①

杨俊成, 陶 琳, 李淑霞

(河南工业职业技术学院 电子信息工程系, 南阳 473000)

摘 要: 隐蔽集作为 QBF 问题的重要结构之一, 能使 QBF 这一难求解问题变得更加简单. QBF 问题中隐蔽集的求解相当复杂且难以理解. 为了使读者更好的理解 QBF 问题中隐蔽集的求解过程, 本文对 QBF 问题中隐蔽集的求解过程进行深入研究, 结合实例计算变量的深度、选择符合条件的变量 x 并计算其对应的三角依赖变量集 $D_{\psi}^{\Delta}(x)$, 根据 $B=B\cup\{x\}=\{x\}$ 和 $\psi'=\psi-D_{\psi}^{\Delta}(x)$ 的思想求解出问题的隐蔽集, 希望本文能为该领域的相关研究人员提供一定的参考.

关键词: QBF 问题; 隐蔽集; 重要结构; 求解过程

Solving Process of Backdoors Set in QBF

YANG Jun-Cheng, TAO Lin, LI Shu-Xia

(Dept. of Computer Engineering, Henan Polytechnic Institute, Nanyang 473000, China)

Abstract: The Backdoors as one of the important structures of problem QBF, it makes QBF problems easier in solving difficulty. In QBF problem, the solving of backdoors is quite complex and difficult to understand. In order to enable the reader to better understand the solving process, this paper researches the solving process of backdoors for QBF problems, calculates the depth of variable x and the triangle dependent set of variable $D_{\psi}^{\Delta}(x)$ that is meet the condition by combining the examples. This paper solves the backdoors of this problem according to the ideas of $B=B\cup\{x\}=\{x\}$ and $\psi'=\psi-D_{\psi}^{\Delta}(x)$. We are hoping that it can provide a reference for researchers in this field.

Key words: QBF problem; backdoors; important structure; solving process

1 引言

隐蔽集(backdoor set)作为量化布尔公式(Quantified Boolean Formulae,简称 QBF)问题的一个重要结构, 能有效地提高 QBF 问题的求解效率, 近年来受国内外研究专家的关注, 成为该领域的热点之一. 2007 年 Samer[1]等提出 QBF 问题的隐蔽集求解方法, 分别给出 Q2CNF-隐蔽集求解算法和 QHorn-隐蔽集求解算法. 2009 年 Samer 等[3]对 QBF 问题中隐蔽集的求解进一步探讨, 并对易处理类 Q2CNF 和 QHorn 的复杂性进行讨论. 2010 年文献[2]提出一种新的求解 QBF 问题的 Rhorn-隐蔽集求解算法. QBF 问题中隐蔽集求解是一个比较难解的问题, 其参数复杂性为 FPT (fixed-parameter tractable). QBF 问题中隐蔽集的求解过程比较复杂且难以理解. 本文针对 QBF 问题中隐蔽集求解过程进行分析. 本文结构如下: 第一部分的引言用来分析本文问题的重要性, 第二部分介绍实例算法中用到的基本概念; 第三部分结合实例对隐蔽集的求解过程进行分析; 最后总结和展望.

2 相关概念

QBF 问题中隐蔽集的求解比 SAT 问题中隐蔽集的求解更加复杂, 在 QBF 问题中, 各变量间存在依赖关系, 如果某一变量属于隐蔽集, 该变量的依赖变量也属于隐蔽集. 本部分就 QBF 问题中隐蔽集的求解过程

① 基金项目:河南省教育厅科学技术研究重点项目(12A520048)

收稿时间:2015-11-30;收到修改稿时间:2016-01-04 [doi:10.15888/j.cnki.csa.005252]

所涉及到的概念进行描述.

2.1 QBF 问题

QBF(Quantified Boolean Formulae)问题[4]是一个前束范式, 是一种带有存在量词和全称量词前缀的命题逻辑公式, 且所有的变量都被量化. 当 QBF 公式的量词中只出现存在量词时, QBF 问题就转化为 SAT (Propositional Satisfiability problem)问题. 一个 QBF 公式可以表示为 $\psi = Q_i X_i F$ 的形式(即 QCNF), 其中 $Q_i X_i$ 是前辍量词, $Q_i \in \{\forall, \exists\}$, X_i 是 QBF 公式中出现的变量集合; F 为 QCNF 子句集, 是一个命题逻辑公式, 由子句 $c_1, c_2, \cdots c_n \subseteq C \in F$ 组成, 每个子句 c_i 由文字(正或负命题变量)析取组成. 对每个子句 $C \in F$, $\mathrm{var}(C)$ 是子句 C 中的变量集, $\mathrm{var}(F) = \bigcup_{C \in F} \mathrm{var}(C)$ 是 F 的变量集. 对 QCNF 公式 ψ 来说, $\mathrm{var}(\psi) = \mathrm{var}(F) = \bigcup_{C \in F} \mathrm{var}(C)$ 为变量集, $|\mathrm{var}(\psi)|$ 为变量个数, 变量 x_i 的深度为 $\delta_\psi(x_i) = i$ (其中 $x_i \in \mathrm{var}(\psi)$), 即变量 x_i 在前辍量词中的次序. 对给定的命题公式 F 和变量子集 $Y \in \mathrm{var}(F)$, $F - Y = \{C \setminus (Y \cup \overline{Y})\}$ 表示公式 F 的简化公式, 其中 $\overline{Y} = \{\bar{l} : l \in Y\}$. 对给定的 QCNF 公式 $\psi = Q_i X_i F$ 和变量集 $V \in \mathrm{var}(\psi)$, $\psi - V$ 表示公式 ψ 的简化公式, 在简化公式中用 $F - V$ 取带 QCNF 中的 F, 并移去 QCNF 中多余的变量及前缀量词. 在 QCNF 公式中, 如果存在子句序列 $C_1, \cdots, C_n$, 且满足 $C = C_1$、$C' = C_n$、$\mathrm{var}(C_i) \cap \mathrm{var}(C_{i+1}) \cap X \neq \varphi$ (其中 $1 \le i \le n$), 则子句 C, C' 关于变量集 $X \subseteq \mathrm{var}(\psi)$ 是连接的; 如果存在子句 $C_1, C_2, C_3 \in F$ 和变量(x , y), 满足 $q_\psi(x) = \forall$ 且 $q_\psi(y) = \exists$、$x \in \mathrm{var}(C_1)$, $y \in C_2$, $\neg y \in C_3$、C_1和C_2、C_1和C_3 关于变量集 $X \cup \{x\}$ 是连接的, 则 C_1, C_2, C_3 形成一个关于变量集 $X \in \mathrm{var}(\psi)$ 的(x , y)-依赖三角.

2.2 依赖模型

依赖模型能进一步表明变量间的依赖关系, 三角依赖模型[1]是对标准依赖模型[5]的改进模型, 能进一步改善变量间的依赖关系. 具体定义如下:

定义(三角依赖模型). 给定一个 QCNF 公式 ψ, 变量 $x \in \psi$ 的三角依赖模型可以表示为 $D_\psi^\Delta(x) = D_\psi^{\delta_\psi(x)-1}(x)$, 其中 $D_\psi^{\delta_\psi(x)-1}(x)$ 的计算方法如公式(1)所示.

$$D_\psi^{\delta_\psi(x)-1}(x) = \begin{cases} D_\psi^0(x) = \{x\} & \text{当}\ \delta_\psi(x) - 1 = 0\ \text{时} \\ D_\psi^{i+1}(x) = D_\psi^i(x) \cup \{y\}, \delta_\psi(y) = \delta_\psi(x) - (i+1) & \text{条件①和②满足其一} \\ D_\psi^{i+1}(x) = D_\psi^i(x) & \text{条件①和②都不满足} \end{cases} \tag{1}$$

条件①和②具体描述如下:

①存在一个关于变量集合 $R_\psi(y) \setminus D_\psi^i(x) \cup \{y\}$ 的 (x, y) - 依赖三角(或 (y, x) - 依赖三角), 其中 $R_\psi(y) = \{x \mid \delta_\psi(y) \le \delta_\psi(x) \le |\mathrm{var}(\psi)|\}$, $x \in \mathrm{var}(\psi)$

②存在变量 $z \in D_F^i(x) \setminus \{x\}$, 且 $y \in D_F^\Delta(z)$

三角依赖模型可以求出较小的QCNF问题的隐蔽集, 从而有效的提高QCNF的求解效率.

2.3 隐蔽集

Willianms[6]等人提出隐蔽集[7-10]的概念并对其研究, 它是一个较小变量子集, 找到问题的隐蔽集, 能使复杂问题(其计算复杂性至少是 NP 的)变得容易求解. Samer 等[1]提出 QBF 问题的隐蔽集, 使隐蔽集的求解在 QBF 问题中得到了重大的突破. 目前存在 QBF 问题的隐蔽集有强隐蔽集、弱隐蔽集和删除隐蔽集, 具体描述如下: 给定一个 QCNF 公式 ψ, $B = D_\psi(X)$ (其中 $X \in \mathrm{var}(\psi)$)是一个非空变量子集, 如果B中变量的所有真值指派 τ 使得 $\psi[\tau]$ 在多项式时间内可解, 则 B 是强隐蔽集; 如果 B 中变量存在一个部分赋值树 Γ 使得 $\psi[\Gamma]$ 在多项式内可解且可满足, 则 B 是弱隐蔽集; 如果简化公式 $\psi - B$ 在多项式时间内可解, 则 B 是删除隐蔽集.

3 具体算法

为了进一步的理解 QCNF 问题中隐蔽集的求解过程, 该部分就隐蔽集的求解算法思想和具体实例进行描述分析.

3.1 算法描述

本算法将 QCNF 公式 ψ 和正整数参数 $k > 0$ 作为输入, 给定隐蔽集初值 $B = \phi$ 和变量 $x \in \mathrm{var}(\psi)$ 的依赖集 $D(X) \subseteq \mathrm{var}(\psi)$. 根据参数 k 和 ψ 的条件来选择子句及子句中的变量 $x_1 \in \mathrm{var}(\psi)$, 之后用 $\psi - D(x_1)$ 对公式 ψ 进行简化, 值 $B = B \cup D(x_1)$, 依次循环直到

简化的 QCNF 公式属于多项式时间可解的类. 具体流程图如图 1 所示:

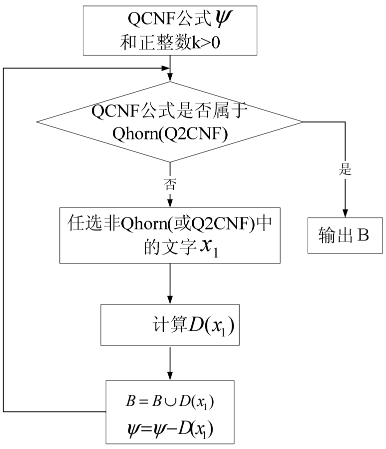

图 1　求解 QBF 问题的隐蔽集流程图

3.2 实例分析

给定一个 $QCNF$ 公式 $\psi=\forall u\exists v\exists w\forall x\exists y\forall z\left(u\vee y\right)\wedge\left(x\vee y\right)\wedge\left(\neg v\vee w\vee x\right)\wedge\left(v\vee w\vee\neg z\right)\wedge\left(v\vee\neg y\right)\wedge\left(\neg w\vee z\right)$，根据 QCNF 问题中隐蔽集的求解思路, 首先选择符合条件的变量 u，计算该变量深度和三角依赖变量集，置 $B=B\cup\{u\}=\{u\}$，并用 $\psi'=\psi-D_\psi^\Delta(u)$ 来简化公式, 重复执行以上工作直到简化公式 ψ' 属于多项式时间内可解类, 便求解出问题的隐蔽集. 该 QCNF 问题的隐蔽集求解的具体过程如下:

第一步: 计算 QCNF 公式中每个变量的深度.

$\delta_\psi(u)=1$，$\delta_\psi(v)=2$，$\delta_\psi(w)=3$，$\delta_\psi(x)=4$，$\delta_\psi(y)=5$，$\delta_\psi(z)=6$.

第二步: 计算 QCNF 问题的隐蔽集(以 QHorn-隐蔽集为例).

1) 在 QCNF 公式中任意选择非 QHorn 子句中的变量文字 u.

2) 计算 u 的三角依赖模型.

$D_\psi^\Delta(u)=D_\psi^{\delta_\psi(u)-1}(u)=D_\psi^{1-1}(u)=D_\psi^0(u)=\{u\}$

3) 值 $B=B\cup\{u\}=\{u\}$，并简化公式 $\psi'=\psi-D_\psi^\Delta(u)$
$=\exists v\exists w\forall x\exists y\forall z(y)\wedge(x\vee y)\wedge(\neg v\vee w\vee x)\wedge$
$(v\vee w\vee\neg z)\wedge(v\vee\neg y)\wedge(\neg w\vee z)$

4) 选择 ψ' 中非 QHorn 子句中的变量文字 x

5) 计算 ψ' 中 x 的三角依赖模型.

具体过程如下:

$D_\psi^\Delta(x)=D_\psi^{\delta_\psi(x)-1}(v)=D_\psi^{3-1}(v)=D_\psi^2(v)$

$\because D_\psi^0(x)=\{x\}$

由于 $R_\psi(w)\setminus\left(D_\psi^0(x)\cup\{w\}\right)=\{y,z\}$，不存在 (x,w)-依赖三角, 条件①不满足,

由于 $D_\psi^0(x)\setminus\{x\}=\varnothing$，条件②不满足

$\therefore\ D_\psi^1(x)=D_\psi^0(x)=\{x\}$

由于 $R_\psi(v)\setminus\left(D_\psi^1(x)\cup\{v\}\right)=\{w,y,z\}$

当 $c_1=c_3=(\neg v\vee w\vee x), c_2=(v\vee w\vee\neg z)$ 时

存在子句序列 $(\neg v\vee w\vee x),(v\vee w\vee\neg z)$ 使得 $c_1\ c_2$ 是链接的

存在子句序列 $(\neg v\vee w\vee x)$ 使得 $c_1\ c_3$ 是链接的

$\therefore\ c_1\ c_2\ c_3$ 形成一个关于变量集 $X\in\mathrm{var}(\psi)$ 的 (x,v)-依赖三角, 满足条件①.

$\therefore\ D_\psi^2(x)=D_\psi^1(x)\cup\{v\}=\{x,v\}$

6) 值 $B=B\cup\{x,v\}=\{u,x,v\}$，并简化公式 $\psi=\psi-D_\psi^\Delta(x)$
$=\exists w\exists y\forall z(y)\wedge(w)\wedge(w\vee\neg z)\wedge(v\vee\neg y)$
$\wedge(\neg w\vee z)\in QHorn$ 公式

所以求解出的 QHorn 隐蔽集为 $B=\{u,x,v\}$.

通过以上求解过程可以看出, 该 QCNF 问题的隐蔽集是 $B=\{u,x,v\}$，利用问题的隐蔽集可以简化 QCNF 问题的求解过程. 另外, 在 QBF 问题隐蔽集的求解过程中变量的选择占有非常重要的位置. 如果能在变量选择时加入启发式, 使得选择变量的依赖变量集比较小, 从而求解出较小的隐蔽集, 以提高 QBF 问题的求解效率. 或者找到一种更好的计算依赖模型的方法, 使变量的依赖变量集尽可能小, 也可以得到较小隐蔽集, 从而提高该问题的求解效率.

4　展望和结论

为了更好的理解 QBF 问题中隐蔽集的求解过程, 本文对 QBF 问题中隐蔽集的求解过程进行具体分析, 通过选择变量, 计算该变量的深度和该变量的三角依赖变量集, 同时用 $\psi'=\psi-D_\psi^\Delta(u)$ 简化公式直到其属于多项式时间内可解类, 并置 $B=B\cup\{u\}=\{u\}$ 来求解该问题的隐蔽集. 希望本文的研究能对该领域的相关研究者有一定的参考价值. 另外, QBF 问题中隐蔽集的求解比较难, 目前研究的比较少, 未来的工作可以做如下考虑:

1) 在本文求解 QBF 问题的隐蔽集过程中, 变量

选择不同求解过程不同, 可以在其加入一种变量选择的启发式, 从而简化求解 QBF 问题中隐蔽集的过程, 提高 QBF 问题的求解效率.

2) 为了进一步考虑变量间的关系, 可以将 SAT 问题的隐蔽集关键字(Backdoor key)、隐蔽集树(backdoor tree)应用到 QBF 问题中, 从而提高 QBF 问题的求解效率.

参考文献

1 Samer M, Szeider S. Backdoor sets of quantified Boolean formulas. SAT'07. LNCS 4501. 2007. 230–243.

2 Yang JC, Li SX, Wang JY. Computation of renameable horn backdoors for quantified boolean formulas. Future Computer and Communication (ICFCC), 2010 2nd International Conference on. IEEE. 2010. 841–844.

3 Samer M, Szeider S. Backdoor Sets Of Quantified Boolean Formulas. Journal of Automated Reasoning, 2009, 42(1): 77–97.

4 殷明浩,周俊萍,孙吉贵,谷文祥.求解 QBF 问题的启发式调查传播算法.软件学报,2011,22(7):1538–1550.

5 Egly U, Tompits H, Woltran S. On quantifier shifting for quantified Boolean formulas. Proc. SAT'02 Workshop on Theory and Applications of Quantified Boolean Formulas. Informal Proceedings. 2002. 48–61

6 Williams R, Gomes C, Selman B. Backdoors to typical case complexity. Proc. of the 18th International Joint Conference on Artificial Intelligence. IJCAI. 2003. 1173–1178.

7 Fox D. Backdoor. Datenschutz und Datensicherheit - DuD, 2014, 38(2): 119–119.

8 Szeider S. Backdoors to tractable answer-set programming . Artificial Intelligence, 2015: 64–103.

9 Gaspers S, Ordyniak S, Szeider S, et al. Backdoors into heterogeneous classes of SAT and CSP. AAAI Conference on Artificial Intelligence. AAAI Press, 2014: 2652–2658.

10 谷文祥,李淑霞,殷明浩.隐蔽集的研究及发展.计算机科学, 2010,3:11–16.