

图像修复的 CDD 模型新算法^①

王军锋, 裴艳侠, 王 涛

(西安理工大学 理学院, 西安 710054)

摘要: CDD 图像修复模型是在 TV 模型的基础上引入曲率项来满足视觉的“连接性”原则。考虑到该模型各参考点梯度模值大小的不同及扩散效率的不足, 本文结合退化扩散模型提出了一种新的 CDD 模型图像修复算法。该算法利用待修复区域像素点的梯度和等照度线的曲率信息来控制各参考点对破损区域的贡献值, 并进一步作加权处理。最后将该模型的偏微分方程离散化, 给出了模型的数值实现方法。实验结果表明该算法能保证图像边缘的视觉连通性, 并在相同迭代次数的情况下, 修复效果明显优于 CDD 算法, 是一种有效的新方法。

关键词: 图像修复; 退化扩散; CDD 算法; 梯度; 各向异性

New Algorithm of Image Inpainting Curvature-Driven Diffusion Model

WANG Jun-Feng, PEI Yan-Xia, WANG Tao

(School of Sciences, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: CDD inpainting model is based on TV model local spread and it introduces curvature term, then realizes the connectivity and holistic principle. For the different size of the gradient value of each reference point and diffusion efficiency defects, an improved CDD inpainting algorithm is proposed by degenerate diffusion model. Firstly, it calculates the gradient information of pixel and curvature of isolux line to control the contribution of the reference point on the repair area, and then they are weighted. Finally, the discrete model of partial differential equations is given. Experimental results show that this algorithm realizes the connectivity principle partially. In addition, it can repair the damaged image better than CDD algorithm with same iterative times.

Key words: image inpainting; degenerate diffusion; curvature-driven diffusion; gradient; anisotropic

2001年, Chan 和 Shen 提出了图像处理的全变分 (Total Variation, TV) 模型, 他们采用各向异性扩散的方式来修复图像中断裂的边缘^[1], 此后这种各向异性扩散偏微分方程的研究受到重视并被推广到高阶情形^[2]。由于该模型不能达到连接断裂边缘的要求, 他们又提出了一种基于曲率驱动扩散 (Curvature-Driven Diffusion, CDD) 的图像修复模型^[3]。CDD 模型是 TV 模型的扩展, 主要改进是在图像信息扩散的过程中同时考虑到等照度线方向的几何曲率信息, 克服了 TV 模型不能满足人类视觉的“连接性”原则的缺点, 所以该模型能够很好的处理较大的破损区域及细小边缘, 可以用于非纹理图像的修复或者结合其他算法用于纹理

图像的修复^[4,5]。本文在 CDD 模型的基础上, 结合退化扩散模型提出了一种新的 CDD 模型图像修复算法, 该模型通过计算待修复区域像素点的梯度和曲率信息, 进而进行加权处理, 实验表明该算法能够修复较大破损区域的同时更好地保持图像的边缘连通性。

1 退化扩散模型

P-M 扩散模型不仅在垂直于梯度的方向上有扩散, 而且在梯度的方向上也存在扩散过程。为了保持边缘的确切位置, Alvarez 等人提出了一种退化扩散模型^[6]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \frac{1}{|\nabla u|^2} D^2 u (Du, Du) \quad (1)$$

① 基金项目: 陕西省自然科学基金(2015JQ1022)

收稿时间: 2015-12-07; 收到修改稿时间: 2016-01-14 [doi:10.15888/j.cnki.csa.005284]

其中第一项是拉普拉斯算子的作用, 第二项禁止沿梯度方向扩散. 上式的等价形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \operatorname{div} \left[\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] \\ u(x,y,0) = u_0(x,y) \end{cases} \quad (2)$$

在几何上, 方程(2)解的水平集以与平均曲率成正比的速率沿着法方向运动, 因此在一定程度上能更好地保持图像的边缘.

2 基于CDD模型的图像修复算法

TV 修复模型可保持尖锐的修复边缘并且数值实现简单, 但是该模型不能满足人类视觉“连接性”原则^[7], 即当修复尺度大于待特征尺度时不能完成修复, 如图 1 所示.

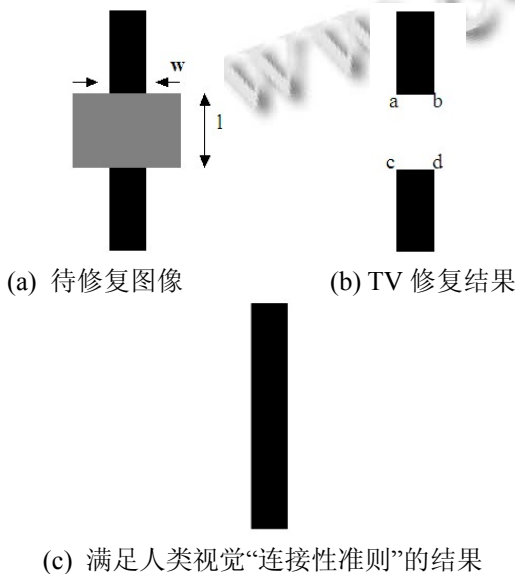


图 1 TV 模型的修复结果不满足人类视觉的“连接性”原则

记 D 是待修复区域, E 是待修复区域的外部, 在不考虑噪声的情况下 TV 修复模型为:

$$J_\lambda(u) = \int_{E \cup D} |\nabla u| dx dy \quad (3)$$

根据 Euler-Lagrange 方程可知, 使得 $J_\lambda(u)$ 最小的 u 应满足如下条件:

$$\operatorname{div} \left[\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] = 0 \quad (4)$$

用梯形下降法得:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left[\frac{1}{|\nabla u|} \nabla u \right] \quad (5)$$

对比热扩散方程, TV 修复模型在局部上相当于传导系数为 $\frac{1}{|\nabla u|}$ 的热扩散, 即其扩散强度仅依赖于梯度

值. 根据图 1 所示, TV 模型的修复结果如其中的(b)所示, 它不满足人类视觉的“连接性”原则. 此时可以发现在 TV 修复结果中 a, b, c, d 四个角点处的曲率 $k = \pm\infty$, 但是我们所希望的修复结果为如图(c)所示, 此时等照度线尽可能的拉伸, 反映在曲率上就是使得修复结果中等照度线的曲率尽量小. CDD 修复模型就是基于上述分析在 TV 修复模型的基础上加入了曲率, 具体模型如下:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left[\frac{g(|k|)}{|\nabla u|} \nabla u \right] \quad (6)$$

其中 $\frac{g(|k|)}{|\nabla u|}$ 为传导系数, k 为曲率, $g(s)$ 为 s 的增函数且满足:

$$g(s) = \begin{cases} 0, & s = 0 \\ \infty, & s = \infty \\ 0 \text{ 到 } \infty \text{ 的中间值}, & 0 < s < \infty \end{cases} \quad (7)$$

通常取 $g(s) = s^p, s > 0, p \geq 1$.

CDD 模型相当于传导系数为 $\frac{g(|k|)}{|\nabla u|}$ 的热扩散, 此

时其扩散强度不仅依赖于梯度值, 还依赖于等照度线的几何信息—曲率. 由于 g 为增函数, 其在修复过程中使得曲率大的地方有较大的扩散而在曲率较小的地方扩散较小, 这使得修复过程能够消除大曲率而稳定小曲率.

3 CDD 模型的改进与实现

3.1 一种新的 CDD 模型图像修复算法

CDD 模型是 TV 模型的扩展, 此方法对变化平滑的图像修复效果比较好, 但对有较大破损的图像会产生边缘模糊的现象. 另外, CDD 模型一般在破损区域的边缘处有较大的梯度, 在四个角点处有较大的曲率, 对于其传导系数 $\frac{g(|k|)}{|\nabla u|}$, 当曲率大时扩散越大, 梯度

大时扩散越小, 这样在角点处曲率与梯度对扩散的影响相互抵消, 而在边缘点处曲率为零, 扩散也基本为零, 影响了扩散效率及修复效果. 比较后可以发现, 通过对扩散方程式(5)引入权系数 $|\nabla u|$ 就得到退化模型式(2), 从而使扩散不能沿梯度方向进行, 可以较好的保护边缘. 借鉴这一思想, 本文对待修复区域也采用

不同的权值来进行扩散, 提出了一种新的 CDD 模型图像修复算法, 其修复方程为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \operatorname{div} [g(|k|) \nabla u] \quad (8)$$

通常 $g(s) = s^p, s > 0, p \geq 1$, 由于 p 选取对实验结果影响不大, 本文选取 $p=1$. 该模型继承了 CDD 模型的优点, 通过在扩散中引入等照度线的几何信息—曲率

可以满足人类视觉的“连接性”原则; 同时用不同的权值对不同破损区域修复时可以在图像平滑区域强平滑, 在图像边缘降低平滑, 在边缘两侧尽可能的平滑, 这样更好的保持了图像边缘的信息.

3.2 数值计算

我们首先人工确定待修复区域, 其次对待修复区域进行随机初始化, 最后利用修复方程(8)的离散化进行修复. 采用时间步进法求解^[8], 令

$$v = (v^1, v^2) = g(|k|) \nabla u \quad (9)$$

则迭代形式如下:

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \Delta t \nabla \cdot v^{(n)} \quad (10)$$

其中 Δt 为时间步长, $u^{(n)}$ 为待修复点在 $n\Delta t$ 时的值.

对式(8)的散度算子 $\operatorname{div} [g(|k|) \nabla u]$ 进行离散化, 利用半点格式^[9]进行数值求解, 如图 2 所示, 点 O 是待修复点, N, E, S, W 是四邻域的参考点, 记 $\Lambda = \{N, E, S, W\} \{n, e, s, w\}$ 为 O 的半像素邻域点, 引入中间像素点的目的是为了数值计算的稳定性和减少误差.

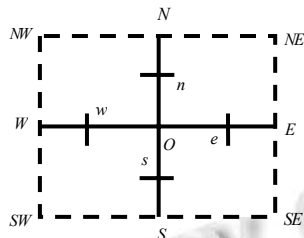


图 2 半点格式化

则散度通过中心差分可离散化为:

$$\operatorname{div}(v) = \frac{\partial v^1}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = \frac{v_e^1 - v_w^1}{h} + \frac{v_n^2 - v_s^2}{h} \quad (11)$$

其中 h 表示步长, 选取 $h=1$. 然后下面估算上式的半像素点 $\{n, e, s, w\}$ 的梯度和曲率值, 以 e 点为例说明. 令 $\nabla u_e = (\nabla u_e^1, \nabla u_e^2)$, 则

$$v_e^1 = g(|k_e|) \nabla u_e^1 \quad (12)$$

$$\nabla u_e = (\nabla u_e^1, \nabla u_e^2) = \left(\frac{u_E - u_O}{h}, \frac{u_{NE} + u_N - u_{SE} - u_S}{4h} \right) \quad (13)$$

$$k_e = \operatorname{div} \left[\frac{\nabla u_e}{|\nabla u_e|} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\nabla u_e^1}{|\nabla u_e|} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\nabla u_e^2}{|\nabla u_e|} \right] \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\nabla u_e^1}{|\nabla u_e|} \right] = \left(\frac{\nabla u_{Ee}^1}{|\nabla u_{Ee}|} - \frac{\nabla u_{Oe}^1}{|\nabla u_{Oe}|} \right) / h \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\nabla u_e^2}{|\nabla u_e|} \right] = \left(\frac{\nabla u_{NE}^2}{|\nabla u_{NE}|} + \frac{\nabla u_N^2}{|\nabla u_N|} - \frac{\nabla u_{SE}^2}{|\nabla u_{SE}|} - \frac{\nabla u_S^2}{|\nabla u_S|} \right) / 4h \quad (16)$$

式(16)中 $\nabla u_N, \nabla u_{NE}, \nabla u_S, \nabla u_{SE}$ 可用通常的中心差分法得到. 综上所述可求得 v_e^1 , 对于 v_w^1, v_n^2, v_s^2 可采用类似方法求得.

3.3 实验结果及分析

本算法是在实验环境 Inter(R) Core(TM)2, CPU 2.93GHz, 内存为 2GB 的硬件配置的条件下, 利用 MATLAB R2007a 编程进行仿真实验. 对有破损的两种不同类型图像分别按 CDD 算法和本文算法进行修复.

实验 1. 对破损较大的 lena 图像(512×512)进行修复. 取迭代次数 $n=500$, 梯度门限 $k=251$, 修复结果如图 3 所示.



图 3 实验 1 修复对比图

从实验 1 的结果我们可以看出, (c)中 lena 鼻梁的污损和右下方较粗划痕的地方有比较明显的修复缺陷, 而(d)中只有少许痕迹, 基本完成修复. (c)中破损较大的区域边缘断裂明显, 修复效果不佳, 而(d)中污损则变得较轻, 但能看到边缘稍微有些模糊. 总之当图像划痕较粗时, 从视觉上就可以明显看到 CDD 算法的不足, 而本文算法克服了不同程度的边缘断裂和修复不足的缺陷, 效果较优.

实验 2. 修复破损的纹理图像. 迭代次数和门限同实验 1, 修复结果如图 4 所示.

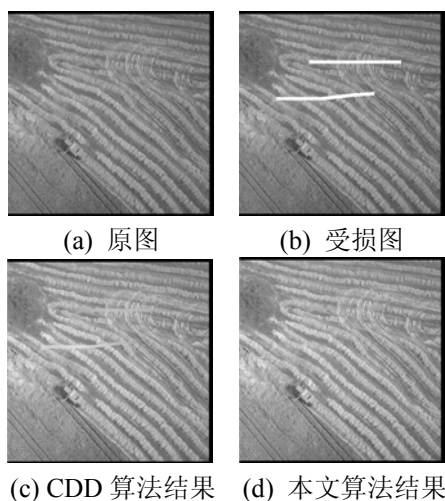


图 4 实验 2 修复对比图

从实验 2 的结果我们可以看出, 针对破损纹理的图像利用 CDD 模型在一定程度上虽然有修复, 但边缘基本没有得到保持; 而本文算法由于结合了退化扩散模型, 所以在图像修复时控制了扩散速度, 较好的保持了图像边缘, 修复效果良好. 由此看出, 本文算法也适用于某些纹理图像的修复.

当修复结果不能明显从视觉效果区分时, 则从图像质量的数据上分析修复效果. 一般地, 基于 PDE 的图像修复多数采用峰值信噪比(PSNR)来衡量^[9,10], 即 PSNR 的值越大说明修复效果越好. PSNR 定义如下^[10]:

$$PSNR=10\log_{10}\left[\frac{255\times 255}{\frac{1}{M\times N}\sum_{i=1}^M\sum_{j=1}^N[u(i,j)-u_0(i,j)]^2}\right] \quad (17)$$

其中, $M\times N$ 为图像的大小, $u(i,j)$ 和 $u_0(i,j)$ 分别代表原图像和修复后的图像在对应像素点的像素值. 同时我们对比了两种算法花费的时间, 表 1 列出了两组实验相应的统计结果.

表 1 两组实验统计结果

算法	实验 1		实验 2	
	PSNR/dB	时间/s	PSNR/dB	时间/s
CDD 算法	32.9676	5.8	37.3034	6.6
本文算法	41.8062	5.2	41.9855	5.3

从表中的数据进一步看出本文算法修复后的图像 PSNR 值比 CDD 算法有很大的提高, 而运行时间有所减少. 因此, 本算法从主客观两方面相比都优于

CDD 算法.

4 结语

本文介绍了 CDD 模型在图像修复的应用和特点, 在保持 CDD 模型“连接性”原则的基础上对其进行了改进. 实验结果表明, 新算法在修复过程中能保持图像边缘的连通性, 对较大破损的图像修复效果良好, 图像边缘更清晰自然. 在相同的迭代次数下, 能获得较高的 PSNR 值和令人满意的修复效果, 两组实验一定程度上也验证了本文算法的可行性和有效性.

参考文献

- Chan T, Shen J. Mathematical models for local non-texture inpainting. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2001, 62(3): 1019-1043.
- Li P, Li SJ, Yao ZA, Zhang ZJ. Two anisotropic fourth-order partial differential equations for image inpainting. *The Institution of Engineering and Technology Image Process*, 2013,7(3): 260-269.
- Chan T, Shen J. Non-texture inpainting by curvature driven diffusions. *J. Visual Comm. Image Rep.*, 2001, 12(4): 436-449.
- Jiang J, Wang ZX. The research of tibet mural digital images inpainting using CDD model. 2013 2nd International Symposium on Instrumentation and Measurement, Sensor Network and Automation. 2013. 805-807.
- 江平,张锦.一种结合 CDD 模型和 Criminisi 算法的图像修复算法. *图学学报*,2014,35(5):741-746.
- Alvarez L, Lions PL, Morel JM. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. *SIAM J. Numer. Anal.*, 1992, 29: 845-866.
- 印勇,李丁,胡琳昀.采用 CDD 模型的自适应图像修复算法. *重庆大学学报*,2013,36(4):81-86.
- 孙向荣,刘芳芳.图像修复 TV 模型的快速算法研究. *计算机技术与发展*,2014,24(11):144-147.
- 王涛,王军锋,白青,张伟.改进的 TV 模型图像修复算法. *计算机系统应用*,2013,22(3):121-124.
- Wen YW, Chan RH, Yip AM. A primal-dual method for total variation based wavelet domain inpainting. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2012, 21(1): 106-114.