

# 变时滞随机忆阻器神经网络的同步控制<sup>①</sup>

沈 君, 楼旭阳

(江南大学 物联网工程学院, 无锡 214000)

**摘 要:** 在实现实际的复杂人工神经网络模型以及大规模集成电路时, 随机噪声是不可避免的. 因此, 随机忆阻器神经网络具有重要的现实研究意义. 针对变时滞随机忆阻器神经网络的同步控制问题, 基于非光滑分析以及集值映射、随机微分包含的理论, 利用 Lyapunov 函数和基本不等式的方法, 设计了一个线性反馈控制器. 通过恰当选择控制器增益, 实现了随机忆阻器神经网络驱动系统与相应的响应系统之间的指数同步, 所得到的结果保守性更小. 最后, 给出数值例子验证了理论结果的有效性.

**关键词:** 随机忆阻器神经网络; 同步; 变时滞; Lyapunov 函数; 非光滑分析

## Synchronization Control of Stochastic Memristor-Based Neural Networks with Time-Varying Delays

SHEN Jun, LOU Xu-Yang

(School of IoT Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214000, China)

**Abstract:** Stochastic noise is unavoidable in the implementation of real complex artificial neural network model and large scale integrated circuit. Therefore, the practical research significance of stochastic memristor-based neural network is important. Aiming at the problem of synchronization control of stochastic memristor-based neural networks with time-varying delays, based on non-smooth analysis and the theory of set-valued maps and stochastic differential inclusions, a novel control method is given using the method of Lyapunov functional and the fundamental inequality. State feedback controller has been put forward to achieve synchronization index for the drive system and corresponding response system of the stochastic memristor-based neural network. Meanwhile, a numerical example is given to verify the theoretical analysis in this paper.

**Key words:** stochastic memristor-based neural networks; synchronization; time-varying delays; Lyapunov functional; non-smooth analysis

1971 年, 美国华裔科学家蔡少棠<sup>[1]</sup>教授根据电路中的对称性原理, 首次发现了忆阻器(记忆电阻器的缩写). 2008 年, 惠普<sup>[2,3]</sup>团队成功研制出了忆阻器这种器件. 忆阻器是一种具有记忆功能的非线性电阻. 它是继电阻、电容、电感之后的第四种无源基本电路元件. 近来, 忆阻器也被应用于人工神经网络.

众所周知, 由于忆阻器神经网络在很多领域都有广泛的应用, 比如保密通信<sup>[4,5]</sup>和信息科学<sup>[6]</sup>等, 因而忆阻器神经网络是非常重要的非线性电路网络. 近年来, 忆阻器神经网络的动态特性受到了很多学者的关

注, 尤其是同步性. 2014 年, Zhang 和 Shen<sup>[7]</sup>采用非光滑分析和控制理论, 研究了基于周期间歇控制忆阻器神经网络的指数同步; Chen 和 Zeng<sup>[8]</sup>利用 Lyapunov 函数的方法分析了忆阻器分数阶神经网络的稳定性和同步性; 2014 年, Wu 和 Li<sup>[9]</sup>采用了 Lyapunov 函数方法和不等式技术, 研究了基于采样数据控制的一类忆阻器神经网络同步; 最近, Shi 和 Zhu<sup>[10]</sup>研究了忆阻器竞争神经网络的同步, 通过构造 Lyapunov 函数及采用微分包含理论, 设计了一个线性反馈控制器. 以上所提出并研究的忆阻器神经网络模型都是确定性的. 但是,

<sup>①</sup> 收稿时间:2015-08-01;收到修改稿时间:2015-09-28

在实现实际的复杂人工神经网络模型时, 噪声是不可避免的. 因此将其考虑到模型中是必要的, 随机忆阻器神经网络具有重要的现实意义.

近年来, 对于随机忆阻器神经网络的研究并不多. 2013 年, Li<sup>[11]</sup>等探讨了随机忆阻器神经网络的稳定性, 采用 Lyapunov 函数和不等式的方法获得了指数稳定的三个充分条件. 2015 年, Song<sup>[12]</sup>等基于驱动-响应概念和随机微分包含理论, 研究了混合时滞随机忆阻器递归神经网络的同步性. 本文在前人研究随机忆阻器神经网络的动力学性能分析<sup>[11,12]</sup>的基础上, 基于非光滑分析和随机微分包含的理论, 对随机忆阻器神经网络的模型作了描述, 并研究了变时滞随机忆阻器神经网络的同步控制. 本文结果所需假设条件具有更少保守性.

### 1 模型描述与准备工作

考虑一个随机忆阻器神经网络模型<sup>[12]</sup>:

$$dx_i(t) = \left\{ -d_i(x_i)x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_i)f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(x_i)f_j(x_j(t-\tau_{ij}(t))) \right\} dt + \sigma_i(t, x_i(t), x_i(t-\tau_{ij}(t)))d\omega_i(t), \quad t \geq 0, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (1)$$

其中,  $n$  表示随机忆阻器神经网络中神经元的数量,  $x_i$  表示与神经元相关的变量(或者是电容  $c_i$  的电压).  $f(x(t))$  表示神经元的激活函数,  $\tau_{ij}(t)$  是变时滞.  $d_i(x_i)$ ,  $a_{ij}(x_i)$  和  $b_{ij}(x_i)$  是反馈连接权重. 作为一种特殊的情况, 令阈值电压为零. 根据忆阻器的特点, 权重系数可表示为:

$$d_i(x_i) = \begin{cases} d_i^*, & x_i(t) \leq 0, \\ d_i^{**}, & x_i(t) > 0, \end{cases} \quad a_{ij}(x_i) = \begin{cases} a_{ij}^*, & x_i(t) \leq 0, \\ a_{ij}^{**}, & x_i(t) > 0, \end{cases} \quad b_{ij}(x_i) = \begin{cases} b_{ij}^*, & x_i(t) \leq 0, \\ b_{ij}^{**}, & x_i(t) > 0, \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $i, j=1,2,\dots,n$ ,  $d_i^* > 0$ ,  $d_i^{**} > 0$ ,  $a_{ij}^*$ ,  $a_{ij}^{**}$ ,  $b_{ij}^*$ ,  $b_{ij}^{**}$  都是常数.

$\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \dots, \omega_n(t))$  表示一个  $n$  维的向量布朗运动.  $\omega(t)$  是定义在带有自然流  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  的一个完备概率空间  $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$  上的, 也是定义在独立的 Markovian 过程  $\{\gamma(t)\}_{t \geq 0}$  中.  $\sigma_i(\cdot)$  是非线性函数.

值得注意的是, 我们把模型(1)作为驱动系统,

相应的响应系统为:

$$dy_i(t) = \left\{ -d_i(y_i)y_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(y_i)f_j(y_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(y_i)f_j(y_j(t-\tau_{ij}(t))) + u_i(t) \right\} dt + \sigma_i(t, y_i(t), y_i(t-\tau_{ij}(t)))d\omega_i(t), \quad t \geq 0, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (3)$$

式中,  $y_i$  也是表示神经元相关的变量. 将  $d_i(y_i)$ ,  $a_{ij}(y_i)$  和  $b_{ij}(y_i)$  表示为:

$$d_i(y_i) = \begin{cases} d_i^*, & y_i(t) \leq 0, \\ d_i^{**}, & y_i(t) > 0, \end{cases} \quad a_{ij}(y_i) = \begin{cases} a_{ij}^*, & y_i(t) \leq 0, \\ a_{ij}^{**}, & y_i(t) > 0, \end{cases} \quad b_{ij}(y_i) = \begin{cases} b_{ij}^*, & y_i(t) \leq 0, \\ b_{ij}^{**}, & y_i(t) > 0, \end{cases} \quad (4)$$

本文的目的就是要设计一个合适的控制器. 在该控制器的作用下, 驱动系统与响应系统能够实现渐近同步. 考虑控制器  $u_i(t)$  为状态反馈控制器, 它的形式为:

$$u_i(t) = K_1 e_i(t) + K_2 e_i(t - \tau_{ij}(t)) \quad (5)$$

式中, 误差状态  $e_i(t) = y_i(t) - x_i(t)$ ,  $i, j=1,2,\dots,n$ ,  $K_1, K_2$  为控制器增益.

本文中所有系统的解都是在 Filippov 的意义下. 对于所有的连续函数  $C((-\tau, 0), R^n)$ , 在 Banach 空间中,  $\tau = \max_{1 \leq i, j \leq n} \{\tau_{ij}(t)\}$ . 在这里  $\bar{d}_i = \max\{d_i^*, d_i^{**}\}$ ,  $\underline{d}_i = \min\{d_i^*, d_i^{**}\}$ ,  $\bar{a}_i = \max\{a_i^*, a_i^{**}\}$ ,  $\underline{a}_i = \min\{a_i^*, a_i^{**}\}$ ,  $\bar{b}_i = \max\{b_i^*, b_i^{**}\}$ ,  $\underline{b}_i = \min\{b_i^*, b_i^{**}\}$ , 对于  $i=1,2,\dots,n$ .

本文将  $\omega = [\underline{\xi}, \bar{\xi}]$  表示成  $[\underline{\xi}, \bar{\xi}]$  的凸面. 还有  $\underline{D} = \text{diag}(\underline{d}_i)$ ,  $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})_{n \times n}$ ,  $\hat{B} = (\hat{b}_{ij})_{n \times n}$ . 系统(1)带有初值条件:  $x(s) = \phi(s) \in C([- \tau, 0], R^n)$ ,  $i=1,2,\dots,n$ .

通过应用微分包含和集值映射的理论, 系统(1)可以描述为:

$$dx_i(t) \in \left\{ -co[d_i(x_i(t))]x_i(t) + \sum_{j=1}^n co[a_{ij}(x_i(t))]f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n co[b_{ij}(x_i(t))]f_j(x_j(t-\tau_{ij}(t))) \right\} dt + \sigma_i(t, x_i(t), x_i(t-\tau_{ij}(t)))d\omega_i(t), \quad t \geq 0, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (6)$$

相应的响应系统(3)为:

$$dy_i(t) \in \left\{ d_i[y_i(t)]y_i(t) + \sum_{j=1}^n co[a_{ij}(y_i(t))]f_j(y_j(t)) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=1}^n co[b_{ij}(y_i(t))]f_j(y_j(t-\tau_{ij})) + u_i(t) \Big\} dt \\
 & + \sigma_i(t, y_i(t), y_i(t-\tau_{ij}))d\omega_i(t), \\
 & t \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{7}
 \end{aligned}$$

其中,

$$co[d_i(x_i(t))] = \begin{cases} d_i^*, & x_i(t) < 0, \\ co\{d_i^*, d_i^{**}\}, & x_i(t) = 0, \\ d_i^{**}, & x_i(t) > 0, \end{cases}$$

$$co[d_i(y_i(t))] = \begin{cases} d_i^*, & y_i(t) < 0, \\ co\{d_i^*, d_i^{**}\}, & y_i(t) = 0, \\ d_i^{**}, & y_i(t) > 0, \end{cases} \tag{8}$$

$$co[a_{ij}(x_i(t))] = \begin{cases} a_{ij}^*, & x_i(t) < 0, \\ co\{a_{ij}^*, a_{ij}^{**}\}, & x_i(t) = 0, \\ a_{ij}^{**}, & x_i(t) > 0, \end{cases}$$

$$co[a_{ij}(y_i(t))] = \begin{cases} a_{ij}^*, & y_i(t) < 0, \\ co\{a_{ij}^*, a_{ij}^{**}\}, & y_i(t) = 0, \\ a_{ij}^{**}, & y_i(t) > 0, \end{cases} \tag{9}$$

$$co[b_{ij}(x_i(t))] = \begin{cases} b_{ij}^*, & x_i(t) < 0, \\ co\{b_{ij}^*, b_{ij}^{**}\}, & x_i(t) = 0, \\ b_{ij}^{**}, & x_i(t) > 0, \end{cases}$$

$$co[b_{ij}(y_i(t))] = \begin{cases} b_{ij}^*, & y_i(t) < 0, \\ co\{b_{ij}^*, b_{ij}^{**}\}, & y_i(t) = 0, \\ b_{ij}^{**}, & y_i(t) > 0, \end{cases} \tag{10}$$

误差系统为:

$$\begin{aligned}
 de_i(t) & \in \left\{ -co[d_i(y_i(t))]y_i(t) + co[d_i(x_i(t))]x_i(t) \right. \\
 & + \sum_{j=1}^n co[a_{ij}(y_i(t))]f_j(y_j(t)) \\
 & - \sum_{j=1}^n co[a_{ij}(x_i(t))]f_j(x_j(t)) \\
 & + \sum_{j=1}^n co[b_{ij}(y_i(t))]f_j(y_j(t-\tau_{ij})) \\
 & - \sum_{j=1}^n co[b_{ij}(x_i(t))]f_j(x_j(t-\tau_{ij})) \\
 & + u_i(t) \Big\} + \sigma_i(t, y_i(t), y_i(t-\tau_{ij}))d\omega_i(t) \\
 & - \sigma_i(t, x_i(t), x_i(t-\tau_{ij}))d\omega_i(t), \\
 & = \left\{ -\hat{d}_i(y_i(t) - x_i(t)) + \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij}(f_j(y_j(t)) - f_j(x_j(t))) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{j=1}^n \hat{b}_{ij}(f_j(y_j(t-\tau_{ij})) - f_j(x_j(t-\tau_{ij}))) + u_i(t) \Big\} \\
 & + \sigma_i(t, e_i(t), e_i(t-\tau_{ij}))d\omega_i(t), \tag{11}
 \end{aligned}$$

式中,  $\sigma_i(t, e_i(t), e_i(t-\tau(t))) = \sigma_i(t, y_i(t), y_i(t-\tau(t))) - \sigma_i(t, x_i(t), x_i(t-\tau(t)))$ ,  $\hat{d}_i \in co[\underline{d}_{ij}, \bar{d}_{ij}]$ ,  $\hat{a}_{ij} \in co[\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$ ,  $\hat{b}_{ij} \in co[\underline{b}_{ij}, \bar{b}_{ij}]$ .

假设 1. 神经元激活函数  $f_i$  满足 Lipschitz 条件, 即  $\forall x, y \in R, |f_i(x) - f_i(y)| \leq \rho_i |x - y|$ . (12)

其中:  $x \neq y, \rho_i$  是非负常数,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

假设 2.  $\sigma_i: R_+ \times R \times R \rightarrow R$  是 Lipschitz 连续的.  $\sigma_i$  满足利普希茨连续的条件, 而且它的初值为  $\sigma_i(t, 0, 0) = 0$ , 因此得到:

$$\left| \sigma_i(t, e_i(t), e_i(t-\tau(t))) \right|^2 \leq \left( \alpha_i^2 |e_i(t)|^2 + \beta_i^2 |e_i(t-\tau(t))|^2 \right) \tag{13}$$

其中:  $\alpha_i$  和  $\beta_i$  是非负常数, 对于  $i = 1, 2, \dots, n$ .

定义 1<sup>[15]</sup>. 对于任何初始条件  $\phi \in L_{\mathcal{F}_0}^2([-\tau, 0]; R^n)$ , 如果存在常数  $\alpha > 0$  和  $\lambda > 0$ , 使得系统(11)每一个解  $e(t, \phi)$  都满足下面的条件, 则系统(11)的平凡解为均方全局渐近稳定. 那么, 所满足的条件为:

$$E \left\{ |e(t, \phi)|^2 \right\} \leq \alpha e^{-\lambda t} \sup_{-\tau \leq s \leq 0} E \left\{ |\phi(s)|^p \right\}, \quad t \geq 0.$$

引理 1. 如果假设 1 成立, 则下面的不等式也成立:

$$\begin{aligned}
 (i) \quad & \left| co[a_{ij}(y_i(t))]f_j(y_j(t)) - co[a_{ij}(x_i(t))]f_j(x_j(t)) \right| \\
 & \leq a_{ij}^+ \rho_j |e_j(t)| \\
 (ii) \quad & \left| co[b_{ij}(y_i(t))]f_j(y_j(t-\tau_{ij})) - co[b_{ij}(x_i(t))]f_j(x_j(t-\tau_{ij})) \right| \\
 & \leq b_{ij}^+ \rho_j |e_j(t-\tau_{ij})| \tag{14}
 \end{aligned}$$

上式中,  $a_{ij}^+ = \max\{|a_{ij}^*|, |a_{ij}^{**}|\}$ ,  $b_{ij}^+ = \max\{|b_{ij}^*|, |b_{ij}^{**}|\}$ .

证明: 首先证明(i)不等式, 当  $y_j(t)=0$  和  $x_j(t)=0$  时, 显然 (i) 成立; 当  $y_j(t) < 0$  且  $x_j(t) < 0$  时,  $|co[a_{ij}(y_i(t))]f_j(y_j(t)) - co[a_{ij}(x_i(t))]f_j(x_j(t))| = a_{ij}^{**} |f_j(y_j(t)) - f_j(x_j(t))| \leq a_{ij}^+ \rho_j |y_j(t) - x_j(t)| \leq a_{ij}^+ \rho_j |e_j(t)|$ ; 当  $y_j(t) > 0$  且  $x_j(t) > 0$  时,  $|co[a_{ij}(y_i(t))]f_j(y_j(t)) - co[a_{ij}(x_i(t))]f_j(x_j(t))| \leq a_{ij}^* |f_j(y_j(t)) - f_j(x_j(t))| \leq a_{ij}^+ \rho_j |e_j(t)|$ ; 当  $x_i(t) < 0 < y_i(t)$  或  $y_i(t) < 0 < x_i(t)$  时,  $|co[a_{ij}(y_i(t))]f_j(y_j(t)) - co[a_{ij}(x_i(t))]f_j(x_j(t))| \leq |co[\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]| |f_j(y_j(t)) - f_j(x_j(t))| \leq a_{ij}^+ \rho_j |e_j(t)|$ . 同理, 采用类似分析, 不等式(ii)也成立.

## 2 主要结果

定理 1. 若假设 1 和假设 2 都成立, 在状态反馈控制(5)的作用下, 且控制器增益  $K_1, K_2$  满足下面的不等式:

$$(2K_1 + K_2) \leq \min \left\{ 2d_i - \alpha_i^2 - \frac{1 + \beta_i^2}{1 - \mu} - \sum_{j=1}^n \left[ (a_{ij}^+)^2 \rho_j^2 + (b_{ij}^+)^2 \rho_j^2 + 1 + \frac{1}{1 - \mu} \right] \right\} \quad (15)$$

那么驱动系统(1)和响应系统(3)能够实现渐近同步, 其中:  $\mu$  是非负常数.

证明: 选取 Lyapunov 函数为:

$$V(e, t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} e_i^2(t) + \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2(1-\mu)} \int_{t-\tau_{ij}(t)}^t e_j^2(s) ds + \sum_{i,j=1}^n \frac{1 + \beta_i^2}{2(1-\mu)} \int_{t-\tau_{ij}(t)}^t e_j^2(s) ds \quad (16)$$

无穷小算子  $\mathcal{L}$  的定义如下<sup>[16]</sup>:

$$\mathcal{L}V(e(t)) = \lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta} [E\{V(e(t+\Delta), t+\Delta) | e(t)\} - V(e(t), t)] \quad (17)$$

根据它的微分形式<sup>[15]</sup>,  $V(e(t), t)$  的微分形式为:

$$dV(e, t) = \mathcal{L}V(e, t)dt + V_e(e(t), t)\sigma d\omega(t) \quad (18)$$

也可以进一步改写为:

$$dV(e, t) = \mathcal{L}V(e, t)dt + \sum_{i=1}^n e_i(t) \sigma_i(t, e_i(t), e_i(t - \tau_{ij}(t))) d\omega_i(t) \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(e, t) = & \sum_{i=1}^n e_i(t) \left\{ -\hat{d}_i (y_i(t) - x_i(t)) \right. \\ & + \sum_{j=1}^n \hat{a}_{ij} (f_j(y_j(t)) - f_j(x_j(t))) \\ & \left. + \sum_{j=1}^n \hat{b}_{ij} (f_j(y_j(t - \tau_{ij})) - f_j(x_j(t - \tau_{ij}))) + u_i(t) \right\} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2(t, e_i(t), e_i(t - \tau_{ij}(t))) \\ & + \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{1}{2(1-\mu)} e_j^2(t) - \frac{1}{2} e_j^2(t - \tau(t)) \right) \\ & + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1 + \beta_i^2}{2(1-\mu)} e_i^2(t) - \frac{1 + \beta_i^2}{2} e_i^2(t - \tau(t)) \right) \\ \in & \sum_{i=1}^n e_i(t) \left\{ -co[\underline{d}_i, \bar{d}_i] (y_i(t) - x_i(t)) \right. \\ & + co[\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}] (f_j(y_j(t)) - f_j(x_j(t))) \\ & \left. + co[\underline{b}_{ij}, \bar{b}_{ij}] (f_j(y_j(t - \tau_{ij})) - f_j(x_j(t - \tau_{ij}))) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + u_i(t) \left\} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2(t, e_i(t), e_i(t - \tau_{ij}(t))) \\ & + \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{1}{2(1-\mu)} e_j^2(t) - \frac{1}{2} e_j^2(t - \tau(t)) \right) \\ & + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1 + \beta_i^2}{2(1-\mu)} e_i^2(t) - \frac{1 + \beta_i^2}{2} e_i^2(t - \tau(t)) \right) \quad (20) \end{aligned}$$

进一步地, 由引理 1 得到:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V(e, t) \leq & \left\{ -\underline{d}_i e_i^2(t) + |e_i(t)| \sum_{j=1}^n |a_{ij}^+| \rho_j (e_j(t)) \right. \\ & + |e_i(t)| \sum_{j=1}^n |b_{ij}^+| \rho_j (e_j(t - \tau_{ij}(t))) \\ & + K_1 e_i^2(t) + K_2 |e_i(t)| |e_i(t - \tau_{ij}(t))| \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2(t, e_i(t), e_i(t - \tau_{ij}(t))) \\ & + \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{1}{2(1-\mu)} e_j^2(t) - \frac{1}{2} e_j^2(t - \tau(t)) \right) \\ & + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1 + \beta_i^2}{2(1-\mu)} e_i^2(t) - \frac{1 + \beta_i^2}{2} e_i^2(t - \tau(t)) \right) \\ \leq & \sum_{i=1}^n \left\{ -\underline{d}_i e_i^2(t) + \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{2} e_i^2(t) (a_{ij}^+)^2 \rho_j^2 + \frac{1}{2} e_j^2(t) \right) \right. \\ & + \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{2} e_i^2(t) (b_{ij}^+)^2 \rho_j^2 + \frac{1}{2} e_j^2(t - \tau_{ij}(t)) \right) \\ & + K_1 e_i^2(t) + \frac{1}{2} K_2^2 e_i^2(t) + \frac{1}{2} e_i^2(t - \tau_{ij}(t)) \left. \right\} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 e_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \beta_i^2 e_i^2(t - \tau_{ij}(t)) \\ & + \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{1}{2(1-\mu)} e_j^2(t) - \frac{1}{2} e_j^2(t - \tau(t)) \right) \\ & + \sum_{i=1}^n \left( \frac{1 + \beta_i^2}{2(1-\mu)} e_i^2(t) - \frac{1 + \beta_i^2}{2} e_i^2(t - \tau(t)) \right) \\ \leq & \sum_{i=1}^n \left\{ -\underline{d}_i + K_1 + \frac{1}{2} K_2^2 + \frac{1}{2} \alpha_i^2 + \frac{1 + \beta_i^2}{2(1-\mu)} \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{2} (a_{ij}^+)^2 \rho_j^2 + \frac{1}{2} (b_{ij}^+)^2 \rho_j^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1-\mu)} \right) \right\} \\ & e_i^2(t) \quad (21) \end{aligned}$$

由(15)可以得出  $\mathcal{L}V(e, t) \leq 0$ . 则

$$E(V(e(t), t)) - E(V(0, 0)) \leq E \int_0^t \mathcal{L}V(t) dt \leq 0 \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } EV(e(0), 0) \leq & \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \frac{\tau_{ij}}{2(1-\mu)} + \sum_{j=1}^n \frac{(1 + \beta_i^2) \tau_{ij}}{2(1-\mu)} \right\} \\ & \sup_{-\tau < s < 0} \sum_{i=1}^n E |e_i(s)|^p \\ = & H_0 \sup_{-\tau < s < 0} \sum_{i=1}^n E |e_i(t)|^p \end{aligned}$$

进一步地, 由(22)得到:

$$EV(e(0), 0) \geq EV(e(t), t) \geq \frac{1}{2} e^{-\lambda t} \sum_{i=1}^n E|e_i(t)|^p$$

$$\begin{aligned} \text{因此, } E|e(t)|^p &= \sum_{i=1}^n E|e_i(t)|^p \\ &\leq 2H_0 \sup_{-\tau < s < 0} \sum_{i=1}^n E|e_i(s)|^p e^{-\lambda t} \\ &= H_1 e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

$$\text{其中, } H_0 = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \frac{\tau_{ij}}{2(1-\mu)} + \sum_{j=1}^n \frac{(1+\beta_i^2)\tau_{ij}}{2(1-\mu)} \right\},$$

$$H_1 = 2H_0 \sup_{-\tau < s < 0} \sum_{i=1}^n E|e_i(s)|^p.$$

因此, 由定义 1 得出, 系统(7)与系统(9)能够实现渐近同步. 证毕.

推论 1. 若假设 1 和假设 2 都满足, 在状态反馈控制(5)的作用下, 且控制器增益  $K_1, K_2$  满足下面的

$$\text{不等式: } (2K_1 + K_2^2) \leq \min(2d_i - 2 - \sum_{j=1}^n ((a_{ij}^+)^2 \rho_j^2 + (b_{ij}^+)^2 \rho_j^2$$

+2)), 那么系统(1)和(3)能够实现渐近同步.

证明: 通过选取  $\alpha_i = 1, \beta_i = 0, \mu = 0$ , 可以直接由定理 1 得到推论 1.

注 1. 由于在实际的复杂网络实现的过程中往往会出现随机扰动, 因此系统难以维持同步现象. 然而对于随机忆阻器神经网络的研究并不多, 本文在文献[11-12]的基础上, 研究了变时滞随机忆阻器神经网络的同步性.

注 2. 文献[11]主要采用随机微分包含和 Lyapunov 函数方法来研究随机忆阻器神经网络的稳定性; 文献[12]则是基于驱动-响应概念、随机微分包含理论和 Lyapunov 函数方法研究了混合时滞随机忆阻器神经网络的同步性. 本文在研究方法上不同之处在于基于非光滑分析结合微分包含理论来研究一类变时滞随机忆阻器神经网络的同步性, 从而可以将忆阻器神经网络权值简单化处理, 为非线性的神经网络系统和线性系统之间搭建起桥梁作用, 有利于研究忆阻器神经网络的动态特性.

此外, 本文引理 1 中的下述结论:

$$(i) \quad |co[a_{ij}(y_i(t))]f_j(y_j(t)) - co[a_{ij}(x_i(t))]f_j(x_j(t))| \leq a_{ij}^+ \rho_j |e_j(t)|$$

$$(ii) \quad |co[b_{ij}(y_i(t))]f_j(y_j(t-\tau_{ij})) - co[b_{ij}(x_i(t))]f_j(x_j(t-\tau_{ij}))|$$

$$\leq b_{ij}^+ \rho_j |e_j(t-\tau_{ij})|$$

与文献[12]中的下述假设条件:

$$(i) \quad [a_{ij}, \bar{a}_{ij}]f_j(y_j(t)) - [a_{ij}, \bar{a}_{ij}]f_j(x_j(t)) \subseteq [a_{ij}, \bar{a}_{ij}] (f_j(y_j(t)) - f_j(x_j(t)))$$

$$(ii) \quad [b_{ij}, \bar{b}_{ij}]f_j(y_j(t)) - [b_{ij}, \bar{b}_{ij}]f_j(x_j(t)) \subseteq [b_{ij}, \bar{b}_{ij}] (f_j(y_j(t)) - f_j(x_j(t)))$$

相比, 本文引理 1 是证明所得结论, 更容易满足且容易验证, 而文献[12]的条件是人为假设的, 具有主观性, 只能在特定情况下满足, 因此本文引理 1 数学上更严格, 具有更少保守性.

注 3. 本文中假设条件 1 满足 Lipschitz 条件, 与文献[11]中的假设条件 1 相比, 减小了保守性.

### 3 仿真结果

考虑下面的二维随机忆阻器神经网络:

$$\begin{aligned} dx_i(t) &= \{-d_i(x_i)x_i(t) + \sum_{j=1}^2 a_{ij}(x_i)f_j(x_j(t)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^2 b_{ij}(x_i)f_j(x_j(t-\tau_{ij}(t)))\} dt \\ &\quad + \sigma_i(t, x_i(t), x_i(t-\tau_{ij}(t)))d\omega_i(t), \\ &\quad t \geq 0, \quad i=1, 2, \end{aligned} \quad (23)$$

其中:

$$\begin{aligned} d_1(x_1) &= \begin{cases} 1.2, & x_1(t) \leq 0, \\ 1, & x_1(t) > 0, \end{cases} & d_2(x_2) &= \begin{cases} 1, & x_2(t) \leq 0, \\ 1.2, & x_2(t) > 0, \end{cases} \\ a_{21}(x_2) &= \begin{cases} 5, & x_2(t) \leq 0, \\ -4.5, & x_2(t) > 0, \end{cases} & a_{22}(x_2) &= \begin{cases} 2.8, & x_2(t) \leq 0, \\ -2.8, & x_2(t) > 0, \end{cases} \\ b_{11}(x_1) &= \begin{cases} 1.6, & x_1(t) \leq 0, \\ -1.2, & x_1(t) > 0, \end{cases} & b_{12}(x_1) &= \begin{cases} 0.1, & x_1(t) \leq 0, \\ -0.1, & x_1(t) > 0, \end{cases} \\ b_{21}(x_2) &= \begin{cases} 0.3, & x_2(t) \leq 0, \\ -0.1, & x_2(t) > 0, \end{cases} & b_{22}(x_2) &= \begin{cases} 2.5, & x_2(t) \leq 0, \\ -2, & x_2(t) > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{选取 } \alpha_1 = \beta_1 = 0.8, \quad \alpha_2 = \beta_2 = 0.7,$$

$$\tau_1(t) = \exp(t)/(1+\exp(t)), \quad \tau_2(t) = 0.2 - 0.02 * \cos(t),$$

$$\rho_1 = \rho_2 = 1, \quad \mu = 1.08, \text{ 选取神经元的激活函数为:}$$

$$f_1(x) = f_2(x) = \tanh(x).$$

由(14)得到,  $a_{11}^+ = 2, a_{12}^+ = 0.1, a_{21}^+ = 5, a_{22}^+ = 2.8, b_{11}^+ = 1.6, b_{12}^+ = 0.1, b_{21}^+ = 0.3, b_{22}^+ = 2.5$ . 进而得到  $d_1 = 1, d_2 = 1$ .

在没有引入控制器的前提下, 图 1 给出了  $e_1(t)$  与  $e_2(t)$  分别随时间变化的曲线. 图 1 中显示同步误差没有趋于零, 表明驱动系统(23)与响应系统(3)没有实现渐近同步.

将控制器增益设计为  $K_1 = -1$ ,  $K_2 = 0.5$ . 根据定理 1, 不等式(15)成立. 在引入了状态反馈控制器的前提下, 图 2 给出了  $e_1(t)$  与  $e_2(t)$  分别随时间变化的曲线. 从图 2 中可以看出同步误差趋于零, 表明驱动系统(23)与响应系统(3)实现渐近同步.

值得注意的是, 在不等式(15)成立的前提下, 当  $|K_1|$  增大时, 误差  $e_1 \rightarrow 0$  与  $e_2 \rightarrow 0$  的速度变快, 误差更快地趋向于稳定, 驱动系统(23)与响应系统(3)更快地实现同步; 当  $|K_2|$  减小时, 误差  $e_1$  与  $e_2$  的波动会减小.

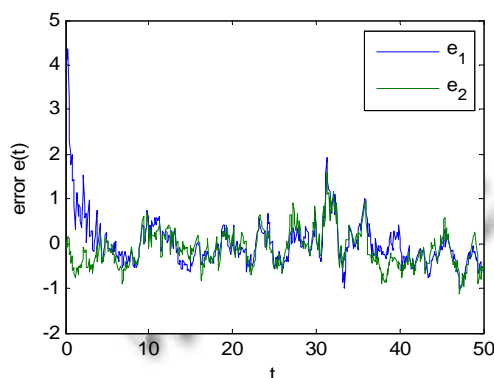


图 1 系统(11)在无控制器作用下的误差  $e_1(t)$  与  $e_2(t)$

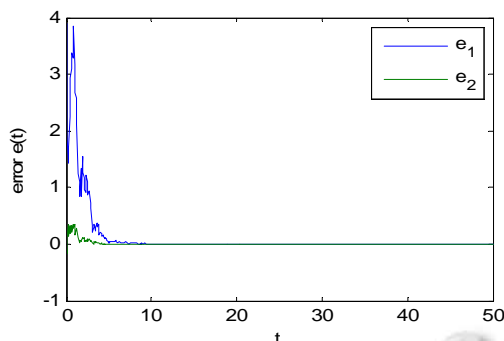


图 2 系统(11)在状态反馈控制下的误差  $e_1(t)$  与  $e_2(t)$

#### 4 结语

本文研究了基于变时滞随机忆阻器神经网络的同步控制问题, 在文献[7-12]的基础上, 首先基于非平滑分析和随机微分包含的理论, 采用了 Lyapunov 函数以及一些重要不等式的方法, 得到的充分性判据使随机忆阻器神经网络驱动系统与响应系统实现渐近同步. 本文减少了假设条件的限制, 并且减小了假设条件的保守性. 最后, 仿真结果验证了定理的有效性. 今后, 在此基础上, 可以继续深入研究随机忆阻器神经网络

在保密通信以及图像处理领域的应用.

#### 参考文献

- 1 Chua LO. Memristor-the missing circuit element. IEEE Trans. on Circuit Theory, 1971, 18(5): 507-519.
- 2 Strukov DB, Snider GS, Stewart DR, et al. The missing memristor found. Nature, 2008, 453(5): 80-83.
- 3 Tour J, Mtao H. Electronics: The fourth element. Nature, 2008, 453(5): 42-43.
- 4 刘洋, 彭良玉, 董胡. 统一混沌系统同步及其保密通信. 计算机工程与应用, 2008, 44(3): 133-135.
- 5 许碧荣. 蔡氏混沌系统网络的混沌同步及其保密通信. 信息与控制, 2010, 39(1): 54-58.
- 6 Hu J, Wang J. Global uniform asymptotic stability of memristor-based recurrent neural networks with time delays. The 2010 International Joint Conference on Neural Networks. Barcelona. 2010. 1-8.
- 7 Zhang GD, Shen Y. Exponential synchronization of delayed memristor-based chaotic neural networks via periodically intermittent control. Neural Networks, 2014, 55(7): 1-10.
- 8 Chen JJ, Zeng ZG, Jiang P. Global mittag-leffler stability and synchronization of memristor-based fractional-order neural networks. Neural Networks, 2014, 51(3): 1-8.
- 9 Wu HQ, Li RX, Wei HZ. Synchronization of a class of memristive neural networks with time delays via sampled-data control. Int. J. of Machine Learning and Cybernetics, 2014.
- 10 Shi YC, Zhu PY. Synchronization of memristive competitive neural networks with different time scales. Neural Computing and Applications, 2014, 25(5): 1163-1168.
- 11 Li J, Hu MF, Guo LX. Exponential stability of stochastic memristor-based recurrent neural networks with time-varying delays. Neurocomputing, 2014, 138(8): 92-98.
- 12 Song YF, Wen SP. Synchronization control of stochastic memristor-based neural networks with mixed delays. Neurocomputing, 2015, 156(5): 121-128.
- 13 Filippov AF. Differential equations with discontinuous right-hand sides. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic, 1988.
- 14 Aubin JP, Cellina A. Differential inclusions: Set-valued maps and viability theory. Springer-Verlag, 1984.
- 15 Wang ZD, Lauria S, Fang JA, et al. Exponential stability of uncertain stochastic neural networks with mixed time-delays. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 32(1): 62-72.
- 16 Mao XR. Exponential stability of stochastic delay interval systems with Markovian switching. IEEE Trans. Automat. Control, 2002, 47(10): 1604-1612.