

# 一种改进的 Landweber 迭代图像复原算法<sup>①</sup>

蒋欣兰

(中国青年政治学院 计算机教学与应用中心, 北京 100089)

**摘要:** 为解决传统的 Landweber 迭代法收敛速度慢, 且对噪声敏感的问题, 本文针对几种常见的模糊, 即大气湍流模糊以及运动模糊, 分别研究讨论了图像模糊的产生机理, 并提出了一种改进的 Landweber 迭代图像复原方法. 通过将图像的信号域与噪声域分离, 改进的方法只在信号域上进行迭代加速, 抑制了噪声的扩大. 实验对比结果表明本文提出的方法在加速收敛的同时仍可以提高图像复原的精度, 并以遥感图像和高速铁路图像为例, 进一步验证了该方法的实际应用效果.

**关键词:** 大气湍流模糊; 运动模糊; landweber 迭代法; 图像复原

## Improved Landweber Algorithm for Image Restoration

JIANG Xin-Lan

(Computer Science & Application Center, China Youth University of Political Studies, Beijing 100089, China)

**Abstract:** The existing Landweber iterative algorithms suffer from slow rate of convergence and sensitiveness to noise. In this paper, two common imaging blurs, named motion blur and atmospheric turbulence blur, are discussed about the mechanism of the image blurred, and we propose an improved Landweber iterative algorithm for image restoration. The improved method only expedites the convergence in the signal domain, and inhibits the expansion of noise. The experimental results demonstrate that the proposed method can still improve the restoration accuracy of results at the same time of speeding up convergences, and further show the application effect by applying the method to the remote sensing image and high-speed railway image.

**Key words:** atmospheric turbulence blur; motion blur; landweber iterative method; image restoration

图像复原旨在将一幅模糊或受噪声污染的图像重新清晰化的过程, 图像复原的过程在数学模型上往往抽象为一个去卷积的过程. 图像去卷积常常涉及到求解大规模线性系统

$$g = a * f \quad (1)$$

即根据给出的离散噪声图像  $g$ , 去估算实际物体的离散图像  $f$ , 其中矩阵  $A$  与点扩散函数  $K(x)$  相关, 定义为

$$(Af)_{m,n} = \sum_{k,l=0}^{N-1} K_{m-k,n-l} f_{k,l} \quad (2)$$

即  $A$  矩阵可以看做是点扩散函数  $K(x)$  的离散形式<sup>[1,2]</sup>.

图像去卷积常常伴随着不适定性, 即式(1)的求解是一个不适定问题, 各种正则化方法(例如 Tikhonov

正则化; 截断 SVD 正则化; Landweber 迭代正则化等)被引入来解决这一问题. 由于迭代法在求解大规模线性系统时在时间和空间花费上都具有显著优势, 所以大规模问题中主要选择迭代正则化方法<sup>[3-6]</sup>.

Landweber 迭代法是一种最简单的迭代正则化方法, 因其实现简单以及具有很好的正则化效果, 在许多领域有着广泛的应用. 但这种方法的缺点在于收敛速度较慢, 往往需要很多次迭代才能收敛到合适的解.

本文主要从提高 Landweber 迭代法收敛速度的角度出发, 分析了影响图像复原精度的因素, 通过控制调节这些因素, 从而达到了在加速收敛的同时仍可以提高图像复原质量的效果.

① 基金项目: 中国青年政治学院项目(189070649)

收稿时间: 2015-09-04; 收到修改稿时间: 2015-10-19

本文以遥感图像中存在的大气湍流模糊以及高速铁路图像中存在的运动模糊为应用研究对象, 将提出的复原算法应用于这两种实际的场景中, 进一步验证了算法的有效性.

### 1 图像模糊退化原理

成像系统受各种因素的影响, 导致了图像质量的降低, 这一过程称作图像退化<sup>[7]</sup>. 图像模糊是一种最常见的图像退化效果, 模糊退化过程如图 1 所示.

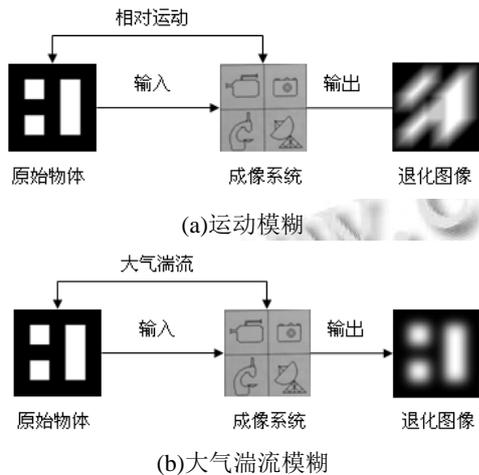


图 1 图像模糊退化过程

如图 1, 在高速摄像的环境下, 如高速铁路车载成像系统与目标在曝光时间内的快速相对运动将导致成像的运动模糊. 而对于遥感成像而言, 由于存在大气层, 在光线进入成像系统传感器之前, 大气湍流随机地干扰光线的传播将导致大气湍流模糊.

图像模糊可以看做是点扩散函数(PSF)<sup>[8]</sup>作用在原始物体上的结果, 图 2 为图像模糊退化模型.

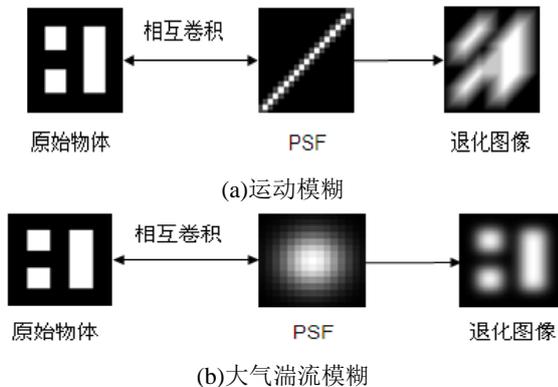


图 2 图像模糊退化模型

如图 2 为图像模糊退化的模拟过程, 原始物体(用清晰图像表示)与点扩散函数相互卷积就使原清晰图像退化为模糊图像.

图像模糊退化模型的空间域表示为退化为模糊图像.

图像模糊退化模型的空间域表示为

$$g = H * f \tag{3}$$

其中,  $f$  表示原始物体;  $H$  表示点扩散函数;  $H$  与  $f$  相互作用表示图像模糊的过程;  $g$  表示退化图像.

根据卷积定理, 式(3)做傅里叶变换, 可得频域表示

$$\hat{g} = \hat{H} \cdot \hat{f} \tag{4}$$

其中,  $\hat{g}, \hat{H}, \hat{f}$  分别为  $g, H, f$  的傅里叶变换形式,  $\hat{H}$  称作频域上的传递函数.

图像复原的目的就是根据退化图像的一些先验知识, 从退化图像出发去寻找一幅与原始物体最近似的复原图像.

### 2 改进的Landweber迭代法

Landweber 迭代法用来求解最小二乘方程

$$A^* A f = A^* g \tag{5}$$

其中,  $A$  是一个平方可积的线性算子,  $A^*$  是  $A$  的共轭算子,  $g$  为已知数据,  $f$  为未知求解对象.

其迭代策略为:

$$f_{k+1} = f_k + \tau(A^* g - A^* A f_k) \tag{6}$$

其中,  $f_k$  代表第  $k$  次迭代得到的结果,  $\tau$  为松弛参数.

式(6)做傅里叶变换, 整理得

$$\hat{f}_k(\omega) = (1 - \tau |\hat{K}(\omega)|^2)^k \hat{f}_0(\omega) + \left\{ 1 - [1 - \tau |\hat{K}(\omega)|^2]^k \right\} \frac{\hat{g}(\omega)}{\hat{K}(\omega)} \tag{7}$$

在保证式(7)收敛的情况下, 则经过有限次迭代, 式(5)取得最优解.

其中,  $\hat{g}(\omega)$  表示退化图像,  $\hat{K}(\omega)$  为传递函数,  $\hat{f}_0(\omega)$  为任取的初始迭代值,  $\hat{f}_k(\omega)$  表示第  $k$  次迭代得到的复原图像. 因此, 利用这一迭代模型, 在进行  $k_{opt}$  次迭代后, 可以得到与原始物体最为近似的复原图像.

#### 2.1 Landweber 方法的收敛条件

设  $B$  为一频率区间, 且有  $\omega \in B$  时,  $\hat{K}(\omega) \neq 0$ ;  $\omega \in \bar{B}$  时,  $\hat{K}(\omega) = 0$  (在图像系统中,  $B$  可作为成像系统的频带).

则式(7)的收敛条件为<sup>[9]</sup>:

(1) 当  $\omega \in \bar{B}$  时, 由  $\hat{K}(\omega) = 0, \hat{g}(\omega) = 0$  得, 对任意  $k$ , 有  $\hat{f}_k(\omega) = \hat{f}_0(\omega)$ , 所以频带之外 Landweber 方法一定收敛.

(2) 当  $\omega \in B$  时, 式 (7) 收敛必须满足条件  $0 < \tau < \frac{2}{\hat{K}_{\max}} < \frac{2}{|\hat{K}(\omega)|^2}$ .

### 2.2 Landweber 方法的正则化特性

Landweber 方法是一种以迭代次数作为正则化参数的正则化算法<sup>[10]</sup>.

令  $\hat{f}_0(\omega) = 0$ , 式(7)可以写作

$$f_k(x) = (R^{(k)}g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^q} \int_B \hat{W}^{(k)}(\omega) \frac{\hat{g}(\omega)}{\hat{K}(\omega)} e^{ix \cdot \omega} d\omega \quad (8)$$

其中

$$\hat{W}^{(k)}(\omega) = 1 - (1 - \tau |\hat{K}(\omega)|^2)^k \quad (9)$$

式(8)具有正则解的一般形式, 且式(9)满足窗口函数的条件.

对于一些小的  $\hat{K}(\omega)$  (很多情况下  $\hat{K}(\omega)$  的值是很小的),  $\hat{W}^{(k)}(\omega) \approx \tau k |\hat{K}(\omega)|^2$ , 而 Tikhonov 窗口函数  $\hat{W}_\mu(\omega) \approx \frac{1}{\mu} |\hat{K}(\omega)|^2$ . 若二者具有相同的正则化效果, 则  $\hat{W}^{(k)}(\omega) = \hat{W}_\mu(\omega)$ , 可得  $\mu = 1/\tau k$ .

因此 Landweber 方法具有正则化特性, 且正则化参数为迭代次数  $k$ .

### 2.3 Landweber 方法的半收敛性

式(8)中,  $R^{(k)}g$  用来表示第  $k$  次迭代得到的近似解  $f_k$ , 用  $f_k - f^{(0)}$  来表示迭代解的误差, 有

$$\begin{aligned} f_k - f^{(0)} &= R^{(k)}g - f^{(0)} \\ &= R^{(k)}(Af^{(0)} + w) - f^{(0)} \\ &= (R^{(k)}Af^{(0)} - f^{(0)}) + R^{(k)}w \end{aligned} \quad (10)$$

其中,  $R^{(k)}$  为式(8)中定义的算子,  $f^{(0)}$  为原始数据,  $w$  代表加性噪声数据.

从式(10)中可以看出, 迭代解的误差主要受  $R^{(k)}Af^{(0)} - f^{(0)}$  和  $R^{(k)}w$  两项的影响. 可以得到

$$\begin{aligned} \|R^{(k)}Af^{(0)} - f^{(0)}\|^2 &= \frac{1}{(2\pi)^q} \int |\hat{W}^{(k)}(\omega) - 1|^2 |\hat{f}^{(0)}(\omega)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{(2\pi)^q} \int (1 - \tau |\hat{K}(\omega)|^2)^{2k} |\hat{f}^{(0)}(\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (11)$$

$$\|R^{(k)}w\|^2 = \frac{1}{(2\pi)^q} \int |1 - (1 - \tau |\hat{K}(\omega)|^2)^k|^2 \frac{|\hat{w}(\omega)|^2}{|\hat{K}(\omega)|^2} d\omega \quad (12)$$

式(11)是迭代次数  $k$  的减函数, 而式(12)是迭代次数  $k$  的增函数. 即随着迭代次数的增加, 图像之间的

近似误差越来越小, 而噪声误差却越来越大. 因此, 复原过程必然表现出半收敛的性质, 即随着迭代次数的增加,  $f_k$  首先逼近  $f^{(0)}$ , 而后又远离  $f^{(0)}$ . 因此, 在利用 Landweber 迭代法进行图像去卷积时, 就要求我们寻找一个最优迭代次数  $k_{opt}$ , 从而使图像复原达到最好的效果.

### 2.4 预调节器的选取

式(9)中, 由于  $\hat{K}(\omega)$  往往很小 ( $10^{-3}$  数量级), 因此需要进行多次迭代, 窗口函数  $\hat{W}^{(k)}(\omega)$  才能近似收敛到 1, 即多次迭代之后才能求得最小二乘问题的解, 这表明收敛速度慢是 Landweber 迭代法的一大缺点. 为了克服这一缺点, Strand 提出了一种方法<sup>[11]</sup>, 对于最小二乘解问题(式(5)), 有如下形式

$$DA^*Af = DA^*g \quad (13)$$

这里  $D$  是一个线性有界算子, 记作

$$(Df)(x) = \frac{1}{(2\pi)^q} \int \hat{D}(\omega) \hat{f}(\omega) e^{ix \cdot \omega} d\omega \quad (14)$$

若算子  $\hat{D}(\omega)$  满足如下性质:

- 1) 对任一  $\omega, \hat{D}(\omega) |\hat{K}(\omega)|^2 \leq 1$ ;
- 2) 对  $|\hat{K}(\omega)|$  大于合适阈值的所有空间频率  $\omega$ ,  $\hat{D}(\omega) |\hat{K}(\omega)|^2$  接近 1, 或者至少不比 1 小很多.

满足以上条件的算子  $D$  被称作预调节器. 将预调节器算子作用在待求解的原问题上, 使原问题更易求解, 这一过程称作预处理<sup>[12,13]</sup>.

我们将 Landweber 方法应用于式(13), 得

$$f_{k+1} = f_k + \tau D(A^*g - A^*Af_k), \text{ 其中 } 0 < \tau < 2 \quad (15)$$

为便于分析, 取  $f_0 = 0$ , 对式(15)做傅里叶变换, 整理后可以得到

$$\hat{f}_k(\omega) = \left\{ 1 - \left[ 1 - \tau \hat{D}(\omega) |\hat{K}(\omega)|^2 \right]^k \right\} \frac{\hat{g}(\omega)}{\hat{K}(\omega)} \quad (16)$$

选择  $\hat{D}(\omega) = (|\hat{K}(\omega)|^2 + \gamma)^{-1}$  ( $\gamma$  为一常数),  $\tau = 1$  时, 有

$$\begin{aligned} \hat{f}_k(\omega) &= \left[ 1 - \left( \frac{\gamma}{|\hat{K}(\omega)|^2 + \gamma} \right)^k \right] \frac{\hat{g}(\omega)}{\hat{K}(\omega)} \\ &= \left[ 1 - \left( \frac{\gamma}{|\hat{K}(\omega_s)|^2 + \gamma} \right)^k \right] \hat{f}^{(0)}(\omega_s) + \left[ 1 - \left( \frac{\gamma}{|\hat{K}(\omega_w)|^2 + \gamma} \right)^k \right] \frac{\hat{w}(\omega_w)}{\hat{K}(\omega_w)} \\ &= \hat{S}_k(\omega) + \hat{N}_k(\omega) \end{aligned} \quad (17)$$

从式(17)中, 我们可以看出, 整个频域空间可分为信号子空间  $S$  (signal subspace) 和噪声子空间  $N$  (noise subspace). 由于  $|\hat{K}(\omega_w)|^2 < |\hat{K}(\omega_s)|^2$  (本文中选用高斯低

通滤波器), 因此, 若  $\gamma \in (|\hat{K}(\omega_s)|^2, |\hat{K}(\omega_w)|^2)$ , 则有

$$\frac{\gamma}{|\hat{K}(\omega_s)|^2 + \gamma} < \frac{1}{2} < \frac{\gamma}{|\hat{K}(\omega_w)|^2 + \gamma} \quad (18)$$

由式(18)可以看出, 信号子空间中的迭代加速效果要优于噪声子空间, 也就是说  $\hat{S}_k(\omega)$  的收敛速度要优于  $\hat{N}_k(\omega)$  的收敛速度, 这正是我们想要的. 但毕竟噪声子空间中的收敛速度也被加速, 因此, 如果我们将图像中的信号和噪声分离, 仅对信号子空间进行预处理加速, 而噪声空间不做加速处理, 则可以得到更好的效果.

事实上, 很难从严格意义上将信号与噪声彻底分离, 但我们可以找到两个子空间  $\tilde{S}$  和  $\tilde{N}$ , 分别近似于信号子空间  $S$  和噪声子空间  $N$ . 有如下描述:

$$\begin{aligned} \hat{f}_k(\omega) &= \hat{S}_k(\omega) + \hat{N}_k(\omega) \\ &= \left[ 1 - \left( \frac{\gamma_s}{|\hat{K}(\omega_s)|^2 + \gamma_s} \right)^k \right] \hat{f}^{(0)}(\omega_s) \\ &\quad + \left[ 1 - \left( \frac{\gamma_w}{|\hat{K}(\omega_w)|^2 + \gamma_w} \right)^k \right] \frac{\hat{w}(\omega_w)}{\hat{K}(\omega_w)} \end{aligned} \quad (19)$$

若  $\gamma_s = 0, \gamma_w = 1 - |\hat{K}(\omega_w)|^2$ , 则式(19)变为

$$\begin{aligned} \hat{f}_k(\omega) &= \hat{S}_k(\omega) + \hat{N}_k(\omega) \\ &= \hat{f}^{(0)}(\omega_s) + \left\{ 1 - \left[ 1 - |\hat{K}(\omega_w)|^2 \right]^k \right\} \frac{\hat{w}(\omega_w)}{\hat{K}(\omega_w)} \end{aligned} \quad (20)$$

对于式(20), 在图像去卷积问题中, 如果信号子空间和噪声子空间可以严格的分离, 那么经过一次迭代就可以得到最好的复原效果. 但由于近似噪声子空间  $\tilde{N}$  中往往包含有边缘信息, 因此, 需要进行若干次迭代来恢复图像边缘.

式(1)做傅里叶变换, 得到

$$\hat{\mathbf{g}} = \hat{\mathbf{A}} * \hat{\mathbf{f}} \quad (21)$$

$\hat{\mathbf{A}}$  中较大的值对应于  $\hat{\mathbf{g}}$  中的信号成分, 而较小的值对应于图像中的噪声成分<sup>[14]</sup>, 其中  $\hat{\mathbf{A}}$  由滤波器  $\mathbf{A}$  做傅里叶变换得到,  $\hat{\mathbf{g}}$  由图像  $\mathbf{g}$  做傅里叶变换得到. 因此, 根据这一性质, 我们可以尝试分离信号和噪声子空间.

以下是构造基于信噪分离的预调节器的具体步骤, 描述如下:

1) 寻找最优信噪分离点  $sw_{opt}$

① 读入噪声图像  $\mathbf{g}$ , 经傅里叶变换得到  $\hat{\mathbf{g}}$ , 将矩阵  $\hat{\mathbf{g}}$  中的元素从大到小排列, 并依次存入数组  $G[1, pixels]$  中, 其中  $pixels$  为图像的总像素;

② 遍历  $G$ , 找到最优信噪分离点  $sw_{opt}$ , 则  $G[1, sw_{opt}]$  主要存储信号像素值,  $G[sw_{opt}, pixels]$  主要存储噪声像素值.

2) 根据  $sw_{opt}$  分离图像  $\mathbf{g}$  为近似信号图像  $\tilde{\mathbf{g}}_{signal}$  和近似噪声图像  $\tilde{\mathbf{g}}_{noise}$

① 将  $G$  中区间  $[sw_{opt}, pixels]$  中的元素值全部置零得到数组  $G_{signal}$ , 然后将数组  $G_{signal}$  按照矩阵  $\hat{\mathbf{g}}$  中像素的分布重新构造一个新矩阵  $\hat{\tilde{\mathbf{g}}}_{signal}$ ,  $\hat{\tilde{\mathbf{g}}}_{signal}$  做傅里叶反变换就得到了近似信号图像  $\tilde{\mathbf{g}}_{signal}$ ; 将  $G$  中区间  $[1, sw_{opt}]$  中的元素之全部置零得到数组  $G_{noise}$ , 同理可以得到近似噪声图像  $\tilde{\mathbf{g}}_{noise}$ . 图 3 为根据  $sw_{opt}$  分离开的近似信号图像  $\tilde{\mathbf{g}}_{signal}$  与近似噪声图像  $\tilde{\mathbf{g}}_{noise}$ .

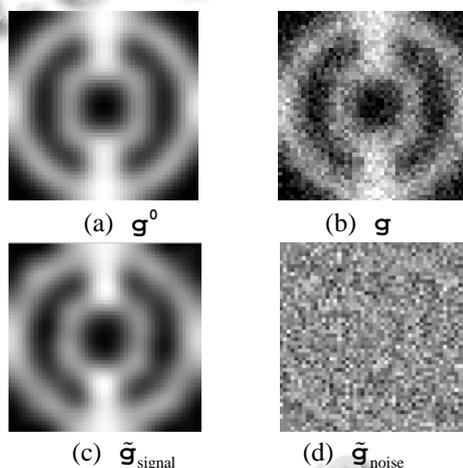


图 3 (a)模糊图像  $\mathbf{g}^0$ , 表示全信号图像; (b)噪声图像  $\mathbf{g}$ , 由  $\mathbf{g}^0$  加入高斯白噪声生成; (c)和(d)为近似信号图像与近似噪声图像, 由  $\mathbf{g}$  根据最优信噪分离点  $sw_{opt}$  分离得到.

3) 构造信噪分离的预调节器

① 将矩阵  $\hat{\mathbf{A}}$  中的元素从大到小排序, 并存入数组  $B[pixels]$  中, 其中  $pixels$  为图像的总像素;

② 对于数组  $B$ , 在区间  $[1, sw_{opt}]$  上应用  $B[1, sw_{opt}] = (|\hat{\mathbf{K}}|^2 + \gamma)^{-1}$  进行信号子空间预处理, 而在区间  $[sw_{opt}, pixels]$  上应用  $B[sw_{opt}, pixels] = 1$  来保证噪声子空间不进行迭代加速处理;

③ 将数组  $B$  按照矩阵  $\hat{\mathbf{A}}$  中的元素分布重新构造一个新矩阵  $\hat{\mathbf{D}}$ .

至此, 我们就得到了一个信噪分离的预调节器  $\mathbf{D}$ .

### 3 实验与分析

#### 3.1 实验对比

本节我们将通过实验来说明预处理方法的迭代加

速效果. 如图 4 所示, 将一幅规格为  $50 \times 50$ , 即具有 2500 个像素点的原始图像进行模糊化, 加噪处理, 得到的图像作为待去卷积的图像.

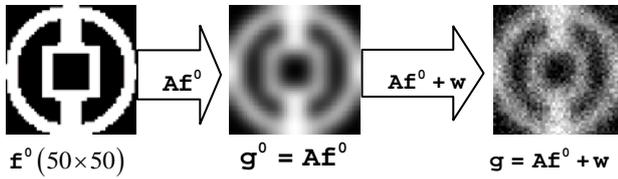


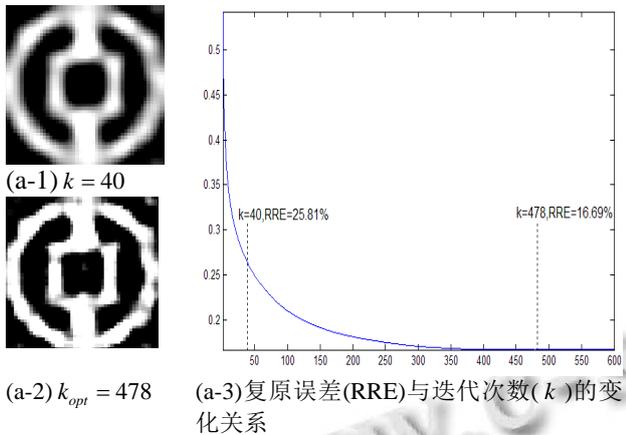
图 4 模拟的实验数据图像

接下来要做的就是根据给出的噪声图像  $g$ , 采用不同的实验方法, 得到近似于原始图像  $f^0$  的复原图像  $f$ .

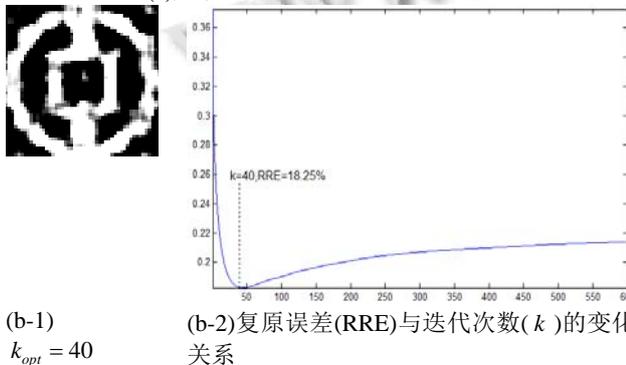
我们用相对复原误差 RRE(Relative restoration error)的概念来表征图像复原的质量. 相对复原误差有如下定义:

$$RRE = \frac{\|f - f^0\|}{\|f^0\|}$$

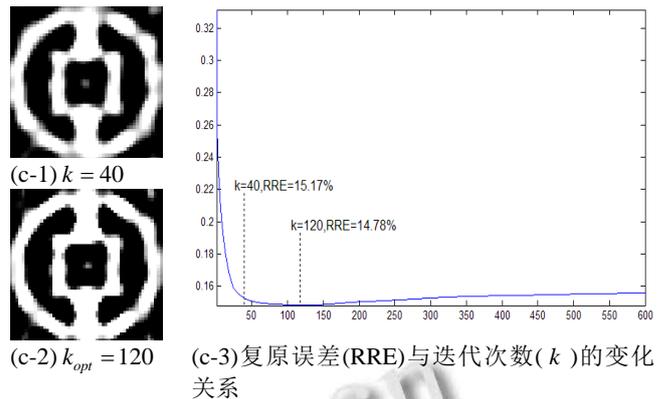
实验中我们采用不同的迭代次数来观察复原结果, 同时也计算出相对复原误差.



(a) 无预调节器的 Landweber 方法



(b) 采用简单预调节器的 Landweber 方法 (Strand 提出的预处理方法)



(c) 采用信噪分离预调节器的 Landweber 方法

图 5 实验结果

图 5 给出了实验的结果, 其中  $k$  为迭代次数,  $k_{opt}$  为最优迭代次数, 即图像达到最优复原效果时所需的迭代次数.

图(a)表示无预调节器的 Landweber 方法. 比较(a-1)与(a-2), 很明显, 迭代次数较小时, 噪声误差传递较小, 但边缘较模糊; 迭代次数取得最优值时, 边缘恢复较好, 但噪声被明显放大了.

图(b)表示采用简单预调节器 ( $\gamma = 0.08$ ) 的 Landweber 方法. 可以看出, 该方法在进行 40 次迭代之后得到最优复原效果, 与(a)中的方法相比, 收敛速度大幅提高, 但是由于噪声传递的加快, (b)中的方法明显降低了图像的恢复质量.

图(c)表示采用信噪分离预调节器的 Landweber 方法, 可以看出, 与(a)中方法相比, (c)中的方法不仅需要更少的迭代次数就能得到最优效果, 而且其复原误差也较(a)中的方法小. 与(b)相比, 虽然(c)中的方法需要更多的迭代次数达到最优复原效果, 但是在二者取相同的迭代次数时, (b)中的方法已经得到最小恢复误差, 大小为 18.25%, 而此时运用(c)中的方法得到的复原误差为 15.17%, 也就是说在相同迭代次数  $k = 40$  的情况下, (c)中的方法要优于(b)中的方法.

三种方法的实验结果比较如下表 1 所示:

表 1 实验结果比较

	迭代次数	相对复原误差 ( $k = 40$ ) (%)	最优迭代次数	最小相对复原误差 (%)
无预调节器	40	25.81	478	16.69
简单预调节器	40	18.25	40	18.25
本文的方法	40	15.17	120	14.78

从表 1 可以看出, 对同一幅模糊图像进行复原的

情况下,同样的迭代次数本文的方法相对误差最小。

图6为三种实验方案得到的相对复原误差曲线在同一坐标系中的比较。从图中可以直观的看出,采用信噪分离预调节器的 Landweber 方法,无论在加速迭代收敛方面,还是在提高图像复原精度方面,都有着明显的提高。

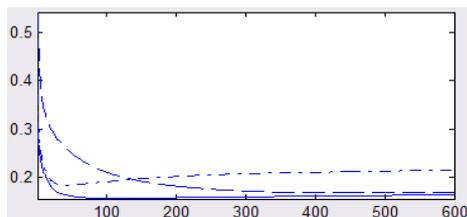
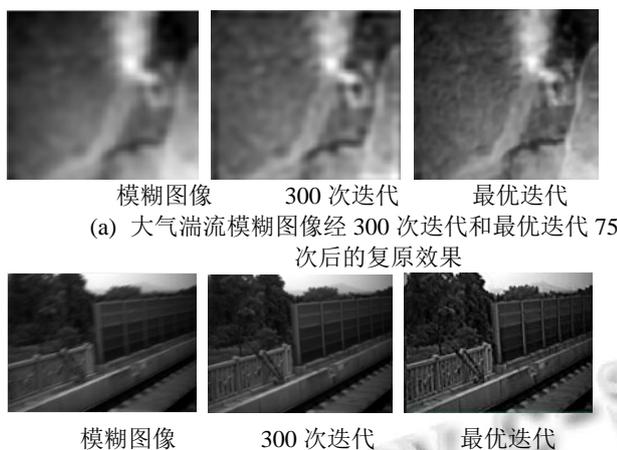


图6 三种方法复原误差的比较(横轴为迭代次数,纵轴为复原误差)

### 3.2 实际应用中的复原结果

根据3.1节中的实验模拟,我们得到如图7所示的实际应用中图像的复原结果。



(a) 大气湍流模糊图像经300次迭代和最优迭代75次后的复原效果

(b) 运动模糊图像经300次迭代和最优迭代120次后的复原效果

图7 遥感图像和高速铁路图像的复原结果

从图7中可以明显观察到本文提出的改进的 Landweber 迭代法无论对于遥感图像中的大气湍流模糊还是高速铁路图像的运动模糊,都是切实可行的,且具有很好的复原效果。

## 4 结语

本文提出了一种基于信噪分离的预处理迭代算法, Landweber 其主要思想是通过分离信号域与噪声域,仅

在信号域上进行迭代加速预处理。通过理论分析与实验,说明了这一方法的优点:1)收敛快;2)误差小。从对比结果中可以明显的观察到:在相同的迭代次数下,本方法具有最小的相对复原误差。因此采用这一方法,可以使图像更快的复原到更优的近似解。

### 参考文献

- Hackbusch W. Iterative Solution of Large Sparse Systems of Equations. 1st ed., New York: Springer-Verlag, 1994: 43-62.
- Lu G, Peng LH, Zhang BF, Liao YB. Preconditioned Landweber iteration algorithm for electrical capacitance tomography. Flow Measurement and Instrumentation, 2005, 16(2-3): 163-167.
- O'Sullivan F. A statistical perspective on ill-posed inverse problems. Statistical science, 1986, 1(4): 502-518.
- Landweber L. An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind. American journal of mathematics, 1951, 73(3): 615-624.
- Groetsch CW. Inverse problems in the mathematical sciences. 1st ed., Braunschweig: Vieweg, 1993: 79-101.
- Xu P. Truncated SVD methods for discrete linear ill-posed problems. Geophysical Journal International, 1998, 135(2): 505-514.
- 陈武凡,李超,陈和晏.空域中退化图像恢复的有效算法.计算机学报,1999,22(12):1267-1271.
- Gonzalez RC, Woods RE. 数字图像处理. 2nd ed.北京:电子工业出版社,2007.
- Bertero M, Boccacci P. Introduction to inverse problems in imaging. Boca Raton: CRC Press, 1998: 137-167.
- Tikhonov AN, Arsenin VYA. Solutions of ill-posed problems. 1st, ed., Washington: Winston and Sons, 1977: 45-94.
- Piana M, Bertero M. Projected Landweber method and preconditioning. Inverse Problems, 1997, 13(2): 441-463.
- Golub GH, O'Leary DP. Some history of the conjugate gradient and Lanczos algorithms: 1948-1976. SIAM review, 1989, 31(1): 50-102.
- Hanke M. Accelerated Landweber iterations for the solution of ill-posed equations. Numerische Mathematik, 1991, 60(1): 341-373.
- Brianzi P, Di Benedetto F, Estatico C. Improvement of space-invariant image deblurring by preconditioned Landweber iterations. SIAM Journal on Scientific Computing, 2008, 30(3): 1430-1458.