

# 基于拉普拉斯算子的三角网格模型的平滑与压缩算法<sup>①</sup>

王 卉, 黄玉清

(西南科技大学 信息工程学院, 绵阳 621010)

**摘 要:** 三角网格模型被广泛应用于各个领域并迅速发展, 为了既保留网格模型的局部几何特征, 又在平滑去噪的同时能够较好地保持边缘、纹理等细节信息, 提出一种基于拉普拉斯算子的偏微分方程平滑方法, 可以得到较好的去噪效果; 为了更加方便三维数据的传输与操作, 采用了一种在拉普拉斯算子的基础上, 对三角网格模型进行特征分解进而进行光谱压缩的方法, 可以实现对模型的压缩。

**关键词:** 拉普拉斯算子; 三角网格模型; 平滑; 压缩

## Smoothing and Compression Algorithm of Triangular Mesh Models Based on Laplacian

WANG Hui, HUANG Yu-Qing

(School of Information Engineering, Southwest University of Science and Technology, Mianyang 621010, China)

**Abstract:** Triangular mesh models are widely used in various fields and develops rapidly. In order to preserve the local geometric features of the mesh model, and at the same time can better keep the edge and texture details while smoothing and denoising, a partial differential equation smoothing method based on Laplacian is came up, and it can get good denoising effect. In order to transmit and operate three-dimensional data more conveniently, an eigen-decomposition and spectral compression method based on Laplacian is came up, and it can realize the compression of the model.

**Key words:** Laplacian; triangular mesh models; smoothing; compression

现阶段, 采用三角网格来描述几何形体的技术不断发展而且日渐成熟, 对三维图形可视化的要求也逐渐在提高, 然而通过海量的数据点所得到的三角网格模型却不可避免的存在着噪音的影响, 这些噪音有可能是由原始模型的小洞、尖锐特征或者是较高的曲率造成的, 也有可能来源于生成网格模型算法本身的局限性或所选用的测量机器的采样率较低<sup>[1,2]</sup>。存在着噪声的不规则网格模型对图像的显示、传输、实验等等后续的操作将造成较大的影响<sup>[3]</sup>。因此, 如何在既能够保持模型本身的几何特征, 又能够使模型去除一定噪声的要求下对三维网格模型进行平滑已成为目前计算机图形学中的一个重要问题。

近年来, 基于偏微分方程的图像处理方逐渐法成为了图像处理领域的重要分支。偏微分方程从分析图像降噪的机理入手, 结合泛函分析、微分几何等数学工具, 建立了和偏微分方程相关的公理体系<sup>[4]</sup>。尤其

是, 二维图像去噪中的基于偏微分方程的思想逐渐被应用到了三维网格模型的平滑之中, 在这种情况下, 本文提出了一种基于拉普拉斯算子<sup>[5]</sup>的利用偏微分方程对三角网格模型进行平滑的方法, 既具有拉普拉斯平滑可以保留网格模型的局部几何特性的优点, 又具有偏微分方程偏方法能够较好地保持边缘、纹理等细节信息的优点, 可以较好地对三角网格模型进行平滑去噪, 进一步改善对噪声模型的平滑效果。

目前, 随着三维外形扫描数据技术不断发展, 人们对于几何数据的细节和精度都有了更高的要求, 这使得三维几何数据的复杂程度、规模等快速增长, 庞大的几何数据量给现有的三维图形的处理能力以及速度带来了挑战<sup>[6,7]</sup>。用三角网格模型去描述含有大量数据点的几何图形虽然缩减了存储量, 但是由于网络带宽等因素的限制, 三维几何数据的传输还是受到了严重的阻碍<sup>[8]</sup>。仅仅依靠增加硬件设备的投入是不足以

① 收稿时间:2015-04-17;收到修改稿时间:2015-05-28

解决这一问题的, 需要人们研究针对三维几何数据的压缩技术. 在这种情况下, 本文采用了一种在拉普拉斯算子的基础上, 对三角网格模型进行特征分解进而进行光谱压缩的方法, 可以较好的实现对三角网格模型的压缩, 更加方便了数据的传输与操作.

## 1 基本原理

### 1.1 拉普拉斯算子

假设  $M = (V, E, F)$  是一个给定的包含了  $n$  个顶点的三角网格模型. 其中  $V$  表示模型中的顶点的集合,  $E$  表示模型中的棱边的集合, 而  $F$  表示模型中的面的集合. 其中每一个属于模型  $M$  的顶点  $i$ , 如果用绝对笛卡尔坐标表示的话, 可以表示为  $v_i = (x_i, y_i, z_i)$ . 下面我们定义  $v_i$  所对应的  $\delta$  坐标或者说拉普拉斯坐标的表示形式如式(1):

$$\delta_i = (\delta_i^{(x)}, \delta_i^{(y)}, \delta_i^{(z)}) = v_i - \frac{1}{d_i} \sum_{j \in N(i)} v_j \quad (1)$$

$$= \frac{1}{d_i} \sum_{j \in N(i)} (v_i - v_j)$$

其中  $N(i) = \{j | (i, j) \in E\}$  表示顶点  $v_i$  的直接邻域点的集合,  $d_i = |N(i)|$  表示顶点  $v_i$  的直接邻域点的个数, 进而  $\bar{v}_i = \frac{1}{d_i} \sum_{j \in N(i)} v_j$  表示的是顶点  $v_i$  的所有直接邻域点的中心位置, 那么  $\delta_i$  可以视为顶点  $v_i$  的绝对笛卡尔坐标与它在网格中的直接邻域点的中心坐标的差, 即表示了当前顶点与它直接相邻的所有顶点的中心之间的偏离量, 图 1 可以更形象的反映出  $\delta$  坐标的含义:

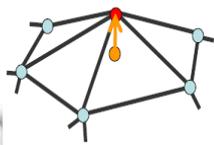


图 1  $\delta$  坐标示意图

在式(1)中, 我们对网格顶点  $v_i$  的所有直接邻域点求取了平均值, 也就是  $\bar{v}_i = \frac{1}{d_i} \sum_{j \in N(i)} v_j$ , 采用的是均一化的加权机制, 对于一个规则的三角形网格模型来说, 如果它的顶点的直接邻域点之间的各边的长度都是单位量, 那么按照公式所计算得到的拉普拉斯坐标值就会为零, 也就是说没有任何的误差, 这也间接地

说明了该网格模型没有含有任何几何细节, 网格模型是一个完全平滑的曲面. 但是在现实生活中, 规则的网格模型大多都是理想状态中的, 一般不存在规则的网格模型, 也就是说大部分曲面包含着丰富的几何细节, 那么拉普拉斯坐标值将不会为零, 所以拉普拉斯坐标能够反映曲面的几何局部细节特性<sup>[9]</sup>.

### 1.2 拉普拉斯矩阵的形成

拉普拉斯矩阵的引入主要是为了实现以矩阵的形式完成绝对笛卡尔坐标向  $\delta$  坐标(拉普拉斯坐标)的转化. 现在我们让  $A$  是网格的邻接矩阵或者说是连通矩阵, 那么  $A$  可以表示成如下形式:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & (i, j) \in E \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

通过  $A$  矩阵, 可以很清楚的展现出网格顶点之间的相互连接关系.

让  $D$  是对角矩阵且  $D_{ii} = d_i$ .

那么转换绝对笛卡尔坐标到  $\delta$  坐标的矩阵是:

$$L = I - D^{-1}A$$

其中  $I$  为单位矩阵.

这样便得到了三角网格模型的拉普拉斯算子  $L$ , 通常情况下我们考虑对称版本的  $L$  矩阵, 它可以使研究更为方便, 由  $L_s = DL = D - A$  定义对称的拉普拉斯矩阵:

$$(L_s)_{ij} = \begin{cases} d_i & i = j \\ -1 & (i, j) \in E \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

也就是说,  $L_s x = D\delta^{(x)}, L_s y = D\delta^{(y)}, L_s z = D\delta^{(z)}$ , 其中  $x$  是一个包含了所有顶点的  $x$  的绝对坐标的  $n$  维向量,  $y, z$  与之类似.

### 1.3 偏微分方程平滑

通常情况下, 偏微分方程指的是含有未知的多元函数及其部分偏导数的等式形式表达式<sup>[10]</sup>. 例如一个自变量为  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  的  $n$  元函数  $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  的偏微分方程的一般形式是:

$$\text{其中 } D^k \varphi = \frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}},$$

$$\sum_{i=1}^n k_i = k, k = 1, 2, \dots, m; k_i \geq 0.$$

流形上的热扩散过程一般是由如下方程来控制的:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -Lu(x, t), t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x, 0) = f(x), x \in M$$

其中  $L$  是 Laplace-Beltrami 算子,  $f(x)$  是定义在流形  $M$  上的初始热场量.

为了实现对三角网格模型的平滑滤波功能, 本文在拉普拉斯矩阵的基础上, 建立了下述偏微分方程模型, 通过执行该方程来执行一个热扩散过程. 偏微分方程如下所示:

$$dF / dt = -L * F$$

$$\text{和 } F(x, t = 0) = f$$

其中  $L$  为拉普拉斯矩阵,  $f = \text{vertex}(i, :)$ , 表示了三角网格模型的顶点的其中一维.

我们设定一个时间  $dt$  的值作为将模型离散化的时间步长, 这个值在选择的时候要尽量小, 这样效果才会比较明显; 然后通过改变停止时间  $T \max \setminus dt$  的值来决定执行热扩散的次数, 也就是说执行上述偏微分方程的次数, 进而得到不同情况下的平滑效果.

#### 1.4 特征分解与光谱压缩

通常一个三角形网格模型所包含的信息被分为三部分: 拓扑信息 (Connectivity data)、几何信息 (Geometry data) 和属性信息 (Property data). 由于几何信息和属性信息在很多例子中是依附于顶点的, 因此几何信息和属性信息通常被称为顶点信息, 这些信息一般都以单精度浮点数的形式被存放, 这样一个三角网格模型有时候就要占据大量的空间, 因此为了有效的处理和传输三角网格模型, 对其进行压缩是一种比较有效的手段<sup>[11,12]</sup>. 而拉普拉斯算子就是根据三角网格模型的顶点信息建立的, 本文在拉普拉斯算子的基础上采用特征分解的方法实现对模型的光谱压缩. 对拉普拉斯矩阵进行 SVD 分解之后, 第一个特征向量 (与最小的特征值相对应) 代表的是网格上平稳的、缓慢变化的部分, 最后一个特征向量 (与最大的特征值相对应) 包含了高频部分, 及快速变化的部分. 拉普拉斯算子的特征向量是基于不规则域的离散余弦的扩展, 其特征值被认为代表了网格的频谱, 通过对特征值以及特征向量所对应的网格结构的操作, 可以实现对网格的压缩, 具体步骤如下:

(1) 求取所选模型的拉普拉斯算子;

(2) 将拉普拉斯算子进行特征分解, 得到  $U$  矩阵:  $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$  和  $V$  矩阵. 其中,  $U$  矩阵是由特征向

量组成的矩阵,  $V$  矩阵是由特征值组成的对角矩阵, 且  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ ;

(3) 提取模型的顶点矩阵, 并将顶点矩阵映射到特征向量矩阵  $U$  中, 得到的新的矩阵代表了三角网格模型的光谱系数;

(4) 将高频系数置 0, 得到新的矩阵. 将该矩阵映射回特征向量矩阵中, 得到压缩后的模型.

## 2 实验结果与分析

### 2.1 偏微分方程平滑

下图所示是一个已知的三维 elephant 模型.



图 2 原始已知模型

在已知模型的基础上我们对其三角化, 即用三角网格面来近似的描述该三维立体模型.

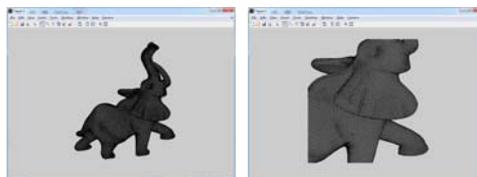


图 3 三角网格化后的模型(整体和局部)

为了更好的实现对三角网格模型的平滑去噪的效果, 现在可以给该已知的三角网格化后模型添加一些噪声(这些噪声将被添加在三角网格模型的每个顶点的法线方向上).



图 4 添加噪声之后的模型

根据本文所述的方法, 在不同的, 取 0.1 时对加了噪声后的模型进行平滑处理后的结果如下:

由上面一系列结果图可以得出: 文中所述方法可以较好地实现对三角网格模型的平滑, 随着  $T \max$  的

增加,也就是偏微分方程迭代次数的增加,滤波效果都会越来越好.当  $T_{max}$  等于 40,即偏微分方程被执行了 400 次左右时,基本去除了所加的噪声,恢复成原来的模型,之后  $T_{max}$  再增加时,就会使得模型过多平滑,而改变了原始已知模型的特征.

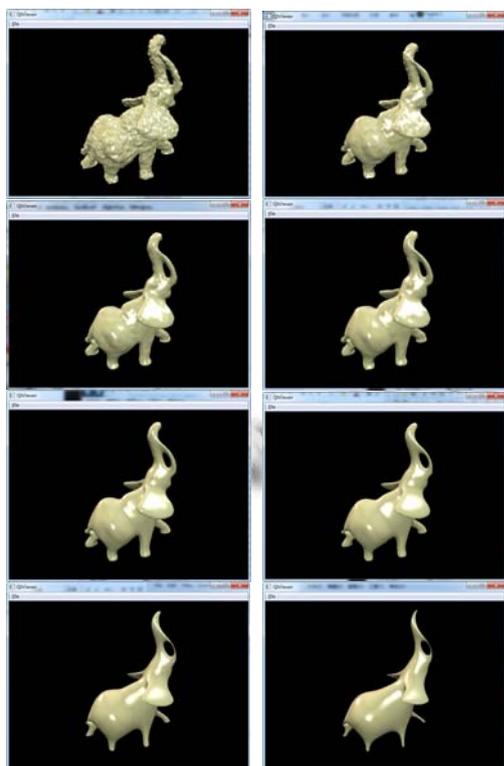


图 5  $dt = 0.1$ ,  $T_{max}$  分别等于 2、5、8、10、20、40、100、200

### 2.2 光谱压缩

我们将对一个三角网格化的 mushroom 模型进行压缩,保留百分比不同,也就是说压缩比例不同,得到的结果也将不同(下面的提及的 Keep 的值表示的是保留的百分比).

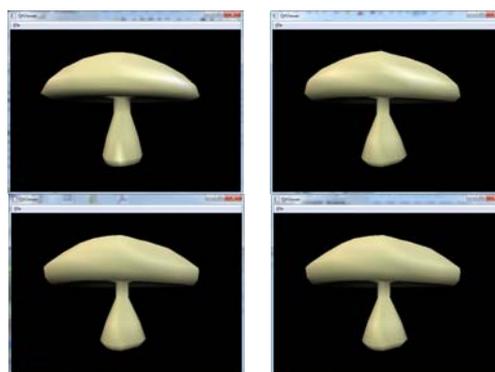


图 6 Keep 分别为 2、3、5、10、20、50、80、100(原图)

由图 6 可以得出,随着 Keep 值的增加,三角网格模型压缩的程度在减小,当 Keep 的值为 100 时,也就是完全保留时,得到的是实验选取的原始模型.当 Keep 的值越小(压缩比例越大)时,被置为 0 的高频系数相对越多,也就是,三角网格模型就被压缩的越厉害,尤其是其比较突出的部位,因为这些部位所包含的高频信息较多.

### 3 结论

本文在拉普拉斯算子的基础上,提出了对三角网格模型的一种偏微分方程平滑方法以及光谱压缩算法,通过改变参数得到了较好地平滑以及压缩效果,对实现三维几何数据的更方便的传输与操作具有实用价值.

#### 参考文献

- 1 Qin XJ, Zheng HB, Cheng SW, Liu SS, Xu XG. Mesh smoothing method based on local wave analysis. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2012: 598-607.
- 2 佟一飞,刘小丹.基于顶点扩散的三维网格平滑技术研究[硕士学位论文].大连:辽宁师范大学,2009.
- 3 陈中,段黎明,刘璐.保特征的三角网格均与光顺算法.计算机集成制造系统,2013,19(3):461-467.
- 4 张建平.基于偏微分方程的图像去噪和分割方法[硕士学位论文].大连:大连理工大学,2012.
- 5 Nealen A, Igarashi T, Sorking O, et al. Laplacian mesh optimization. Proc. of the ACM Graphite. New York, N.Y., USA: ACM, 2006: 381-389.
- 6 Liu XG, Bao HJ, Shum HY, et al. A novel volume constrained

- smoothing method for meshes. Graphics Models, 2002, 64 (3-4): 169-182.
- 7 徐汇敏.三角网格模型的压缩和表示[硕士学位论文].西安:西安电子科技大学,2008.
- 8 李海生,刘成,蔡强,曹健.三维模型网格压缩技术研究.系统仿真学报,2013,25(9):2150-2156.
- 9 李博,刘胜兰,张丽艳.基于三维模型拉普拉斯分解的浮雕生成算法.计算机集成制造系统,2011,17(5):946-951.
- 10 辛巧.偏微分方程及其在图像去噪和分割中的应用[硕士学位论文].重庆:重庆大学,2011.
- 11 Sorkine O, Cohen-Or D, Toledo S. High-Pass quantization for mesh encoding. Euro graphics Symposium on Geometry Processing, 2003.
- 12 徐工,程效军.基于小波技术的散乱点云自适应压缩算法.同济大学学报(自然科学版),2013,41(11):1738-1743.

WWW.C-S-A.ORG.CN

WWW.C-S-A.ORG.CN