

基于形状控制的细分曲面的局部渐进插值方法^①

林传奎, 潘日晶, 陈青, 黄丽琴

(福建师范大学 数学与计算机科学学院, 福州 350117)

摘要: 提出一种基于形状控制的 Catmull-Clark 细分曲面构造方法, 实现局部插值任意拓扑的四边形网格顶点。首先该方法利用渐进迭代逼近方法的局部性质, 在初始网格中选取若干控制顶点进行迭代调整, 保持其他顶点不变, 使得最终生成的极限细分曲面插值于初始网格中的被调整点; 其次该方法的 Catmull-Clark 细分的形状控制建立在两步细分的基础上, 第一步通过对初始网格应用改造的 Catmull-Clark 细分产生新的网格, 第二步对新网格应用 Catmull-Clark 细分生成极限曲面, 改造的 Catmull-Clark 细分为每个网格面加入参数值, 这些参数值为控制局部插值曲面的形状提供了自由度。证明了基于形状控制的 Catmull-Clark 细分局部渐进插值方法的收敛性。实验结果验证了该方法可同时实现局部插值和形状控制。

关键词: Catmull-Clark 细分; 渐进迭代; 局部插值; 形状控制

Local Progressive Interpolation for Subdivision with Shape Control

LIN Chuan-Luan, PAN Ri-Jing, CHEN Qing, HUANG Li-Qin

(School of Mathematics and Computer Science, Fujian Normal University, Fuzhou 350117, China)

Abstract: A new scheme for constructing a Catmull-Clark subdivision surface with shape control is proposed, which interpolates the local vertices of a quadrilateral mesh with arbitrary topology. Firstly, utilizing the local property of the progressive iterative approximation method, this subdivision scheme chooses a subset of the vertices on the control mesh to be adjusted and remains the others unchanged in the iterative process, it results the limit surface of the subdivision interpolates the corresponding subset of the vertices on the initial mesh. Secondly, the shape control for Catmull-Clark subdivision in the proposed scheme is based on a two-phase subdivision. The two-phase scheme works by applying a modified Catmull-Clark subdivision for the initial mesh to generate a new mesh firstly, and then applying the regular Catmull-Clark subdivision for the new mesh to resulting the limit surface. The modified subdivision scheme carries a parameter for each face of the initial mesh, and these parameters provide the degrees of freedom for the shape control of the interpolating subdivision surface. It is proven that the scheme based on Catmull-Clark subdivision with shape control is convergent. The experimental examples are given to show that the method is effective both in local progressive interpolation and shape control.

Key words: Catmull-Clark subdivision; progressive iterative; local interpolation; shape control

伴随着计算机硬件和 IC 技术的提高, 利用计算机显示和操作三维物体越来越普遍。CAGD 和 CG 的发展推动着三维造型技术的进一步提高。细分方法在 CAGD 中的很多领域有着重要应用。一些著名的造型与动画软件如 Softimage, 3DMax, Maya 都具有细分

曲面的造型功能^[1]。

一系列建模应用了细分曲面。细分过程是通过对初始控制网格不断细分生成物体模型。根据实际应用, 可以将细分方法分为两类: 一类是逼近型细分方法, 另一类是插值型细分方法。各自有优缺点。逼近型细

① 基金项目:福建省自然科学基金(2010J01318)

收稿时间:2014-11-11;收到修改稿时间:2014-12-30

分生成的极限曲面位于初始控制网格的凸包内。极限曲面相对初始网格来说形状会有不同程度的收缩^[2]。基于四边形网格的 Catmull-Clark^[3]细分方法和基于三角形网格的 Loop^[4]细分方法等是逼近型细分方法的典型代表。这两种逼近型细分方法的极限曲面都在规则点处 C^2 连续, 不规则点处 C^1 连续。插值型细分相对逼近细分来说约束更多, 要求生成的极限曲面必需通过初始控制网格顶点。典型代表有 Butterfly 细分方法。后来又由 Dyn^[5], Zorin^[6]以及 Kobbelt^[7]等分别作了改进。插值型细分方法得到的极限曲面不会收缩但是极限曲面可能产生不必要的扭曲。插值细分方法的吸引力体现在插值细分方法便于直接控制曲面形状。最近有研究表明插值型细分和逼近型细分可以内在统一^[8]。近年来由逼近型细分转化为插值型细分的方法成为计算机辅助几何设计研究的一个热点, 越来越受到关注。其中 Hoppe^[9], Nasri^[10], Brunet^[11]以及 Halstead^[12]等提出全局优化方法构造出线性方程组反解控制顶点, 对反解后新控制网格应用相应细分方法, 得到细分后的极限曲面插值于初始控制网格顶点。但是全局优化方法计算量较大, 难以处理稠密的网格。

为了避免求解复杂的线性方程组, Zheng 和 Cai^[13]提出一种用两步 Catmull-Clark 细分方法构造插值曲面。该两步细分的第一步是用一个自定义的细分规则细分一次初始网格得到一个新网格。第二步是应用传统 Catmull-Clark 细分规则细分新网格得到极限曲面。该方法利用第一步的细分公式和 Catmull-Clark 细分的极限点公式构造一个线性方程组求解出一个新的初始网格, 使得相应的两步细分的极限曲面插值原初始网格顶点。该方法引入一个参数, 可用于控制插值曲面的形状。

随着 B 样条曲线渐进插值(progressive interpolation, PI)方法的广泛研究, Chen^[14]等提出了基于 Catmull-Clark 细分曲面的渐进迭代插值方法。Cheng^[15]等提出了 Loop 细分曲面的渐进迭代插值方法。渐进迭代的方法同时具有全局和局部的性质, 不必求解方程组, 可以处理任意拓扑网格, 同时生成与初始网格形状类似的光顺的细分插值曲面。但该方法缺少控制曲面形状的自由度。为了增加控制曲面形状的自由度, Maekawa^[16]等提出一种基于几何算法的细分曲面的方法实现了曲面形状的调整。Fan^[17]等利用渐进迭代的方法提出 Doo-Sabin 细分方法同时实现了插值和形状控

制。Lin 和 Pa^[18]通过两步细分的方法提出了基于形状控制的插值型 Catmull-Clark 细分。

以往的渐进插值方法需要对控制网格的所有顶点进行调整, 称为全局渐进迭代插值方法。虽然这种方法实现了插值的效果, 但在实际应用过程中可能仅需要对控制网格顶点的某一子集进行局部的插值。利用 PIA 算法的局部性质^[19], Zhao 和 Lin^[20]提出了一种细分曲面的局部渐进插值的方法, 给曲面形状控制带来更多的灵活性, 并证明了该方法的收敛性。

为了使生成的局部插值曲面有更多调整曲面形状的自由度, 可以在细分曲面的局部渐进迭代插值过程中使用改造型渐进迭代的方法。由于改造型渐进迭代方法相对传统的渐进迭代方法额外加入了控制曲面的形状的参数, 可提高控制曲面形状的自由度。利用细分曲面的改造型渐进迭代插值方法和局部渐进迭代插值方法的结合, 可实现细分曲面的局部插值和形状控制。本文在文献[18]的基础上, 提出一种基于形状控制的细分曲面的局部渐进插值方法。由于相关文献已经分别证明了 Doo-Sabin, Catmull-Clark 以及 Loop 细分格式分别具有局部渐进插值的性质^[20]和基于形状控制的渐进迭代插值的性质^[17,18,20]。本文将 Catmull-Clark 细分作为例子, 证明 Catmull-Clark 细分过程可以同时实现局部插值和形状控制。对应的 Doo-Sabin, Loop 等细分有类似的结果。

1 基于形状控制的渐进插值细分及其收敛性

本节首先对文献[18]给出的基于形状控制的渐进迭代插值型 Catmull-Clark 细分进行简要回顾, 详细内容参考相关文献[18]。细分曲面渐进迭代逼近的方法是 B 样条渐进迭代逼近方法的扩展, 基本思想是不断移动控制网格的顶点位置最终使得控制网格生成的极限曲面插值于初始网格顶点。所谓带形状控制的渐进迭代插值, 即对给定网格所有顶点进行调整使生成的极限曲面插值初始控制网格顶点, 并实现曲面的形状控制。文献[18]定义了一种两步 Catmull-Clark 细分, 其渐进迭代插值方法是基于此两步细分的。文献[18]的方法简述如下:

给定一个封闭的四边形网格 $M^{(0)}$ 。在对 $M^{(0)}$ 应用两步 Catmull-Clark 细分中的第一步后得到新的控制网格 $\bar{M}^{(0)}$ 。其中第一步细分通过对传统的 Catmull-Clark 细分改造来实现。改造过程如下:

1)拓扑规则不变;

2)几何规则中,新边点和新面点取法不变.新顶点的取法为 $v^{(0)} = \lambda v^{(0)} + (1-\lambda)[\alpha E + (1-\alpha)F]$,其中 E 是顶点 $v^{(0)}$ 的所有一领域点 $e_i^{(0)}$ 的平均即 $E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^{(0)}$. F 为顶点 $v^{(0)}$ 的一领域面上与 $v^{(0)}$ 不相邻的顶点 $f_i^{(0)}$ 的平均即 $F = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i^{(0)}$. 参数 $\lambda \in (7/20,1]$.

对新的四边形网格 $\bar{M}^{(0)}$ 应用两步 Catmull-Clark 细分中的第二步即传统的 Catmull-Clark 细分后得到极限曲面 $S^{(0)}$. $M^{(0)}$ 中的任意一点 $v^{(0)}$ 经过两步 Catmull-Clark 细分后在极限曲面 $S^{(0)}$ 上都有唯一的顶点 $v_{\infty}^{(0)}$ 与 $v^{(0)}$ 对应. $v_{\infty}^{(0)}$ 就称为 $v^{(0)}$ 在两步细分后的极限点. 显然, $v_{\infty}^{(0)}$ 实质上就是第一步细分得到的新网格 $\bar{M}^{(0)}$ 上顶点 $v^{(0)}$ 的极限点. 由文献[18]得到的极限点公式如下:

$$v_{\infty}^{(0)} = \frac{(n^2\lambda + \frac{7}{4}n)v^{(0)} + [n(1-\lambda)\alpha + \frac{5}{2}]\sum_j e_j^{(0)}}{n(n+5)} + \frac{[n(1-\lambda)(1-\alpha) + \frac{3}{4}]\sum_j f_j^{(0)}}{n(n+5)} \quad (1)$$

文献[18]中 α 的取值与顶点 $v^{(0)}$ 的度 n 相关. 本文中 α 取常量 10/13. 令 $\alpha = 10/13, \beta_n = n(1-\lambda)10/13 + 5/2$. 则(1)式为:

$$v_{\infty}^{(0)} = \frac{(n^2\lambda + \frac{7}{4}n)v^{(0)} + \beta_n \sum_j e_j^{(0)} + \frac{3}{10}\beta_n \sum_j f_j^{(0)}}{n(n+5)} \quad (2)$$

其中 n 为 $v^{(0)}$ 的度. 参数 $\lambda \in (7/20,1]$.

基于上述两步 Catmull-Clark 细分的渐进迭代过程如下: 给定一个初始四边形网格 M^0 . 设 M^0 经过基于顶点的两步 Catmull-Clark 细分后得到的极限曲面为 S^0 . 对 M^0 上的任意一个顶点 v^0 . 计算 v^0 与其在 S^0 上相对应的极限点 v_{∞}^0 的距离向量 $d^0 = v^0 - v_{\infty}^0$. 把这个距离向量 d^0 与 v^0 相加得到第一次迭代生成的新顶点 $v^1 = v^0 + d^0$. 这些新顶点按照 M^0 的拓扑连接构成了新网格 M^1 . 假设 M^k 为 k 次迭代后生成的细分网格. v^k 为 M^k 上对应于 v^0 的顶点. S^k 为 M^k 经过基于顶点两步 Catmull-Clark 细分后得到的极限曲面. v_{∞}^k 为 v^k 在极限曲面 S^k 上相对应的极限点. 计算相应的距离向量 d^k . 即 $d^k = v^k - v_{\infty}^k$. 把 d^k 加到顶点 v^k 上. 得到新网格 M^{k+1} 上的顶点 v^{k+1} . 即 $v^{k+1} = v^k + d^k$. M^{k+1} 与 M^0 的拓扑结构相同. 重复以上过程会得到一系列网格 $M^k (k=1,2,\dots)$.

标记 m 为给定网格 M^0 的顶点数. 则第 k 步迭代得到的网格 M^k 的顶点数仍为 m . 设 $v_1^k, v_2^k, \dots, v_l^k$ 为 M^k 的 m 个顶点. 上述迭代的过程可以得到顶点的调整向量序列 $(d_1^k, d_2^k, \dots, d_m^k)$, $k=0,1,\dots$, 迭代格式用矩阵可表示为

$$(d_1^k, d_2^k, \dots, d_m^k)^T = (I - B)(d_1^{k-1}, d_2^{k-1}, \dots, d_m^{k-1})^T = (I - B)^k (d_1^0, d_2^0, \dots, d_m^0)^T \quad (3)$$

其中 $d_i^k = v_i^k - v_{i\infty}^k$. $i=1,2,\dots,l$. I 为 m 阶单位矩阵. B 为 $m \times m$ 矩阵.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\lambda n_1^2 + \frac{7}{4}n_1}{n_1(n_1+5)} & \frac{F(v_1^0, v_2^0)\beta_{n_1}}{n_1(n_1+5)} & \dots & \frac{F(v_1^0, v_m^0)\beta_{n_1}}{n_1(n_1+5)} \\ \frac{F(v_2^0, v_1^0)\beta_{n_2}}{n_2(n_2+5)} & \frac{\lambda n_2^2 + \frac{7}{4}n_2}{n_2(n_2+5)} & \dots & \frac{F(v_2^0, v_m^0)\beta_{n_2}}{n_2(n_2+5)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{F(v_m^0, v_1^0)\beta_{n_m}}{n_m(n_m+5)} & \frac{F(v_m^0, v_2^0)\beta_{n_m}}{n_m(n_m+5)} & \dots & \frac{\lambda n_m^2 + \frac{7}{4}n_m}{n_m(n_m+5)} \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中 n_i 为顶点 v_i 的度.

$$F(v, q) = \begin{cases} 1, & q \text{ 是 } v \text{ 的一领域相邻的顶点,} \\ 3/10, & q \text{ 是 } v \text{ 的一领域面上与 } v \text{ 不相邻的顶点,} \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (5)$$

当 α 取 10/13. $\lambda \in (7/20,1]$ 时. 该迭代过程是收敛的. 证明过程详见附录 A. 当 $k \rightarrow \infty$ 时. $d^k \rightarrow 0$ 即曲面序列 S^k 的极限插值初始网格 M^0 上的所有顶点.

为了方便叙述. 本节介绍的基于形状控制的 Catmull-Clark 细分曲面的渐进迭代插值方法在下文中统一称为改造型 Catmull-Clark 插值细分方法. 下面将给出在改造型 Catmull-Clark 插值细分方法基础上进行的局部渐进迭代插值方法并证明其收敛性.

2 基于形状控制的细分曲面的局部插值方法

上节介绍的改造型 Catmull-Clark 插值细分方法是一种全局渐进插值方法. 本节主要给出相应于该细分方法的局部渐进插值方法. 所谓局部渐进插值即仅移动控制网格顶点集合中的某一子集. 并保持其余顶点不动. 使得最后生成的极限曲面仅插值初始控制网格集合中的某一子集.

给定初始网格 M^0 . 为了区别上一节介绍的改造型 Catmull-Clark 插值细分方法与本节给出的局部插值细分方法. 本节采用不同的顶点集合表示形式. 令 M^0 的顶点集合为 $\{V_0^0, V_1^0, \dots, V_m^0\}$. 假设指标属于集合 $P = \{i_0, i_1, \dots, i_p\}$ 中的顶点在迭代过程中被移动. 称相应的顶点集合 $\{V_{i_0}^0, V_{i_1}^0, \dots, V_{i_p}^0\}$ 为移动顶点子集. 剩余顶点的指标集合记为 $Q = \{j_0, j_1, \dots, j_q\}$. 相应的顶点集合

$\{V_{j_0}^0, V_{i_1}^0, \dots, V_{j_0}^0\}$ 称为不动顶点子集. 其中的顶点在迭代过程中保持位置不变. 这种仅有部分顶点被移动的迭代格式称为局部渐进插值迭代格式.

为了阐述局部渐进插值格式. 需要先给出初始控制网格 M^0 上顶点在细分后所对应的极限位置的表达式. 设 V_i^0 为 M^0 上任一顶点. V_i^0 在改造型 Catmull-Clark 插值细分后在极限曲面 s^0 上都有唯一的顶点 $V_{i,\infty}^0$ 与 V_i^0 对应. $V_{i,\infty}^0$ 就称为 V_i^0 在改造型插值细分后的极限顶点. 由式(2)得到 V_i^0 的极限点公式如下:

$$V_{i,\infty}^0 = \frac{(n_i^2\lambda + \frac{7}{4}n_i)V_i^0 + \beta_{n_i} \sum_k e_{i,k}^0 + \frac{3}{10}\beta_{n_i} \sum_k f_{i,k}^0}{n_i(n_i + 5)}, \quad (6)$$

其中 n_i 为顶点 V_i^0 的度. $\beta_{n_i} = n_i(1-\lambda)10/13+5/2$. $e_{i,k}^0$ 为 V_i^0 一领域内的相邻顶点. $f_{i,k}^0$ 为 V_i^0 一领域面上不相邻顶点.

基于改造型 Catmull-Clark 插值细分曲面的局部渐进迭代过程如下:对于初始控制网格序列 M^0 . 其顶点记为 $V_l^0, l=0,1,\dots,m$. 若 M^k 为 k 次迭代后生成的网格. 其顶点记为 $V_l^k, k=0,1,\dots, l=0,1,\dots,m$. 其中在指标集合 $P = \{i_0, i_1, \dots, i_p\}$ 中的顶点为移动顶点. 在指标集合 $Q = \{j_0, j_1, \dots, j_0\}$ 中的顶点为不动顶点. 为了生成新网格 M^{k+1} . 首先计算 M^k 上每个移动顶点 $V_l^k, l \in P$ 的差向量 D_l^k :

$$D_l^k = V_l^0 - V_{l,\infty}^k. \quad (7)$$

其中 $V_l^0, l \in P$ 为初始控制网格 M^0 上任意一个移动顶点. $V_{l,\infty}^k$ 为经过 k 次迭代后生成的网格 M^k 上对应于 V_l^k 的极限点. 根据式(6)极限点公式得

$$D_l^k = V_l^0 - V_{l,\infty}^k = V_l^0 - \frac{(n_l^2\lambda + \frac{7}{4}n_l)V_l^k + \beta_{n_l} \sum_j e_{l,j}^k + \frac{3}{10}\beta_{n_l} \sum_j f_{l,j}^k}{n_l(n_l + 5)}, \quad (8)$$

其中 n 为顶点 V_l^0 的度. $e_{l,j}^k$ 为 V_l^k 一领域内的相邻点. $f_{l,j}^k$ 为 V_l^k 一领域面上不相邻点.

把 D_l^k 加到 V_l^k 上. 得到新网格 M^{k+1} 上相应的移动顶点 V_l^{k+1} . 即

$$V_l^{k+1} = V_l^k + D_l^k. \quad (9)$$

接着对于每个不动顶点 $V_l^k, l \in Q$. 取 $V_l^{k+1} = V_l^k$. 得新网格 M^{k+1} 上的相应的不动顶点 V_l^{k+1} .

最后按 M^k 的拓扑连接顶点 V_l^{k+1} 得到网格 M^{k+1} .

重复以上过程会得到一系列网格 $M^k (k=1,2,\dots)$. 第 3 节将证明当参数 $\lambda \in (7/20, 1]$ 时. 这个局部渐进迭代过程是收敛的. 即当 k 趋于无穷时. 极限曲面 S^k 插值初始网格 M^0 上的移动顶点. 并推导出不动顶点在 S^k 上的极限位置.

下面将本节给出的基于形状控制的 Catmull-Clark 细分的局部渐进插值方法称为基于形状控制的两步 Catmull-Clark 细分局部渐进插值方法.

3 局部插值收敛性分析

要证明第 2 节给出的基于形状控制的两步 Catmull-Clark 细分局部渐进插值方法的迭代格式是收敛的. 就是要证明当 $k \rightarrow \infty$ 时. 移动顶点对应的差向量 $D_l^k, l \in P = \{i_0, i_1, \dots, i_p\}$ 收敛于 0. 这意味基于本文细分方法的极限曲面插值于初始网格的移动顶点.

移动顶点 $V_l^k, l \in P$ 在每次迭代中需要加上差向量 D_l^k . 不动顶点 $V_l^k, l \in Q$ 在每次迭代过程中保持位置不变. 因此有:

$$V_l^{k+1} = \begin{cases} V_l^k + D_l^k, & \text{当 } V_l^k \text{ 为移动顶点,} \\ V_l^k, & \text{当 } V_l^k \text{ 为不动顶点,} \end{cases} \quad (10)$$

$$e_{l,j}^{k+1} = \begin{cases} e_{l,j}^k + D_{e_{l,j}^k}^k, & \text{当 } e_{l,j}^k \text{ 为移动顶点,} \\ e_{l,j}^k, & \text{当 } e_{l,j}^k \text{ 为不动顶点,} \end{cases} \quad (11)$$

$$f_{l,j}^{k+1} = \begin{cases} f_{l,j}^k + D_{f_{l,j}^k}^k, & \text{当 } f_{l,j}^k \text{ 为移动顶点,} \\ f_{l,j}^k, & \text{当 } f_{l,j}^k \text{ 为不动顶点,} \end{cases} \quad (12)$$

其中 $e_{l,j}^k$ 为 V_l^k 一领域内的相邻点. $f_{l,j}^k$ 为 V_l^k 一领域面上不相邻点.

对于移动顶点. 由式(8)、(10)、(11)、(12)得:

$$D_l^k = V_l^0 - \frac{(n_l^2\lambda + \frac{7}{4}n_l)(V_l^{k-1} + D_l^{k-1})}{n_l(n_l + 5)} - \frac{\beta_{n_l} (\sum_j e_{l,j}^{k-1} + \sum_{j \in P_l} D_{e_{l,j}^{k-1}}^{k-1}) + \frac{3}{10}\beta_{n_l} (\sum_j f_{l,j}^{k-1} + \sum_{j \in P_l} D_{f_{l,j}^{k-1}}^{k-1})}{n_l(n_l + 5)} \quad (13)$$

$$= D_l^{k-1} - \frac{(n_l^2\lambda + \frac{7}{4}n_l)D_l^{k-1} + \beta_{n_l} \sum_{j \in P_l} D_{e_{l,j}^{k-1}}^{k-1} + \frac{3}{10}\beta_{n_l} \sum_{j \in P_l} D_{f_{l,j}^{k-1}}^{k-1}}{n_l(n_l + 5)},$$

其中 P_l 为顶点 V_l^k 一领域面上所有移动顶点的指标集合. 式(13)可以写成矩阵形式:

$$(D_{i_0}^k, D_{i_1}^k, \dots, D_{i_p}^k)^T = (I - \overline{M})(D_{i_0}^{k-1}, D_{i_1}^{k-1}, \dots, D_{i_p}^{k-1})^T = (I - \overline{M})(D_0^0, D_1^0, \dots, D_{i_p}^0)^T, \quad (14)$$

其中 I 为 $(P+1) \times (P+1)$ 阶单位矩阵. \overline{M} 矩阵为:

$$\overline{M} = [m_{ij}]_{(P+1) \times (P+1)} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda n_{i_0}^2 + \frac{7}{4}n_{i_0}}{n_{i_0}(n_{i_0} + 5)} & \frac{G(V_{i_0}^0, V_{i_1}^0)\beta_{n_{i_0}}}{n_{i_0}(n_{i_0} + 5)} & \dots & \frac{G(V_{i_0}^0, V_{i_p}^0)\beta_{n_{i_0}}}{n_{i_0}(n_{i_0} + 5)} \\ \frac{G(V_{i_1}^0, V_{i_0}^0)\beta_{n_{i_1}}}{n_{i_1}(n_{i_1} + 5)} & \frac{\lambda n_{i_1}^2 + \frac{7}{4}n_{i_1}}{n_{i_1}(n_{i_1} + 5)} & \dots & \frac{G(V_{i_1}^0, V_{i_p}^0)\beta_{n_{i_1}}}{n_{i_1}(n_{i_1} + 5)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{G(V_{i_p}^0, V_{i_0}^0)\beta_{n_{i_p}}}{n_{i_p}(n_{i_p} + 5)} & \frac{G(V_{i_p}^0, V_{i_1}^0)\beta_{n_{i_p}}}{n_{i_p}(n_{i_p} + 5)} & \dots & \frac{\lambda n_{i_p}^2 + \frac{7}{4}n_{i_p}}{n_{i_p}(n_{i_p} + 5)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中

$$G(V,W) = \begin{cases} 1, & W \text{ 是移动顶点且与顶点 } V \text{ 相邻,} \\ 3/10, & W \text{ 是移动顶点且为一领域面上与 } V \text{ 不相邻顶点,} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (16)$$

引理 1. 当 $\lambda \in (7/20, 1]$ 时. 矩阵 \bar{M} 具有如下性质:

- (1) $m_{ij} \geq 0$ 且 $\|\bar{M}\|_{\infty} \leq 1$;
- (2) 如果 $m_{ij} = 0$, 那么 $m_{ji} = 0$.

证明:

(1) 因为当 $\lambda \in (7/20, 1]$ 且 $n_i \geq 3$ 时. 显然有 $\beta_{n_i} \geq 0$ 以及 $\lambda n_i^2 + 7n_i/4 > 0$. 所以 $m_{ij} \geq 0$.

因为局部渐进插值方法中. 当矩阵 \bar{M} 的第 i 行对应的所有顶点均为移动顶点时. 类似于全局渐进插值方法的情形. 此时第 i 行元素之和为 1. 当第 i 行对应顶点出现不变定点时. 其对应元素为 0. 则第 i 行元素之和小于 1. 所以 $\|\bar{M}\|_{\infty} \leq 1$.

(2) 因为 m_{ij} 的值表示顶点 V_i 与其一领域面上顶点 V_j 之间的关系. 若 $m_{ij} = 0$. 表示顶点 V_j 不是顶点 V_i 一领域面上的顶点. 同样 V_i 也不是 V_j 一领域面上的顶点. 所以 $m_{ji} = 0$.

矩阵 \bar{M} 可以写成一个对角阵 \bar{C} 和对称阵 \bar{D} 的乘积即 $\bar{M} = \bar{C}\bar{D}$. 其中

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_{n_{i_0}}}{n_{i_0}(n_{i_0}+5)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\beta_{n_{i_1}}}{n_{i_1}(n_{i_1}+5)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\beta_{n_{i_p}}}{n_{i_p}(n_{i_p}+5)} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda n_{i_0}^2 + 7n_{i_0}/4}{\beta_{n_{i_0}}} & G(V_{i_0}^0, V_{i_1}^0) & \dots & G(V_{i_0}^0, V_{i_p}^0) \\ G(V_{i_1}^0, V_{i_0}^0) & \frac{\lambda n_{i_1}^2 + 7n_{i_1}/4}{\beta_{n_{i_1}}} & \dots & G(V_{i_1}^0, V_{i_p}^0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G(V_{i_p}^0, V_{i_0}^0) & G(V_{i_p}^0, V_{i_1}^0) & \dots & \frac{\lambda n_{i_p}^2 + 7n_{i_p}/4}{\beta_{n_{i_p}}} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

当 $\lambda \in (7/20, 1]$ 时. 显然矩阵 \bar{C} 和 \bar{D} 分别为对称正定矩阵 C 和 D 的主子矩阵. 矩阵 C 和 D 的表示详见附录 A. 因此矩阵 \bar{C} 和 \bar{D} 均为正定矩阵.

引理 2. 两个正定矩阵相乘得到的矩阵的特征值为正^[22].

定理 1. 当 $\lambda \in (7/20, 1]$ 时. 基于形状控制的两步 Catmull-Clark 细分的局部渐进插值方法的迭代格式是收敛的.

证明:

由引理 1 知. $\|\bar{M}\|_{\infty} \leq 1$. 所以 \bar{M} 的特征值 $\lambda(\bar{M}) \leq 1$. 由于 $\bar{M} = \bar{C}\bar{D}$. 于是根据引理 2 有 $\lambda(\bar{M}) > 0$. 从而矩阵 \bar{M}

的特征值满足 $0 < \lambda(\bar{M}) \leq 1$. 由此可得 $0 \leq \lambda(I - \bar{M}) < 1$. 因此当 $k \rightarrow \infty$ 时. $D_l^k \rightarrow 0$. $l \in P = \{i_0, i_1, \dots, i_p\}$. 即迭代式(14)收敛于 0. 这意味着基于形状控制的两步 Catmull-Clark 细分局部渐进插值方法所得到的极限曲面插值于初始网格中相应的移动顶点 $V_l^0, l \in \{i_0, i_1, \dots, i_p\}$.

下面将推导不动顶点在极限曲面上的位置. 设顶点 $V_l^0, l \in Q = \{i_0, i_1, \dots, i_Q\}$ 为初始控制网格 M^0 上的不动顶点. 为了得到第 $k+1$ 次迭代后生成的网格 M^{k+1} . 在式(13)中已经计算了移动顶点 $V_l^k, l \in P$ 的差向量 D_l^k . 类似的不动顶点 $V_l^k, l \in Q$ 的差向量可表示为:

$$D_l^k = V_l^0 - V_l^k = V_l^0 - \frac{(n_l^2 \lambda + \frac{7}{4})V_l^k + \beta_{n_l} \sum_j e_{l,j}^k + \frac{3}{10} \beta_{n_l} \sum_j f_{l,j}^k}{n_l(n_l + 5)}$$

$$= V_l^0 - \frac{(n_l^2 \lambda + \frac{7}{4})V_l^{k-1} + \beta_{n_l} (\sum_j e_{l,j}^{k-1} + \sum_{i \in P_l} D_{i,j}^{k-1})}{n_l(n_l + 5)}$$

$$= \frac{\frac{3}{10} \beta_{n_l} (\sum_j f_{l,j}^{k-1} + \sum_{i \in P_l} D_{i,j}^{k-1})}{n_l(n_l + 5)} = D_l^{k-1} - \frac{\beta_{n_l} \sum_{i \in P_l} D_{i,j}^{k-1} + \frac{3}{10} \beta_{n_l} \sum_{i \in P_l} D_{i,j}^{k-1}}{n_l(n_l + 5)}, \quad (19)$$

其中 P_l 为顶点 V_l^k 一领域面上所有移动顶点的指标集合.

记 $D_Q^k = [D_{i_0}^k, D_{i_1}^k, \dots, D_{i_Q}^k]^T$. 有关于不动顶点对应的差向量序列 D_Q^k 的极限有如下定理.

定理 2. 差向量 $D_Q^k, l \in Q$ 的极限为 $D_Q^\infty = D_Q^0 - E\bar{M}^{-1}D_P^0$.

其中 $D_P^0 = [D_{i_0}^0, D_{i_1}^0, \dots, D_{i_p}^0]^T$. \bar{M} 如式(15)所示.

$$E = [e_{ij}]_{(Q+1) \times (P+1)} = \begin{bmatrix} \frac{G(V_{i_0}^0, V_{j_0}^0) \beta_{n_{j_0}}}{n_{j_0}(n_{j_0}+5)} & \frac{G(V_{i_0}^0, V_{j_1}^0) \beta_{n_{j_1}}}{n_{j_1}(n_{j_1}+5)} & \dots & \frac{G(V_{i_0}^0, V_{j_p}^0) \beta_{n_{j_p}}}{n_{j_p}(n_{j_p}+5)} \\ \frac{G(V_{i_1}^0, V_{j_0}^0) \beta_{n_{j_0}}}{n_{j_0}(n_{j_0}+5)} & \frac{G(V_{i_1}^0, V_{j_1}^0) \beta_{n_{j_1}}}{n_{j_1}(n_{j_1}+5)} & \dots & \frac{G(V_{i_1}^0, V_{j_p}^0) \beta_{n_{j_p}}}{n_{j_p}(n_{j_p}+5)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{G(V_{i_p}^0, V_{j_0}^0) \beta_{n_{j_0}}}{n_{j_0}(n_{j_0}+5)} & \frac{G(V_{i_p}^0, V_{j_1}^0) \beta_{n_{j_1}}}{n_{j_1}(n_{j_1}+5)} & \dots & \frac{G(V_{i_p}^0, V_{j_p}^0) \beta_{n_{j_p}}}{n_{j_p}(n_{j_p}+5)} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

其中 $G(V,W)$ 如式(16)所示.

证明:

基于式(19). 差向量 D_Q^k 的迭代格式的矩阵形式:

$$D_Q^{k+1} = D_Q^k + E D_P^k = D_Q^0 + E \sum_{i=0}^k D_P^i. \quad (21)$$

由式子(14). $D_P^k = (I - \bar{M})D_P^{k-1}$, 以及 $\rho(I - \bar{M}) < 1$, 有:

$$D_Q^\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} D_Q^{k+1} = D_Q^0 + \lim_{k \rightarrow \infty} E \sum_{i=0}^k D_P^i$$

$$= D_Q^0 + \lim_{k \rightarrow \infty} E \sum_{i=0}^k (I - \bar{M})^i D_P^0$$

$$= D_Q^0 + \lim_{k \rightarrow \infty} E (I - (I - \bar{M})^{k+1}) \bar{M}^{-1} D_P^0$$

$$= D_Q^0 + E \bar{M}^{-1} D_P^0.$$

4 实验结果与分析

本文利用 Visual Studio 2012 和 CSGL 实现了基于形状控制的两步 Catmull-Clark 细分局部渐进插值算法. 形状控制参数 λ 在各个顶点可以取 $(7/20, 1]$ 之间不同的值. 这里为了方便在以下各例子中的各个顶点处参数值都取 $\lambda = 0.5$. 本文给出了 2 个四边形网格模型的例子. 其中标记红色的顶点为初始网格对应的顶点. 红色箭头所指初始网格顶点为设定为局部插值的顶点.

例 1 为十字形网格, 实验结果见图 1. 图 1(a) 为初始控制网格, 图 1(b)、(c)、(d) 分别为传统 Catmull-Clark 细分 1 次, 2 次, 3 次后生成的曲面, 图 1(e)、(f)、(g) 分别为在参数值取 0.5 时 1 次, 2 次, 3 次局部渐进迭代细

分生成的曲面, 图(h) 为改造型 Catmull-Clark 插值细分方法生成的曲面, 从图中可以看出局部渐进插值的方法较好地实现了局部顶点的插值. 此外通过对不同顶点取不同的参数值可以增加曲面造型的自由度.

例 2 为圆环形网格, 实验结果如图 2 所示, 从图中可以看出被设定为局部插值的顶点在细分迭代过程中较好的实现了局部插值, 同样验证了基于形状控制的两步 Catmull-Clark 细分曲面局部渐进插值的有效性.

综合实验来看, 本文提出的一种基于形状控制的两步 Catmull-Clark 细分的局部渐进插值方法是可行的, 而且算法比较简单, 迭代次数较少.

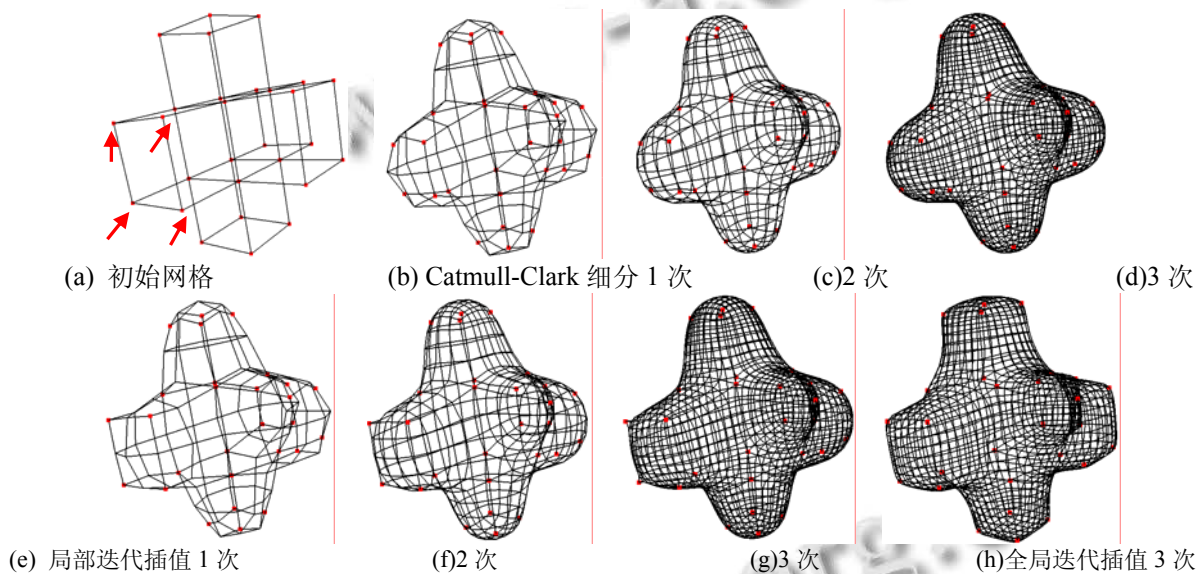


图 1 基于 Catmull-Clark 细分局部渐进迭代方法($\lambda = 0.5$, 十字形)

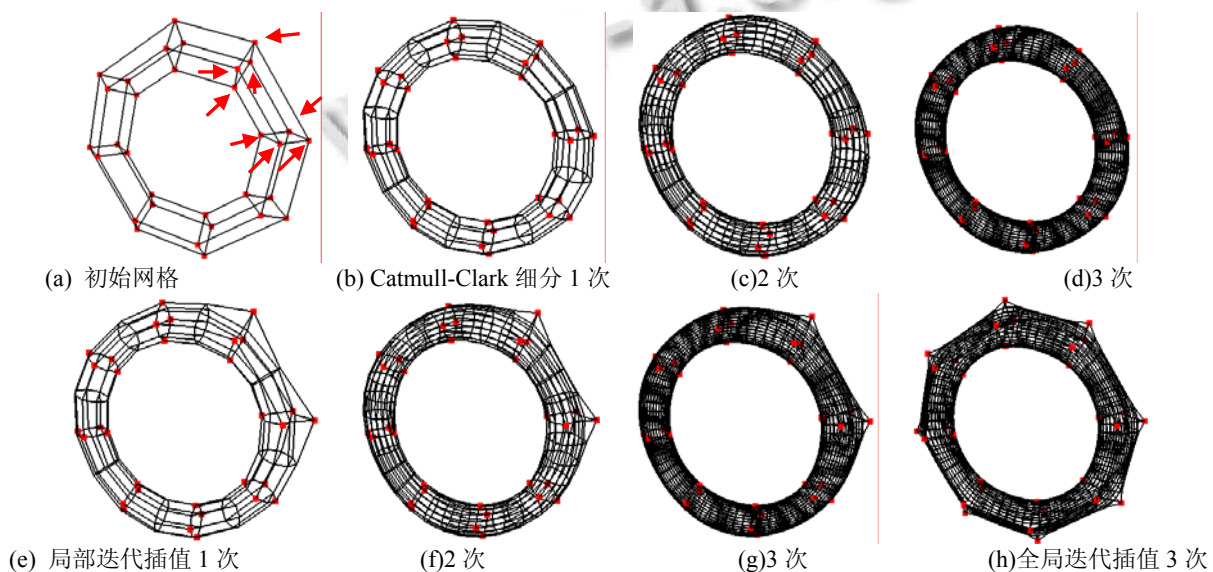


图 2 基于 Catmull-Clark 细分局部渐进迭代方法($\lambda = 0.5$, 圆环形)

5 结语

本文提出了一种基于形状控制的两步 Catmull-Clark 细分局部渐进插值方法,该方法通过改造的 Catmull-Clark 细分规则实现对 Catmull-Clark 细分生成曲面的局部插值,引入参数值实现对局部插值曲面的形状控制,并证明了该方法收敛性。该方法同时具有形状调整和局部插值两个特性,丰富了细分曲面造型的形状控制方法。另外本文的方法目前仅考虑在闭合的四边形网格的情况,因此可以继续研究该方法在开四边形网格上的应用。

参考文献

- 1 李桂清. 细分曲面造型及应用[博士学位论文]. 北京: 中国科学院计算技术研究所, 2001.
- 2 Schroder ZD. Subdivision for modeling and animation. Course Notes of SIGGRAPH 2000. ACM SIGGRAPH, 2000.
- 3 Catmull E, Clark J. Recursively generated B-spline surface on arbitrary topological meshes. *Comput Aid Des*, 1978, 6(10):350-355.
- 4 Loop C. Smooth subdivision surfaces based on triangles [Master Thesis]. Utah: Utah University, 1987.
- 5 Dyn N, Levin D, Gregory JA. A butterfly subdivision scheme for surface interpolatory with tension control. *ACM Trans. Graph*, 1990, 9(2): 160-169.
- 6 Zorin D, Schroder P, Sweldens W. Interpolating subdivision for meshes with arbitrary topology. *Computer Graphics (Annual Conference Series)*, 1996, 30: 189-192.
- 7 Kobbelt L. Interpolatory subdivision on open quadrilateral nets with arbitrary topology. *Computer Graphics Forum (Proc. of EUROGRAPHICS)*, 1996, 5(3): 409-420.
- 8 林淑金. 插值逼近融合的曲面造型方法研究与应用[博士学位论文]. 广州: 中山大学, 2008.
- 9 Hoppe H, DeRose T, Duchamp M, et al. Piecewise smooth surface reconstruction. *Computer Graphics (SIGGRAPH'94 Proc.)*, 1994, 28: 295-302.
- 10 Nasri A. Polyhedral subdivision methods for free-form surfaces. *ACM Trans. Graph*, 1987, 1(6): 29-73.
- 11 Brunet P. Including shape handles in recursive subdivision surfaces. *Comput Aid Geom Des*, 1988, 5(1): 41-50.
- 12 Halstead M, Kass M, DeRose T. Efficient, fair interpolation using Catmull-Clark surface. *Computer Graphics (SIGGRAPH 1993 Proc.)*, 1993, 27: 35-44.
- 13 Zheng J, Cai Y. Interpolation over arbitrary topology meshes using a two phase subdivision scheme. *IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics*, 2006, 12(3): 301-310.
- 14 Chen Z, Luo X, Tan L, Ye B, Chen J. Progressive interpolation based on Catmull-Clark subdivision surfaces. *Computer Graphics Forum*, 2008, 27(7): 1823-1827.
- 15 Cheng FH, Fan FT, Lai SH, et al. Loop subdivision surface based progressive interpolation. *Journal of Computer Science and Technology*, 2009, 24(1): 39-46.
- 16 Maekawa T, Matsumoto Y, Namiki K. Interpolation by geometric algorithm. *Computer-Aided Design*, 2007, 39(4): 313-323.
- 17 Fan FT, Cheng FH, Lai SH. Subdivision based interpolation with shape control. *Computer-Aided Design and Applications*, 2008, 5(1-4): 539-547.
- 18 林传奎, 潘日晶. 一种基于 Catmull-Clark 细分的渐进插值方法. *福建师范大学学报(自然科学版)*, 2015, 31(1).
- 19 Lin H. Local progressive-iterative approximation format for blending curves and patches. *Computer Aided Geometric Design*, 2010, 27(4): 322-339.
- 20 赵宇, 蔺宏伟, 鲍虎军. 细分曲面拟合的局部渐进插值方法. *计算机研究与发展*, 2012, 49(8): 1699-1707.
- 21 林晓晶, 潘日晶. 一种基于 Loop 细分的渐进插值方法. *福建师范大学学报(自然科学版)*, 2014, (1).
- 22 陈祖明, 周家胜. 矩阵引用论. 北京: 航空航天大学出版社, 1998.