

时序数据趋势项的分段拟合^①

黄雄波

(佛山职业技术学院 电子信息系, 佛山 528137)

摘要: 在时序数据的建模与分析过程中, 趋势项往往是选用单一形式的函数来进行拟合的, 这对于长时序数据而言, 其拟合精度难以提高. 为此, 设计实现了一种分段拟合算法, 该算法通过计算时序数据的各阶趋势导数, 有效地把被拟合的时序数据划分成多个不同模式的子序列, 在此基础上, 选用合适的拟合函数对各个子序列的趋势项进行拟合, 并基于最小二乘法求出相应的拟合参数向量. 实验验证了算法的有效性和先进性.

关键词: 时序数据; 趋势项; 分段拟合; 趋势导数; 最小二乘法

Piecewise Fitting of Trend Component from Timing Data

HUANG Xiong-Bo

(Department of Electronic and Information Engineering, Foshan Professional Technical College, Foshan 528137, China)

Abstract: Trend components often choose single form functions for fitting in the process of timing data modeling and analysis. Therefore, the fitting accuracy is difficult to improve for long timing data. As regard to this important problem, a piecewise fitting algorithm is implemented. Through the calculation of each order derivative of the timing data, the algorithm effectively divides the fitted timing data into a number of different patterns of subsequence. On this basis, corresponding fitting functions are chosen to fit each subsequence trend components respectively. Test results show that the new algorithm is feasible and effective.

Key words: timing data; trend component; piecewise fitting; trend derivative; least square method

在工程、科学实验和日常生活等各种领域中, 经常可以测取到一系列等时间间隔的数据, 一般地, 把这些按照时间次序排列的被观测数据称为时间序列或时序数据. 表面上看来, 时序数据是杂论无章的, 即具有一定的随机性, 但在整体上它们却往往具有某种增长或下降的趋势, 有时还呈现出周期性变化的现象. 据此, 时序数据可视为由随机、趋势和周期三种成分通过线性(加性模型)或非线性(乘性模型)组合而成^[1].

如何对已测取的时序数据进行建模与分析, 以便更好地找出事物在发展过程中所蕴含的变化规律, 这是时序数据分析的重点研究内容. 注意到现有的时序数据的趋势项主要是采用单一函数来进行拟合^[2-4], 这对于长时序数据而言, 不仅有失合理性, 而且拟合的

误差较大. 为此, 本文提出了一种分段拟合的建模算法, 并就算法的设计原理及设计过程进行了深入的分析 and 讨论.

1 相关基础知识

1.1 时序数据常用的趋势拟合函数

时序数据趋势项通常可用多项式函数来进行拟合, 注意到有相当一部分的自然现象其趋势过程是遵循着指数或龚泊兹(Gompertz)等函数在变化, 为了提高拟合精度和减少拟合所需的计算量, 这里引入了 4 种常见的时序数据趋势拟合函数^[5]:

1) 多项式函数, 其函数表达式为 $T_t = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m$, ($a_m \neq 0$);

① 基金项目:佛山职业技术学院校级重点科研课题(2011KY006)

收稿时间:2014-05-25;收到修改稿时间:2014-07-30

2)指数函数,其函数表达式为

$$T_t = ab^t, (a, b > 0, b \neq 1);$$

3)龚泊兹(Gompertz)函数,其函数表达式为

$$T_t = ka^{b^t}, (k > 0, 0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1)$$

4)逻辑函数,其函数表达式为

$$T_t = \frac{1}{k + ab^t}, (k > 0, a > 0, 0 < b \neq 1).$$

以上函数表达式中, $t = 0, 1, \dots, n$ 为时序数据的时刻序号; T_t 为时序数据 Y_t 在去掉随机项和周期项后剩余的 trend 项, 而随机项和周期项的估计与消除则可参阅文献[6-9].

1.2 时序数据的趋势导数

定义 1. 设 T_t 为某一时序数据 Y_t 的趋势项,

$$T'_t = \frac{\sum_{i=-p}^p iT_{t+i}}{\sum_{i=-p}^p i^2}, (p \in N, p \geq 1; p < t < n - p), \text{ 则称 } T'_t \text{ 为}$$

T_t 的趋势导数.

T'_t 中的 p 值决定了趋势导数的计算精度, 通常, p 值越少, 趋势导数的计算精度就越高.

对定义 1 进行推广, 便可得到趋势项 T_t 的高阶趋势导数的定义.

定义 2. 设 $T_t^{(k)}$ 是时序数据趋势项 T_t 的

$$k(k \in N, k \geq 0) \text{ 阶趋势导数, } T_t^{(k+1)} = \frac{\sum_{i=-p}^p iT_{t+i}^{(k)}}{\sum_{i=-p}^p i^2}, \text{ 则称}$$

$T_t^{(k+1)}$ 为 T_t 的 $k+1$ 阶趋势导数.

由于各种趋势拟合函数的导函数互不相同, 故可利用上述的定义计算出趋势导数 T'_t , 进一步, 比对相邻的趋势导数便可实现时间序列的子序列划分以及拟合函数的类型选定.

定义 3. 设 $T_t^{(k)}$ 是时序数据趋势项 T_t 的 k 阶趋势导数, 给定 $v(v \in R, 0 < v \leq 1)$ 和任意初等函数 f_1, f_2 , 当 $|f_1(T_t^{(k)}) - f_1(T_{t+u}^{(k)})| \leq (1-v) \cdot f_2(t), (u \in N, u > 1)$ 成立时, 认为 $f_1(T_t^{(k)}) \equiv f_1(T_{t+u}^{(k)})$, 则称 v 为 k 阶趋势导数 $T_t^{(k)}$ 经过 f_1 函数变换后具有 f_2 函数的相似度.

定义 3 中, 引入相似度 v 的目的是为了减少时序数据自身的噪音和干扰对趋势导数聚类划分的影响.

例子 1. 设 T'_t 为某一时序数据的的一阶趋势导

数, 试分析 f_1, f_2 均为恒等变换(即 $f_1 = f_2 \stackrel{def}{=} 1$)、相似度 v 为 95% 时 T'_t 的聚类划分标准.

按照定义 3 的规定, 有,

$$|1 \bullet (T'_t) - 1 \bullet (T'_{t+u})| \leq (1-95\%) \bullet 1 \bullet (T'_t),$$

整理后, 有:

$$|(T'_t) - (T'_{t+u})| \leq 5\% \bullet (T'_t).$$

故得到如下的聚类划分标准, 若 T_t 某两期趋势导数的绝对值偏差在 5% 以内, 我们就认为这两期的趋势导数是相等的, 即把它们划分为同一模式的子序列.

1.3 趋势拟合的最小二乘法求解

定义 4. 若 $T_t, f_t, (t = 0, 1, \dots, n)$ 分别为时序数据的趋势项和趋势拟合函数, 则把 $J = \|\delta\|_2^2 = \sum_{t=0}^n [T_t - f_t]^2 = \min$ 称为趋势拟合的最小二乘问题.

设 $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m]^T$ 为趋势拟合函数 f_t 的拟合参数向量, 为了使定义 4 的 J 达到最小, 则有^[10],

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial \beta_1} = \frac{\partial \sum_{t=0}^n [T_t - f_t]^2}{\partial \beta_1} = 2 \sum_{t=0}^n [T_t - f_t] \frac{\partial f_t}{\partial \beta_1} = 0; \\ \dots \\ \frac{\partial J}{\partial \beta_m} = \frac{\partial \sum_{t=0}^n [T_t - f_t]^2}{\partial \beta_m} = 2 \sum_{t=0}^n [T_t - f_t] \frac{\partial f_t}{\partial \beta_m} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

于是, 求解式(1)的 m 阶线性方程组便可求出趋势拟合函数 f_t 的拟合参数向量 $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m]^T$.

例子 2. 用 $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ 二次多项式对某一时序数据的趋势项 T_t 进行拟合, 试用最小二乘法求出该二次多项式的拟合参数向量 $[a_0, a_1, a_2]^T$.

依照式(1), 有,

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial a_0} = \frac{\partial \sum_{t=0}^n [T_t - (a_0 + a_1 t + a_2 t^2)]^2}{\partial a_0} = 0; \\ \frac{\partial J}{\partial a_1} = \frac{\partial \sum_{t=0}^n [T_t - (a_0 + a_1 t + a_2 t^2)]^2}{\partial a_1} = 0; \\ \frac{\partial J}{\partial a_2} = \frac{\partial \sum_{t=0}^n [T_t - (a_0 + a_1 t + a_2 t^2)]^2}{\partial a_2} = 0. \end{cases}$$

整理后,有:

$$\begin{cases} \sum_{t=0}^n \langle [T_t - (\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2)] \rangle = 0; \\ \sum_{t=0}^n \langle [T_t - (\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2)]^2 \rangle = 0; \\ \sum_{t=0}^n \langle [T_t - (\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2)]^2 \rangle = 0. \end{cases} \quad (2)$$

把趋势项 T_1, T_2, \dots, T_n 和时刻序号 $t = 0, 1, \dots, n$ 代入式(2)中, 得到一个三元线性方程组, 求解该方程组便可得出拟合参数向量 $[a_0, a_1, a_2]^T$.

2 算法设计

2.1 算法的设计原理

对多项式、指数、龚泊兹以及逻辑等趋势拟合函数进行求导及相关的变换运算, 有:

$$\begin{cases} \frac{d(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_m t^m)}{dt} = a_1 + 2a_2 t + \dots + m a_m t^{m-1}; \\ \frac{d(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_m t^m)^{(n)}}{dt} = n! a_n + (n+1)! a_{n+1} t + \dots + \frac{m!}{(m-n)!} a_m t^{m-n}, m > n; \\ \frac{d(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_m t^m)^{(m)}}{dt} = m! a_m. \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{d(ab^t)}{dt} = ab^t \ln b; \\ \frac{d(ab^t)}{ab^t dt} = \frac{ab^t \ln b}{ab^t} = \ln b. \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{d(ka^{b^t})}{dt} = (ka^{b^t} \ln a) d(b^t) = (ka^{b^t} \ln a)(b^t \ln b); \\ \ln \left| \frac{d(ka^{b^t})}{ka^{b^t} dt} \right| = \ln \left| \frac{(ka^{b^t} \ln a)(b^t \ln b)}{ka^{b^t}} \right| = \ln |b^t \ln a \ln b| \\ = t \ln b + \ln |\ln a \ln b|. \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{d(\frac{1}{k+ab^t})}{dt} = -\frac{1}{(k+ab^t)^2} ab^t \ln b; \\ \ln \left| \frac{d(\frac{1}{k+ab^t})}{(\frac{1}{k+ab^t})^2 dt} \right| = \ln \left| \frac{-\frac{1}{(k+ab^t)^2} ab^t \ln b}{(\frac{1}{k+ab^t})^2} \right| = \ln |-ab^t \ln b| \\ = t \ln b + \ln |a \ln b|. \end{cases} \quad (6)$$

从式(3)~ 式(6)的运算结果易知如下结论:

1)具有多项式趋势的时序数据其 m 阶(m 为该多

项式的最高阶)趋势导数 $T_t^{(m)}$ 为一常数;

2)具有指数趋势的时序数据其趋势导数 T_t' 与时序数据趋势项 T_t 之比为为一常数;

3)具有龚泊兹趋势的时序数据其趋势导数 T_t' 与时序数据趋势项 T_t 之比的绝对值的自然对数与时间序号 t 呈线性关系;

4)具有逻辑趋势的时序数据其趋势导数 T_t' 与时序数据趋势项 T_t 平方之比的绝对值的自然对数与时间序号 t 呈线性关系.

特别指出的是, 当某子序列的趋势类型被确定为高阶多项式函数时, 还应进行龙格(Runge)现象的检测及消除. 所谓龙格现象指的就是随着多项式拟合函数的阶数 m 的不断增加, 在被拟合的端点处产生极大的拟合误差和抖动^[1]. 龙格现象是由高阶多项式函数的舍入误差所导致的, 因而对产生龙格现象的高阶多项式子序列而言, 其拟合的两端应用低次多项式进行拟合.

2.2 算法的框图

综上所述, 可得到如下的时序数据趋势项的分段拟合算法: 按照给定的计算精度 p 的要求, 首先计算出趋势项 T_t 的一阶趋势导数 T_t' , 然后按照给定的趋势导数相似度 v 遍历比对各期的趋势导数 T_t' , 并运用式(3)~式(6)的结论对相邻的各期时序数据进行聚类划分; 在此基础上, 确定对应的拟合函数类型, 最后基于最小二乘原理对各个子序列进行拟合参数的求解. 具体的算法流程图如图 1 所示.

3 实验及结果分析

为了验证新算法的有效性及其先进性, 这里将对表 1 的广东省历年职工平均工资数据分别进行分段拟合及三次样条插值拟合的实验, 并对相关实验结果进行比较分析.

3.1 分段拟合实验

1)计算趋势导数

以计算精度 $p = 1$ 求解表 1 中时序数据的一阶趋势导数, 限于篇幅, 这里只给出与本例聚类划分相关的 T_t' (表 2) 和 $\frac{T_t'}{T_t}$ (表 3).

2)完成聚类划分

遍历比对表 2 和表 3 的相邻数值, 并以 70% 的相似度对时序数据进行聚类划分. 从表 2 中可知, 由于

T_4' 与 T_5', T_6' 的绝对值差均在 30% 以内, 故可把 1984~1986 年的时序数据划分为直线趋势子序列; 从表 3 中可知, 由于 $\frac{T_2'}{T_2}, \frac{T_3'}{T_3}$ 与 $\frac{T_1'}{T_1}$ 的绝对值差均在 30% 以内, 因而可把 1980~1983 年的时序数据划分为指数趋势子序列, 同理, 也可把 1997~2011 年的时序数据划

分为另一指数趋势子序; 由于 1987~1996 年的时序数据在一阶趋势导数下未能完成聚类划分, 因而需要用 k 阶多项式来进行拟合, 经算法迭代计算后得到 $k = 4$. 于是, 可把表 1 的时序数据划分为 $\{1980-1983\}, \{1984-1986\}, \{1987-1996\}, \{1997-2011\}$ 4 个子序列的组合.

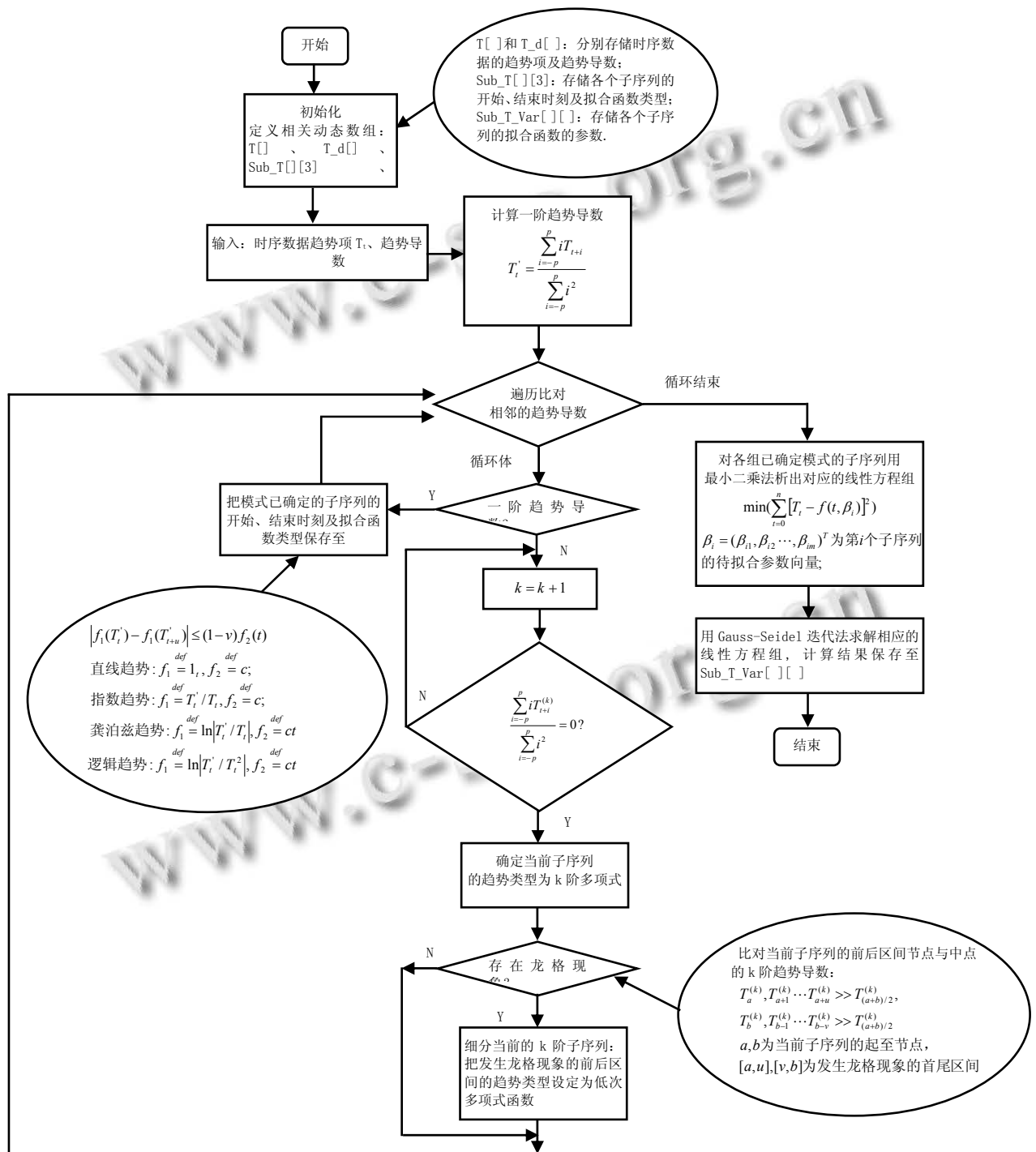


图 1 时序数据趋势项的分段拟合算法流程图

表 1 1980~2011 年广东省职工平均工资数据

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 年份(年) | 1980 | 1981 | 1982 | 1983 | 1984 | 1985 | 1986 | 1987 | 1988 | 1989 | 1990 | 1991 | 1992 | 1993 | 1994 | 1995 |
| 平均工资(元) | 776 | 854 | 937 | 992 | 1153 | 1347 | 1495 | 1681 | 2250 | 2678 | 2929 | 3358 | 4027 | 5322 | 7117 | 8250 |
| 年份(年) | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2004 | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 |
| 平均工资(元) | 9127 | 9698 | 11032 | 12245 | 13823 | 15682 | 17814 | 19986 | 22116 | 23959 | 26186 | 29443 | 33110 | 36355 | 40358 | 45152 |

表 2 表 1 时序数据对应的一阶趋势导数(T'_t)

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| T'_0 | T'_1 | T'_2 | T'_3 | T'_4 | T'_5 | T'_6 | T'_7 | T'_8 | T'_9 | T'_{10} | T'_{11} | T'_{12} | T'_{13} | T'_{14} | T'_{15} |
| — | 80.5 | 69.0 | 108.0 | 177 | 171 | 167 | 377.5 | 498.5 | 339.5 | 340.0 | 549.0 | 982.0 | 1545.0 | 1464.0 | 1005.0 |
| T'_{16} | T'_{17} | T'_{18} | T'_{19} | T'_{20} | T'_{21} | T'_{22} | T'_{23} | T'_{24} | T'_{25} | T'_{26} | T'_{27} | T'_{28} | T'_{29} | T'_{30} | T'_{31} |
| 724.0 | 952.5 | 1273.5 | 1395.5 | 1718.5 | 1995.5 | 2152.0 | 2151.0 | 1986.5 | 2035.0 | 2742.0 | 3462.0 | 3456.0 | 3624.0 | 4398.5 | — |

表 3 表 1 时序数据对应的趋势导数比($\frac{T'_t}{T_t}$)

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| $\frac{T'_0}{T_0}$ | $\frac{T'_1}{T_1}$ | $\frac{T'_2}{T_2}$ | $\frac{T'_3}{T_3}$ | $\frac{T'_4}{T_4}$ | $\frac{T'_5}{T_5}$ | $\frac{T'_6}{T_6}$ | $\frac{T'_7}{T_7}$ | $\frac{T'_8}{T_8}$ | $\frac{T'_9}{T_9}$ | $\frac{T'_{10}}{T_{10}}$ | $\frac{T'_{11}}{T_{11}}$ | $\frac{T'_{12}}{T_{12}}$ | $\frac{T'_{13}}{T_{13}}$ | $\frac{T'_{14}}{T_{14}}$ | $\frac{T'_{15}}{T_{15}}$ |
| — | 0.09 | 0.07 | 0.11 | 0.15 | 0.13 | 0.11 | 0.22 | 0.22 | 0.13 | 0.12 | 0.16 | 0.24 | 0.29 | 0.21 | 0.12 |
| $\frac{T'_{16}}{T_{16}}$ | $\frac{T'_{17}}{T_{17}}$ | $\frac{T'_{18}}{T_{18}}$ | $\frac{T'_{19}}{T_{19}}$ | $\frac{T'_{20}}{T_{20}}$ | $\frac{T'_{21}}{T_{21}}$ | $\frac{T'_{22}}{T_{22}}$ | $\frac{T'_{23}}{T_{23}}$ | $\frac{T'_{24}}{T_{24}}$ | $\frac{T'_{25}}{T_{25}}$ | $\frac{T'_{26}}{T_{26}}$ | $\frac{T'_{27}}{T_{27}}$ | $\frac{T'_{28}}{T_{28}}$ | $\frac{T'_{29}}{T_{29}}$ | $\frac{T'_{30}}{T_{30}}$ | $\frac{T'_{31}}{T_{31}}$ |
| 0.08 | 0.10 | 0.12 | 0.11 | 0.12 | 0.13 | 0.12 | 0.11 | 0.09 | 0.08 | 0.10 | 0.12 | 0.10 | 0.10 | 0.11 | — |

3)求解子序列的拟合参数

基于最小二乘法求解上述聚类划分所得的 4 个子序列的拟合参数,有:

$$\begin{cases} f_1(t) = 720e^{0.0829t}, \forall T_t \in [1980-1983]; \\ f_2(t) = 171t + 989.67, \forall T_t \in [1984-1986]; \\ f_3(t) = -6.5979x^4 + 143.44x^3 - 951.49x^2 + 2708.4x - 265, \forall T_t \in [1987-1996]; \\ f_4(t) = 8980e^{0.11t}, \forall T_t \in [1997-2011]. \end{cases} \quad (7)$$

4)拟合结果

计算均方标准误差 \sqrt{MSE} 和平均绝对百分误差 $MAPE$, 而图 2 则是新算法的拟合效果图。

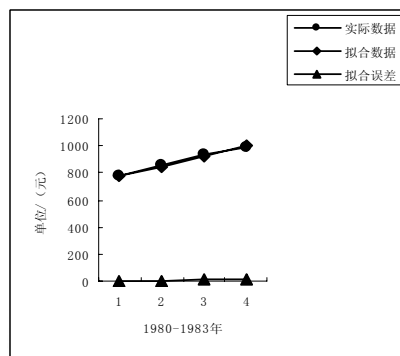
均方标准误差 \sqrt{MSE} 为:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n e_t^2 = \frac{1}{32} \left(\sum_{t=1}^4 |T_t - f_1(t)|^2 \Big|_{T_t \in [1980-1983]} + \sum_{t=1}^3 |T_t - f_2(t)|^2 \Big|_{T_t \in [1984-1986]} + \sum_{t=1}^{10} |T_t - f_3(t)|^2 \Big|_{T_t \in [1987-1996]} + \sum_{t=1}^{15} |T_t - f_4(t)|^2 \Big|_{T_t \in [1997-2011]} \right) \approx 102929.62$$

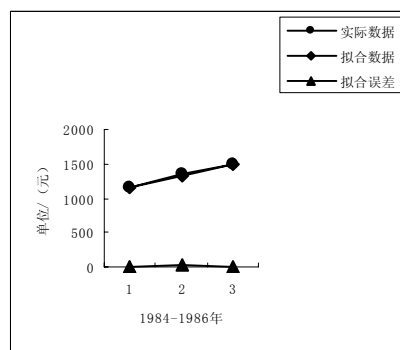
故 $\sqrt{MSE} = \sqrt{102929.62} \approx 320.83$.

平均绝对百分误差 $MAPE$ 为:

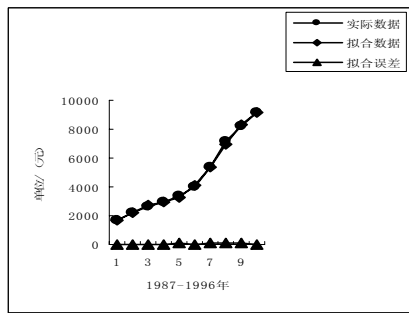
$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \frac{|e_t|}{T_t} = \frac{1}{32} \left(\sum_{t=1}^4 \frac{|T_t - f_1(t)|}{T_t} \Big|_{T_t \in [1980-1983]} + \sum_{t=1}^3 \frac{|T_t - f_2(t)|}{T_t} \Big|_{T_t \in [1984-1986]} + \sum_{t=1}^{10} \frac{|T_t - f_3(t)|}{T_t} \Big|_{T_t \in [1987-1996]} + \sum_{t=1}^{15} \frac{|T_t - f_4(t)|}{T_t} \Big|_{T_t \in [1997-2011]} \right) \approx 1.38\%$$



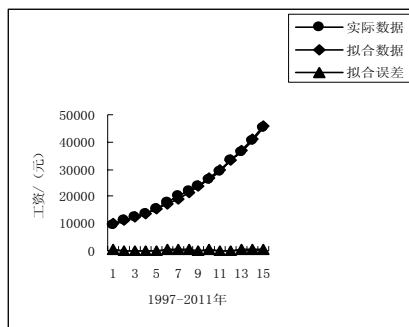
(a) $f_1(t)$



(b) $f_2(t)$



(c) $f_3(t)$



(d) $f_4(t)$

图 2 广东省 1980 年至 2011 年的职工平均工资数据及其分段拟合曲线

3.2 三次样条插值的实验

利用三次样条插值法对表 1 的时序数据进行数值逼近^[12], 相关的实验结果如下:

拟合函数为,

$$\begin{cases} S_1(t) = 0.6809t^3 + 9.8587t^2 + 4.7805t + 782.88, \forall T, \in [1980-1990]; \\ S_2(t) = 9.2982t^3 - 168.8409t^2 + 1848.2788t + 1296.8001, \forall T, \in [1991-2001]; \\ S_3(t) = 14.3035t^3 + 48.0082t^2 + 1669.0201t + 16283.5011, \forall T, \in [2002-2011]. \end{cases} \quad (8)$$

对应的均方标准误差 $\sqrt{MSE} \approx 1860.8126$, 平均绝对百分误差 $MAPE \approx 6.13\%$, 而拟合的效果图则如图 3 所示.

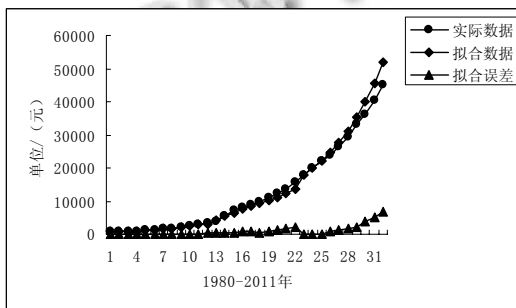


图 3 广东省 1980 年至 2011 年的职工平均工资数据及其三次样条插值拟合曲线

从均方标准误差 \sqrt{MSE} 、平均绝对百分误差的计算结果以及对比图 2 和图 3 的拟合效果可知, 新算法比三次样条插值法在拟合精度上有了显著的提升.

4 结语

设计实现了一种时序数据趋势项的分段拟合算法, 实验结果验证了新算法的有效性和先进性. 下一步的主要工作有, 引入模糊聚类分析方法进行更为合理的子序列划分、研究更为有效的线性方程组迭代求解法, 以便进一步提升分段拟合算法的拟合精度及计算效能.

参考文献

- 何书元.应用时间序列分析.北京:北京大学出版社,2003.
- 徐峰,王志芳,王宝圣.AR 模型应用于振动信号趋势预测的研究.清华大学学报(自然科学版),1999,39(4):57-59.
- 董云耀,杨望书.基于时间序列趋势的研究与应用.杭州电子科技大学学报,2008,28(1):64-68.
- 吴夏平,王福明.基于最小二乘法原理的趋势项处理研究.微计算机信息,2008,24(33):254-255.
- 侯文超.经济预测—理论、方法及应用.北京:商务印书馆出版,1993.
- 王治藩,杨叔子.ARMA 谱分析中若干问题的研究.应用力学学报,1985,2(1):33-47.
- 喻开志,史代敏,邹红.随机系数离散值时间序列模型.统计研究,2011,28(4):106-112.
- 田承骏.逼近意义下的时间序列周期分析.山西大学学报(自然科学版),1981,22(1):61-70.
- 芮小健,钟秉林,颜景平.时序建模中周期信号和趋势项的处理问题研究.应用科学学报,1995,13(2):195-201.
- 李庆扬,关治,白峰杉.数值计算原理.北京:清华大学出版,2000.
- Sauer T.吴兆金等译.数值分析.北京:人民邮电出版社,2010.
- 徐士良,孙甲松.科学计算通用程序集.沈阳:辽宁科学技术出版社,1997.