

网络化时滞控制系统的有限时间稳定性分析^①

刘 薇¹, 周 振², 王跃灵²

¹(浙江东方职业技术学院, 温州 325011)

²(燕山大学 工业计算机控制工程河北省重点实验室, 秦皇岛 066004)

摘 要: 针对网络控制系统中存在于传感器-控制器-执行器间的双时延问题, 提出了一种基于 Markov 模型的状态反馈控制策略. 与传统应用 Markov 随机过程的方式相比, 该策略采用两个 Markov 链描述每一个时延, 通过状态反馈把该随机系统描述为具有四个随机参量的离散 Markov 跳变系统. 利用 Lyapunov 有限时间稳定性理论分析得到该系统稳定的充分条件, 并利用线性矩阵不等式(LMI)得到了可行的反馈矩阵. 数值仿真结果进一步证明了该策略的有效性.

关键词: Markov 跳变系统; 有限时间稳定; 状态反馈; 随机时延; 线性矩阵不等式

Finite-Time Stability of Networked Control Systems with Time Delay

LIU Wei¹, ZHOU Zhen², WANG Yue-Ling²

¹(Zhejiang Dongfang Vocational and Technical College, Wenzhou 325011, China)

²(Key Lab of Industrial Computer Control Engineering of Hebei Province, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: This paper is concerned about the networked control systems with random time delays, which occur in both sensor-controller and controller-actuator. For solving the problem of its dynamic features and uncertainty, one puts forward a state feedback control strategy with Markov characteristics. Moreover, in contrast with the way modeled through Markov stochastic process, each time-delay is described with two Markov chains, so that the resulting closed-loop system is established as a discrete Markovian jump system with four random parameters. A sufficient condition on the issue of finite-time bounded and stabilization is established through the theory of Lyapunov, and a linear matrix inequality (LMI) approach is employed to calculate the gain matrix of controller. Finally, an illustrative numerical simulation is given to demonstrate the effectiveness of the strategy proposed.

Key words: Markovian jump system; finite-time stability; state feedback; random delay; LMI

网络控制系统是通过反馈控制回路进行实时网络传输, 它的主要优点是低成本、重量轻、安装简单、维护方便和可靠性高, 因此, 网络控制系统在制造工厂、车辆、飞机、航天器等领域有很大的应用前景^[1-3]. 网络诱导时延是网络控制系统的一个主要的问题, 它的存在严重影响着控制系统的动态性能和稳态性能^[4].

在过去的十年里 Markov 跳变系统已经被广泛的研究, 其主要原因是 Markov 跳变系统对拥有随机变化的结构、会受到随机干扰等这一类动态系统是一个合适的数学模型^[5-7]. 在文献[8]中, Zhang 等人提出利用 Markov 过程来描述网络控制系统的传输时延问题, 并

根据倒立摆的实例仿真给出进一步的证明. 值得一提的是, Xiong 等人提出了一种新的描述时延问题的方式, 文章^[9,10]中假定存在于模态信号一个时变时滞和存在于系统状态一个时变延迟, 这样在系统中用两个 Markov 链描述每一个随机时延信号, 并对该状态反馈闭环系统进行随机稳定性分析. 在文献[11]中, 网络控制系统中在传感器-控制器-执行器间都采用了时间驱动方式, 存在两个随机时延的网络控制系统下建立离散 Markov 跳变模型, 并且进行随机稳定性分析. 如图 1 所示, 在传感器-控制器和控制器-执行器间存在时延, 分别表示为 τ_k^{sc} 和 τ_k^{ca} . 基于通讯拓扑结构的网络控制

^①收稿时间:2014-05-09;收到修改稿时间:2014-06-06

系统中,应用Markov跳变模型描述子系统间的不确定性和随机转换的通讯特性,将拥有一个良好的前景.基于实际应用中系统的复杂性和不确定性,具有Markov特性的模型将得到更广泛的推广.

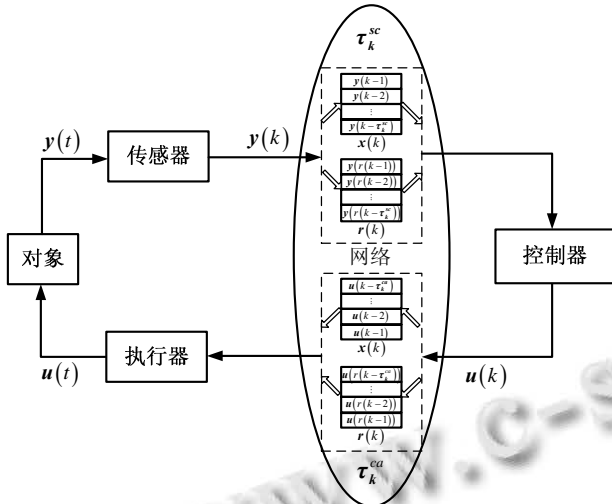


图 1 网络控制系统原理示意图

在[12]中回顾了有限时间控制方法的起源,有限时间控制系统因具有良好的鲁棒性能和抗扰动性能而受到广泛关注^[13-16].在文献[17,18]中,全局一致的有限时间稳定性是对一个时变系统讨论了包含两个子系统级联的有限时间一致稳定性.文献[19-22]分别针对各种连续、离散的随机线性和非线性系统进行有限时间稳定性分析.此外,Zhang、Wu 和 Li 等人还对 Markov 跳变系统中不确定转移矩阵问题进行了随机稳定性和鲁棒稳定性分析^[23-25].有限时间控制方法可以提高系统的控制性能,因此对有限时间控制的研究具有重要的意义^[26].

在本文当中,我们研究具有 Markov 特征的网络控制系统的稳定性.具有双时延的网络控制系统中,每个时延模型都具有两个跳变参数,利用状态反馈建立的闭环系统被描述为具有四个随机跳变参数的 Markov 跳变系统,并且理论证明了闭环系统是有限时间稳定的.最后,实例仿真可以更充分的证明有限时间稳定的结论.本课题的研究具有一定的应用前景.

1 问题描述

1.1 系统模型

在本文中,针对一类网络控制系统的双时延问题,我们基于一种新的建模方法建立了一个 Markov 跳变系统.为了后面章节叙述方便,定义有限集合 Ω 、 Ψ_1 、

Ψ_2 和 Γ

$$\begin{cases} \Omega = \{1, 2, \dots, T_d\} T_d \in Z^+ \\ \Psi_1 = \{1, 2, \dots, S\} S \in Z^+ \\ \Psi_2 = \{1, 2, \dots, U\} U \in Z^+ \\ \Gamma = \{1, 2, \dots, E\} E \in Z^+ \end{cases}$$

其中, T_d, S, U, E 均为给定正整数.

对于一类离散的 Markov 跳变系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(r(k))\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(r(k))\mathbf{u}(k) + \mathbf{G}(r(k))\mathbf{d}(k) \\ \mathbf{d}(k+1) = \mathbf{F}(\sigma(k))\mathbf{d}(k) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $k \in Z^+, \mathbf{x}(k) \in R^n$ 为系统状态, $\mathbf{u}(k) \in R^m$ 为系统控制输入, $\mathbf{d}(k) \in R^n$ 为系统干扰. $r(k)$ 为系统时延模态, $\sigma(k)$ 为系统干扰模态,均为时间同治 Markov 过程,为了叙述方便,分别记 $r_k = r(k), \sigma_k = \sigma(k)$.

在网络控制系统中,记在第 k 采样时刻的延时时间分别为 τ_k^{sc} 和 τ_k^{ca} ,而在第 k 采样时刻时,通常情况都已知控制器-执行器在 $k-1$ 时刻的时延 τ_{k-1}^{ca} 和传感器-控制器的时延 τ_k^{sc} ,设计状态反馈控制器的控制率为

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}(r_{k-\tau_k^{sc}-\tau_{k-1}^{ca}})\mathbf{x}(k-\tau_k^{sc}-\tau_{k-1}^{ca}) \quad (2)$$

将式(2)代入式(1)得到闭环控制系统

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(r_k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(r_k)\mathbf{K}(r_{k-\tau_k^{sc}-\tau_{k-1}^{ca}})\mathbf{x}(k-\tau_k^{sc}-\tau_{k-1}^{ca}) + \mathbf{G}(r_k)\mathbf{d}(k) \quad (3)$$

在实际的网络控制系统中,当前时刻的时延通常情况下与先前时刻的时延有关,所以随机时延 τ_k^{sc} 和 τ_k^{ca} 是时间同治的 Markov 链,其对应的有限集合为 Ψ_1 和 Ψ_2 ,及其转移矩阵可描述为

$$\begin{cases} \Pi_1 = [\lambda_{mn}], \lambda_{mn} = \Pr(\tau_{k+1}^{sc} = n | \tau_k^{sc} = m) \geq 0 \\ \Pi_2 = [t_{pq}], t_{pq} = \Pr(\tau_{k+1}^{ca} = p | \tau_k^{ca} = q) \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

其中, $m, n \in \Psi_1, \sum_{n=1}^S \lambda_{mn} = 1, p, q \in \Psi_2, \sum_{q=1}^U t_{pq} = 1$.

定义系统(3)的时延模态阵为

$$\mathbf{R}(k) = \begin{bmatrix} r_k & r_{k-1} & \dots & r_{k-U} \\ r_{k-1} & r_{k-2} & \dots & r_{k-1-U} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{k-S} & r_{k-S-1} & \dots & r_{k-S-U} \end{bmatrix} \quad (5)$$

记 $\mathbf{R}(k) = R_k$. 建立状态反馈控制系统,首先定义增益矩阵为

$$\mathbf{K}(\mathbf{R}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{K}(r_k) & \mathbf{K}(r_{k-1}) & \dots & \mathbf{K}(r_{k-U}) \\ \mathbf{K}(r_{k-1}) & \mathbf{K}(r_{k-2}) & \dots & \mathbf{K}(r_{k-1-U}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \mathbf{K}(r_{k-\tau_k^{sc}-\tau_k^{ca}}) & \vdots \\ \mathbf{K}(r_{k-S}) & \mathbf{K}(r_{k-S-1}) & \dots & \mathbf{K}(r_{k-S-U}) \end{bmatrix} \quad (6)$$

由式(2)和式(6), 可得系统控制率为

$$\mathbf{u}(k) = \mathbf{L}_1(\tau_k^{sc})\mathbf{K}(\mathbf{R}_k)\mathbf{L}_2(\tau_k^{ca})\mathbf{x}(k - \tau_k^{sc} - \tau_k^{ca}) \quad (7)$$

其中, $\mathbf{L}_1(\tau_k^{sc})$ 和 $\mathbf{L}_2(\tau_k^{ca})$ 为系统的模态选择矩阵. 该矩阵在除了第 $\tau_k^{sc} + 1$ 个矩阵块和第 $\tau_k^{ca} + 1$ 个矩阵块外其它元素均为零, 分别描述如下

$$\begin{cases} \mathbf{L}_1(\tau_k^{sc}) = [\mathbf{0}_{m \times m} \dots \mathbf{0}_{m \times m} \mathbf{I}_{m \times m} \mathbf{0}_{m \times m} \dots \mathbf{0}_{m \times m}] \in R^{m \times (S+1)m} \\ \mathbf{L}_2(\tau_k^{ca}) = [\mathbf{0}_{m \times m} \dots \mathbf{0}_{m \times m} \mathbf{I}_{m \times m} \mathbf{0}_{m \times m} \dots \mathbf{0}_{m \times m}]^T \in R^{m \times (U+1)m} \end{cases} \quad (8)$$

在第 k 次采样周期, 定义系统广义状态矩阵为

$$\boldsymbol{\zeta}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) & \mathbf{x}(k-1) & \dots & \mathbf{x}(k-U) \\ \mathbf{x}(k-1) & \mathbf{x}(k-2) & \dots & \mathbf{x}(k-1-U) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \mathbf{x}(k - \tau_k^{sc} - \tau_k^{ca}) & \vdots \\ \mathbf{x}(k-S) & \mathbf{x}(k-S-1) & \dots & \mathbf{x}(k-S-U) \end{bmatrix} \quad (9)$$

综上所述, 系统(1)可重新描述为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) = & \\ & [\mathbf{A}(r_k) + \mathbf{B}(r_k)\mathbf{L}_1(\tau_k^{sc})\mathbf{K}(\mathbf{R}_k)\mathbf{L}_2(\tau_k^{ca})]\mathbf{x}(k - \tau_k^{sc} - \tau_k^{ca}) + \mathbf{G}(r_k)\mathbf{d}(k) \end{aligned} \quad (10)$$

其中, 广义状态阵中其他状态保持上一时刻的值.

1.2 系统转移矩阵

引理 1. 对于一个有限集合 Γ , 存在一个常数 $\eta \in \mathbf{Z}^+$, 定义两个集合 $\Gamma^{\eta+1} = \Gamma \times \Gamma \times \dots \times \Gamma$ 和 $\Gamma_{\eta+1} = \{1, 2, \dots, E^{\eta+1}\}$, 并且引入一个映射关系 $\Xi: \Gamma^{\eta+1} \rightarrow \Gamma_{\eta+1}$

$$\Xi(\sigma) = i + (i_{-1} - 1)E + \dots + (i_{-\eta+1} - 1)E^{\eta-1} + (i_{-\eta} - 1)E^\eta \quad (11)$$

其中, $\sigma = [i, i_{-1}, i_{-2}, \dots, i_{-\eta+1}, i_{-\eta}]^T$, $i, i_{-1}, i_{-2}, \dots, i_{-\eta+1}, i_{-\eta} \in \Gamma$.

定义系统转移阵 $\Theta(\tau_k^{sc}, \tau_{k-1}^{ca}) = [p(v, l)(u, h)]$, 基于引理 1 将系统转移阵描述如下:

当延时发生在传感器-控制器间时, 将状态反馈闭环控制系统的时延模态记为 θ_k , 时延记为 $m, n \in \Psi_1$. 对于任意的两个时延模态 $u, v \in \Gamma_{\eta+1}$ 总对应两个 $\tilde{u}, \tilde{v} \in \Gamma^{\eta+1}$, 记为

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \Xi^{-1}(u) = [i, i_{-1}, \dots, i_{-S}]^T \\ \tilde{v} &= \Xi^{-1}(v) = [j, j_{-1}, \dots, j_{-S}]^T \end{aligned} \quad (12)$$

为了描述清晰, 我们可以将向量 $\tilde{\theta}_k$ 和 $\tilde{\theta}_{k+1}$ 表示如下

$$\tilde{\theta}_k = [\theta_k, \theta_{k-1}, \dots, \theta_{k-S}]^T$$

$$\tilde{\theta}_{k+1} = [\theta_{k+1}, \theta_k, \dots, \theta_{k-S+1}]^T \quad (13)$$

其中转移概率阵表示为

$$\Pi_3 = [\kappa_{uv}] \quad \kappa_{uv} = \Pr(\Xi(\tilde{\theta}_{k+1}) = v | \Xi(\tilde{\theta}_k) = u) \geq 0 \quad (14)$$

在这里, 令 $\tilde{\theta}_k = \tilde{u}$ 和 $\tilde{\theta}_{k+1} = \tilde{v}$, 由此可得

$$\Pr[(u, m)(v, n)] = \lambda_{mn} \kappa_{uv} o(i, j_{-1}) o(i_{-1}, j_{-2}) \dots o(i_{-S+1}, j_{-S}) \quad (15)$$

当延时发生在在控制器-执行器间时, 同比与传感器-执行器端, 可以得到控制器-执行器间的转移概率阵

$$\Pr[(l, p)(h, q)] = t_{qp} \kappa_{lh} o(f, g_{-1}) o(f_{-1}, g_{-2}) \dots o(f_{-U+1}, g_{-U}) \quad (16)$$

其中转移概率阵表示为

$$\Pi_4 = [\kappa_{lh}] \quad \kappa_{lh} = \Pr(\Xi(\tilde{\theta}_{k+1}) = h | \Xi(\tilde{\theta}_k) = l) \geq 0 \quad (17)$$

综上所述, 离散 Markov 跳变系统的转移矩阵为

$$\begin{aligned} \Theta(\tau_k^{sc}, \tau_{k-1}^{ca}) &= [p(v, l)(u, h)] \\ &= \lambda_{mn} t_{qp} \kappa_{uv} \kappa_{lh} o(i, j_{-1}) o(i_{-1}, j_{-2}) \dots o(i_{-S+1}, j_{-S}) \\ &\quad * o(f, g_{-1}) o(f_{-1}, g_{-2}) \dots o(f_{-U+1}, g_{-U}) \end{aligned} \quad (18)$$

2 有限时间稳定性分析

定义 1. (有限时间有界)对于离散系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}\mathbf{d}(k) \\ \mathbf{d}(k+1) = \mathbf{F}\mathbf{d}(k) \end{cases} \quad (19)$$

如果有 $\mathbf{x}^T(0)\mathbf{R}\mathbf{x}(0) \leq \alpha^2$, 则 $\forall k \in \{1, 2, \dots, T_d\}$ 都有 $\mathbf{x}^T(k)\mathbf{R}\mathbf{x}(k) \leq \beta^2$ 成立. 其中, 外部扰动信号满足 $\mathbf{d}^T(k)\mathbf{d}(k) < D$, 有限时间步长 T 为给定正整数, \mathbf{R} 为正定矩阵, 且 $0 < \alpha < \beta, T_d \in \mathbf{Z}^+$.

定义 2. (有限时间稳定)对于系统(19)在满足有限时间有界的同时令系统干扰信号 $\mathbf{d}(k) = 0$, 则称系统是能够有限时间稳定的.

引理 2. (Schur 补)

对给定的对称矩阵

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12}^T & s_{22} \end{bmatrix}$$

其中 $s_{11} \in R^{r \times r}$, $s_{22} \in R^{n \times n}$ 和 $s_{12} \in R^{r \times n}$, 以下三个条件是等价的:

- a) $|\mathbf{S}| < 0$;
- b) $|s_{11}| < 0, |s_{22} - s_{12}^T s_{11}^{-1} s_{12}| < 0$;
- c) $|s_{22}| < 0, |s_{11} - s_{12} s_{22}^{-1} s_{12}^T| < 0$;

引理 3. 对于离散系统(10)关于 $(\alpha, \beta, \mathbf{R}, D, T_d)$ 有限时间有界, 如果存在正定矩阵 $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}(i = r_k)$, $\mathbf{Q}_j = \mathbf{Q}(j = \sigma_k)$, 以及一个标量值 $\rho \geq 1$, 使得以下矩阵

不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{i1}^T \mathbf{P}_i \mathbf{Z}_{i1} - \rho \mathbf{P}_i & \mathbf{Z}_{i1}^T \mathbf{P}_i \mathbf{Z}_{2i} \\ \mathbf{Z}_{2i}^T \mathbf{P}_i \mathbf{Z}_{i1} & \mathbf{Z}_{2i}^T \mathbf{P}_i \mathbf{Z}_{2i} + \mathbf{F}^T(j) \mathbf{Q}_j \mathbf{F}(j) - \rho \mathbf{Q}_j \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

$$\rho^{T_d} (\omega_{P_{\max}} \alpha^2 + \omega_{Q_{\max}} D) < \beta^2 \omega_{P_{\min}} \quad (21)$$

其中, $\lambda_{\max}(\cdot) / \lambda_{\min}(\cdot)$ 分别表示对应矩阵的最大及最小特征值, 且有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_i &= \mathbf{R}^{1/2} \tilde{\mathbf{P}}_i \mathbf{R}^{1/2} \\ \omega_{P_{\max}} &= \lambda_{\max}(\tilde{\mathbf{P}}_i) \\ \omega_{P_{\min}} &= \lambda_{\min}(\tilde{\mathbf{P}}_i) \\ \omega_{Q_{\max}} &= \lambda_{\max}(\mathbf{Q}_j) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{i1}^T = [\boldsymbol{\Theta}(\tau_k^{sc}, \tau_{k-1}^{ca})^{1/2} (\mathbf{A}(i) + \mathbf{B}(i) \mathbf{L}_1(\tau_k^{sc}) \mathbf{K}(\mathbf{R}_k) \mathbf{L}_2(\tau_{k-1}^{ca}))^T] \\ \mathbf{Z}_{2i}^T(i) = [\boldsymbol{\Theta}(\tau_k^{sc}, \tau_{k-1}^{ca})^{1/2} \mathbf{G}^T(i)]^T \end{cases} \quad (23)$$

标量 $\rho \geq 1$ 对于有限时间稳定性的证明起关键的作用, 当 $\rho = 1$ 的时系统是随机稳定的.

定理 1. 离散 Markov 跳变系统(10)是关于 $(\alpha, \beta, \mathbf{R}, D, T_d)$ 是有限时间稳定的, 在模态 $i = r_k$, 如果存在受限于系统模态的正定矩阵 $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}(i = r_k)$, $\mathbf{Q}_j = \mathbf{Q}(j = \sigma_k)$, 以及一个标量值 $\rho \geq 1$, 使得以下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -\rho \mathbf{P}_i & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_{i1}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^T(j) \mathbf{Q}_j \mathbf{F}(j) - \rho \mathbf{Q}_j & \mathbf{Z}_{2i}^T \\ \mathbf{Z}_{i1} & \mathbf{Z}_{2i} & -\mathbf{P}_i^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (24)$$

证明: 系统(10)是关于 $(\alpha, \beta, \mathbf{R}, D, T_d)$ 有限时间稳定的, 由引理 3 得到一个充分条件

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{i1}^T \mathbf{P}_i \mathbf{Z}_{i1} - \rho \mathbf{P}_i & \mathbf{Z}_{i1}^T \mathbf{P}_i \mathbf{Z}_{2i} \\ \mathbf{Z}_{2i}^T \mathbf{P}_i \mathbf{Z}_{i1} & \mathbf{Z}_{2i}^T \mathbf{P}_i \mathbf{Z}_{2i} + \mathbf{F}^T(j) \mathbf{Q}_j \mathbf{F}(j) - \rho \mathbf{Q}_j \end{bmatrix} < 0$$

根据 Schur 补引理可以得到

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{i1}^T \\ \mathbf{Z}_{2i}^T \end{bmatrix} \mathbf{P}_i \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{i1} & \mathbf{Z}_{2i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\rho \mathbf{P}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}^T(j) \mathbf{Q}_j \mathbf{F}(j) - \rho \mathbf{Q}_j \end{bmatrix} < 0$$

上式等价于式(24), 由此得证.

定理 2. 离散 Markov 跳变系统(10)是关于 $(\alpha, \beta, \mathbf{R}, D, T_d)$ 是有限时间稳定的, 在模态 $i = r_k, j = \sigma_k$, 如果存在正定矩阵 \mathbf{L} , 以及一个标量值 $\rho \geq 1$, 使得以下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{L}_i & \mathbf{Z}_{i1} \mathbf{L}_i^T & \mathbf{Z}_{2i} \mathbf{L}_j^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_i \mathbf{Z}_{i1}^T & -\rho \mathbf{L}_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_j \mathbf{Z}_{2i}^T & \mathbf{0} & -\rho \mathbf{L}_j^T & \mathbf{L}_j \mathbf{F}^T(j) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}(j) \mathbf{L}_j^T & -\mathbf{L}_j \end{bmatrix} < 0 \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} \omega_3 D + \alpha^2 / \omega_1 & \beta \\ \beta & \omega_2 \rho^{T_d} \end{bmatrix} < 0 \quad (26)$$

$$\omega_1 \mathbf{R}^{-1} < \mathbf{L}_i < \omega_2 \mathbf{R}^{-1} \quad (27)$$

$$0 < \mathbf{L}_j < \mathbf{I} / \omega_3 \quad (28)$$

其中,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \lambda_{\min}(\mathbf{L}_i) \\ \omega_2 &= \lambda_{\max}(\mathbf{L}_i) \\ 1 / \omega_3 &= \lambda_{\min}(\mathbf{L}_j) \end{aligned} \quad (29)$$

证明: 首先令 $\mathbf{L}_i = \mathbf{P}_i^{-1}$, $\mathbf{L}_j = \mathbf{Q}_j^{-1}$, 正定对称矩阵 \mathbf{L} 可以写为

$$\lambda_{\max}(\mathbf{L}) = \frac{1}{\lambda_{\min}(\mathbf{L}_i)}$$

式(20)等价于

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{i1}^T \mathbf{L}_i^{-1} \mathbf{Z}_{i1} - \rho \mathbf{L}_i^{-1} & \mathbf{Z}_{i1}^T \mathbf{L}_i^{-1} \mathbf{Z}_{2i} \\ \mathbf{Z}_{2i}^T \mathbf{L}_i^{-1} \mathbf{Z}_{i1} & \mathbf{Z}_{2i}^T \mathbf{L}_i^{-1} \mathbf{Z}_{2i} + \mathbf{F}^T(j) \mathbf{L}_j^{-1} \mathbf{F}(j) - \rho \mathbf{L}_j^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (30)$$

将式(30)先左乘式(31), 然后再右乘式(31)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_j \end{bmatrix} \quad (31)$$

经过多步运算处理, 可以得到不等式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_i \mathbf{Z}_{i1}^T \mathbf{L}_i^{-1} \mathbf{Z}_{i1} \mathbf{L}_i^T - \rho \mathbf{L}_i^T & \mathbf{L}_i \mathbf{Z}_{i1}^T \mathbf{L}_i^{-1} \mathbf{Z}_{2i} \mathbf{L}_j^T \\ \mathbf{L}_j \mathbf{Z}_{2i}^T \mathbf{L}_i^{-1} \mathbf{Z}_{i1} \mathbf{L}_i^T & \mathbf{L}_j \mathbf{Z}_{2i}^T \mathbf{L}_i^{-1} \mathbf{Z}_{2i} \mathbf{L}_j^T + \mathbf{L}_j \mathbf{F}^T(j) \mathbf{L}_j^{-1} \mathbf{F}(j) \mathbf{L}_j^T - \rho \mathbf{L}_j^T \end{bmatrix} < 0 \quad (32)$$

然后, 根据 Schur 补引理得到不等式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L}_i \mathbf{Z}_{i1}^T \\ \mathbf{L}_j \mathbf{Z}_{2i}^T \end{bmatrix} \mathbf{L}_i^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{i1} \mathbf{L}_i^T & \mathbf{Z}_{2i} \mathbf{L}_j^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\rho \mathbf{L}_i^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L}_j \mathbf{F}^T(j) \mathbf{L}_j^{-1} \mathbf{F}(j) \mathbf{L}_j^T - \rho \mathbf{L}_j^T \end{bmatrix} < 0 \quad (33)$$

进而, 经过化简得到不等式

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{L}_i & \mathbf{Z}_{i1} \mathbf{L}_i^T & \mathbf{Z}_{2i} \mathbf{L}_j^T \\ \mathbf{L}_i \mathbf{Z}_{i1}^T & -\rho \mathbf{L}_i^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_j \mathbf{Z}_{2i}^T & \mathbf{0} & \mathbf{L}_j \mathbf{F}^T(j) \mathbf{L}_j^{-1} \mathbf{F}(j) \mathbf{L}_j^T - \rho \mathbf{L}_j^T \end{bmatrix} < 0 \quad (34)$$

再一次应用 Schur 补引理得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_j \mathbf{F}^T(j) \end{bmatrix} \mathbf{L}_j^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}(j) \mathbf{L}_j^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_i & \mathbf{Z}_{i1} \mathbf{L}_i^T & \mathbf{Z}_{2i} \mathbf{L}_j^T \\ \mathbf{L}_i \mathbf{Z}_{i1}^T & -\rho \mathbf{L}_i^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_j \mathbf{Z}_{2i}^T & \mathbf{0} & -\rho \mathbf{L}_j^T \end{bmatrix} < 0 \quad (35)$$

由此可得, 上式等价于式(25). 不等式(26)是基于正定对称矩阵的性质, 将式(21)演化得到. 证明完毕.

3 仿真实验

为了证明文章中所提出理论的实用性和灵活性,

我们举一个关于离散 Markov 跳变过程描述通讯时延的有限时间镇定问题的仿真实例. 考虑到一个不确定的 Markov 跳变系统具有运行模式, 其中 $\Psi_1 = \{1, 2, 3\}$ $\Psi_2 = \{1, 2, 3\}$ $E = 3$, 并且假设 $\eta = 2$. 系统数据如下:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \begin{bmatrix} 2.7 & 1 & 0 \\ 1 & 1.3 & 0.17 \\ 1.5 & 0.7 & 1.7 \end{bmatrix} & A_{12} &= \begin{bmatrix} 1.7 & 2 & 0 \\ 3 & 1.3 & 0.37 \\ 2.5 & -1.7 & 0.2 \end{bmatrix} & A_{13} &= \begin{bmatrix} 2.2 & 1 & 0 \\ 1 & 2.3 & 0.3 \\ -3.5 & 0.2 & 2.7 \end{bmatrix} \\
 A_{21} &= \begin{bmatrix} -1.6 & -1 & 0 \\ 0.44 & 0.6 & 1.2 \\ 1.9 & -0.8 & 0.5 \end{bmatrix} & A_{22} &= \begin{bmatrix} -3.6 & -1 & 0 \\ 0.44 & 0.6 & 1.2 \\ 1.3 & 0.8 & 0.6 \end{bmatrix} \\
 A_{23} &= \begin{bmatrix} -3 & -1.4 & 1 \\ 0.44 & 0.6 & 1.2 \\ 3.3 & 0.8 & -0.5 \end{bmatrix} & A_{31} &= \begin{bmatrix} 2.6 & 1.2 & 0 \\ 1.4 & 0.15 & -0.3 \\ 1.1 & 0.7 & -0.03 \end{bmatrix} \\
 A_{32} &= \begin{bmatrix} 4.6 & 2 & 0 \\ 2.4 & 1.2 & -0.3 \\ 1.1 & 0.7 & -0.03 \end{bmatrix} & A_{33} &= \begin{bmatrix} 1.6 & 1 & 0 \\ 1.4 & 0.2 & -0.4 \\ 1.5 & 0.4 & -0.3 \end{bmatrix} \\
 B_{11} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & B_{12} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & B_{13} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & B_{21} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & B_{22} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & B_{23} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & B_{31} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 B_{32} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & B_{33} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & G_{11} &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.09 \\ 0.3 \end{bmatrix} & G_{12} &= \begin{bmatrix} 0.15 \\ -0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} & G_{13} &= \begin{bmatrix} 0.21 \\ -0.03 \\ -0.14 \end{bmatrix} & G_{21} &= \begin{bmatrix} 0.11 \\ -0.19 \\ 0.23 \end{bmatrix} \\
 G_{22} &= \begin{bmatrix} 0.15 \\ -0.1 \\ 0.22 \end{bmatrix} & G_{23} &= \begin{bmatrix} 0.21 \\ -0.43 \\ -0.34 \end{bmatrix} & G_{31} &= \begin{bmatrix} 0.4 \\ -0.39 \\ 0.13 \end{bmatrix} & G_{32} &= \begin{bmatrix} 0.15 \\ -0.12 \\ 0.02 \end{bmatrix} & G_{33} &= \begin{bmatrix} 0.41 \\ -0.13 \\ -0.24 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

系统时延的转移概率矩阵和模态转移矩阵为:

$$\begin{aligned}
 \Pi_1 &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix} & \Pi_2 &= \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \\
 \Pi_3 &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} & \Pi_4 &= \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

通过定理 2 得到状态反馈控制器增益为:

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= [-1.5008 \quad -0.7005 \quad -1.7000] \\
 K_{12} &= [-1.1614 \quad 0.0938 \quad -0.8535] \\
 K_{13} &= [-2.6029 \quad -1.1994 \quad 0.0009] \\
 K_{21} &= [-1.5016 \quad -0.7011 \quad -1.7001] \\
 K_{22} &= [-0.8726 \quad -0.7007 \quad -0.8999] \\
 K_{23} &= [-2.4820 \quad -1.1342 \quad 0.1052] \\
 K_{31} &= [3.4979 \quad -0.2029 \quad -2.7003] \\
 K_{32} &= [-0.1423 \quad 0.0367 \quad -0.5912] \\
 K_{33} &= [-1.3945 \quad -0.1965 \quad 0.4001]
 \end{aligned}$$

将状态反馈控制率带入到系统(10)中, 假设系统的初始状态 $x(0) = [1 \quad -0.5 \quad -1]^T$, 系统的拓展状态空间中初始状态 $x(-\tau_k^{sc} - \tau_k^{ca}) = [1 \quad -0.5 \quad -1]^T$. 图 2 和图 3 分别表示在传感器-控制器和控制器-执行器间的系统时延, 图 4 和图 5 分别表示在传感器-控制器和控制器-执行器

间的系统模态.

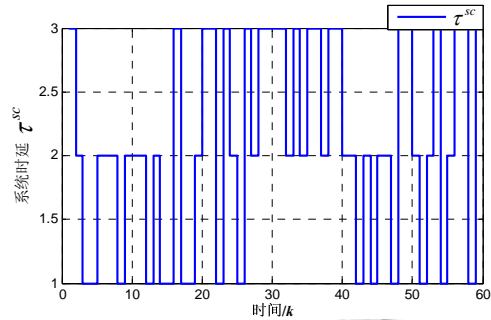


图 2 传感器到控制器随机时延

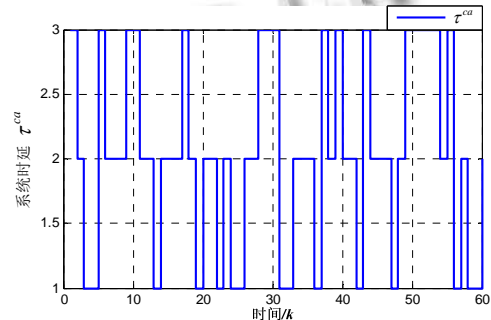


图 3 控制器到执行器随机时延

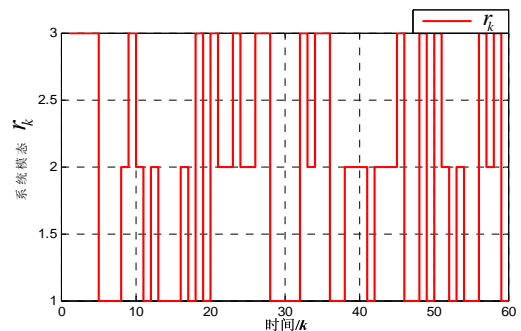


图 4 传感器到控制器系统模态

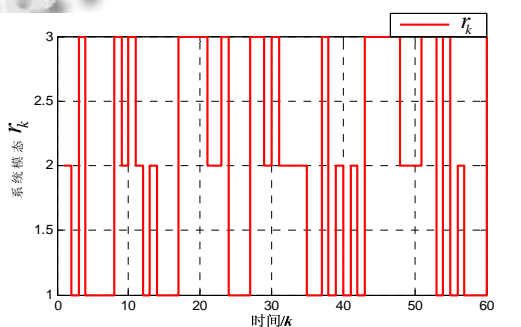


图 5 控制器到执行器系统模态

在相应的时延模态和系统模态下, 图 6 是在存在系统干扰的情况下的系统状态曲线, 图 7 是系统没有干扰下的有限时间稳定曲线. 仿真曲线中三个状态变量在有限的采样时间节点收敛到零, 进一步证明系统

的有限时间稳定性问题。

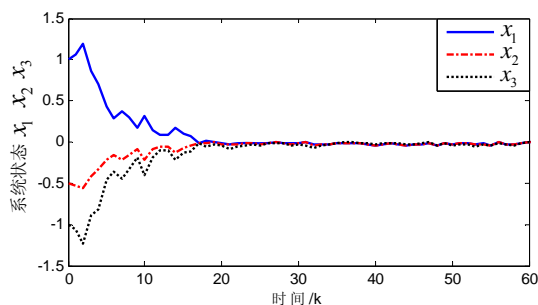


图 6 存在干扰下的系统状态曲线

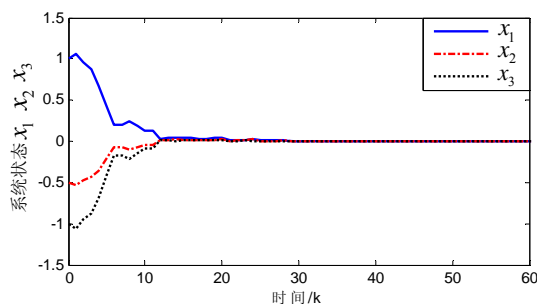


图 7 没有干扰下的系统状态曲线

4 总结

本文是研究关于随机时延建立 Markov 跳变系统的有限时间镇定问题。假定存在随机的系统模态信号和时变系统状态信号，进而将网络控制系统的双时延描述为具有四个随机跳变参数的闭环控制系统，并对建立的状态反馈闭环控制系统进行有限时间稳定性分析。利用 LMI 的方法提出了一个有限时间状态反馈控制器的设计条件，给出了构建此类控制器有效性的理论证明。最后数值模拟仿真充分证明了所提出的控制器有效性。

参考文献

- 1 Van de Wouw N, Nešić D, Heemels W. A discrete-time framework for stability analysis of nonlinear networked control systems. *Automatica*, 2012, 48(6): 1204–1153.
- 2 Xia YQ, Xie W, Liu B, Wang XY. Data-driven predictive control for networked control systems. *Information Sciences*, 2013, 235: 45–54.
- 3 Li HB, Sun FC, Sun ZQ. Delay-dependent fuzzy control of networked control systems and its application. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013: 1–9.
- 4 Zhang LQ, Shi Y, Chen TW, Huang B. A new method for

stabilization of networked control systems with random delays. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2005, 50(8): 1177–1181.

- 5 Zhao HY, Ren W, Yuan DM, Chen J. Distributed discrete-time coordinated tracking with Markovian switching topologies. *Systems & Control Letters*, 2012, 61(7): 766–772.
- 6 Chen B, Niu YG, Zou YY. Adaptive sliding mode control for stochastic Markovian jumping systems with actuator degradation. *Automatica*, 2013, 49(6): 1748–1754.
- 7 Wu ZG, Park JH, Su HY, Chu J. Stochastic stability analysis of piecewise homogeneous Markovian jump neural networks with mixed time-delays. *Journal of the Franklin Institute*, 2012, 349(6): 2136–2150.
- 8 辛道义.有限时间稳定性分析与控制设计研究[学位论文]. 济南:山东大学,2008.
- 9 Xiong JL, Lam J. Stabilization of discrete-time Markovian jump linear systems via time-delayed controllers. *Automatica*, 2006, 42(5): 747–753.
- 10 Liu M, Ho DWC, Niu YG. Stabilization of Markovian jump linear system over networks with random communication delay. *Automatica*, 2008, 45(5): 416–421.
- 11 Huang D, Sing KN. State feedback control of uncertain networked control systems with random time delays. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2008, 53(3): 829–834.
- 12 丁世宏,李世华.有限时间控制问题综述.控制与决策,2011,26(2):1–10.
- 13 Li S, Tian YP. Finite-time stability of cascaded time-varying systems. *International Journal of Control*, 2007, 80(4): 646–657.
- 14 Lin XZ, Du HB, Li SH. Finite-time boundedness and finite-time L_2 gain analysis of discrete-time switched linear systems with average dwell time. *Journal of the Franklin Institute*, 2013, 350(4): 911–928.
- 15 Xiang ZR, Qiao CH, Mahmoud M.S. Finite-time analysis and H_∞ control for switched stochastic systems. *Journal of the Franklin Institute*, 2012, 349(3): 915–927.
- 16 Ambrosino R, Calabrese F, Cosentino C, Tommasi GD. Sufficient conditions for finite-time stability of impulsive dynamical systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2009, 54(4): 861–865.
- 17 Cao YC, Ren W, Casbeer DW, Schumacher C. Finite-time

- consensus of networked Lipschitz nonlinear agents under communication constraints. American Control Conference (ACC). IEEE. Washington DC. 2013. 1326–1331.
- 18 Amato F, Ariola M. Finite-time control of discrete-time linear systems. IEEE Trans. on Automatic Control, 2005, 50(5): 724–729.
- 19 辛道义,刘允刚.非线性系统有限时间稳定性分析与控制设计.山东大学学报,2007,3(37):24–30.
- 20 Amato F, Tommasi DG, Pironti A. Necessary and sufficient conditions for finite-time stability of impulsive dynamical linear systems. Automatica, 2013, 49(8): 2546–2550.
- 21 Chen F, Xu SY, Zou Y, Zhang MS. Finite-time boundedness and stabilization for a class of non-linear quadratic time-delay systems with disturbances. IET Control Theory and Applications, 2013, 7(13): 1683–1688.
- 22 Sun YG, Xu J. Finite-time boundedness and stabilization of networked control systems with time delay. Mathematical Problems in Engineering, 2012: 1–12.
- 23 Zhang LX, Boukas EK. Stability and stabilization of Markovian jump linear systems with partly unknown transition probabilities. Automatica, 2009, 45: 463–468.
- 24 李鹏,郑志强,马建军.一类不确定非线性系统的全局鲁棒有限时间镇定.控制理论与应用,2011,7(28):915–920.
- 25 陈瑞娟.随机 Markov 跳变系统的分析与控制.哈尔滨:哈尔滨工程大学,2012.
- 26 Khoo S, Yin JJ, Man ZH, Yu XH. Finite-time stabilization of stochastic nonlinear systems in strict-feedback form. Automatica, 2013, 49(5): 1403–1410.