

# Delaunay 三角网动态更新算法的研究进展<sup>①</sup>

李 娜

(福州大学 福建省空间信息工程研究中心, 福州 350002)

**摘 要:** 通过对 Delaunay 三角网动态更新算法进行研究, 综述了 Delaunay 三角网中插入和删除点、约束线算法以往研究. 详细介绍点定位、LOP 优化、对角线交换等关键技术的研究进展, 并对比各种方法的优缺点, 分析已解决的问题和仍存在的问题. 最后对更新算法研究不足之处进行总结, 并提出若干可能的研究方向.

**关键词:** Delaunay 三角网; 动态更新; 点插入; 约束线插入; 点删除; 约束线删除

## Research Progress on Delaunay Triangulation Dynamic Updating Algorithm

LI Na

(Spatial Information Research Center of Fujian, Fuzhou University, Fuzhou 350002, China)

**Abstract:** Based on the study of delaunay triangulation dynamic updating algorithm, this paper reviews the earlier researches about inserting points and constrained edges into an existed Delaunay Triangulation, or deleting points and constrained edges from the Delaunay Triangulation. This paper describes a series of key techniques in detail, such as point location, LOP principle, diagonal exchanging etc., and also compares the advantages and disadvantages of these algorithms, furthermore analyses the solved problems and existing problems. Finally the problems existing in the delaunay triangulation dynamic updating algorithms are summarized, and some suggestions about future work are proposed in the end.

**Key words:** Delaunay triangulation irregular network; dynamic update; point insertion; constrained edge insertion; point deletion; constrained edge deletion

三角网(Delaunay Triangulation Irregular Network, D-TIN)是一种具有“空外接圆”和“最小内角最大”特性的不规则三角网, 其在计算几何、三维可视化、地学分析、图形图像处理等领域有着广泛应用. 此外, D-TIN 在城市规划建设领域尤其得到了长期、深入的推广应用, 其不仅是拟合地形表面的最有力工具, 同时也可用于因道路建设、房屋拆迁等引起的地形数据的变化动态更新. 因此, 开展 D-TIN 更新算法的研究尤为重要. 从二十世纪 80 年代开始, 国内外已经出现了很多成熟的 D-TIN 生成算法, 然而为了增加 D-TIN 的现势性, 国内外学者开展了大量有关 D-TIN 更新算法的研究, 主要有如下两种: ①点更新: 包括对 D-TIN 进行点插入和点删除的操作, 其中 D-TIN 点插入算法

最早由 Lawson<sup>[1]</sup>提出, 其研究思路简单, 编程容易实现, 但效率极低, Tsai<sup>[2]</sup>、Schrijvers<sup>[3]</sup>、Liu<sup>[4]</sup>、Devillers<sup>[5]</sup>、贾晓林<sup>[6]</sup>、陈楚江<sup>[7]</sup>等先后提出了点插入改进算法, 并详细介绍了点定位及 D-TIN 局部更新等关键技术; Aggarwal<sup>[8]</sup>最早提出了 D-TIN 点删除算法, 该算法实现复杂, 随后 Heller<sup>[9]</sup> Devillers<sup>[10,11]</sup>、Mostafavi<sup>[12]</sup>、Schrijvers<sup>[3]</sup>、贾晓林<sup>[6]</sup>、孟亮<sup>[13]</sup>等采用空外接圆检测、凸耳权值、简单多边形三角剖分等方法, 分别对点删除算法进行改进; ②约束线更新: 主要分为 D-TIN 约束线的插入及删除, 其中 Faugeras<sup>[14]</sup>、卢朝阳<sup>[15]</sup>、易法令<sup>[16]</sup>提出了一种约束线特征点插入算法, 该算法易于实现, 但存在效率和精度问题, 随后 Sloan<sup>[17]</sup>、Choi<sup>[18]</sup>、卢朝阳<sup>[19]</sup>、蒲浩<sup>[20]</sup>、宋占峰<sup>[21]</sup>等国内外学者

① 基金项目:福建省科技计划重点项目(2014Y0032)

收稿时间: 2014-06-10 收到修改稿时间: 2014-07-07

开展了大量有关约束线直接插入算法的研究,并对 Lu<sup>[22]</sup>、刘学军<sup>[23,24]</sup>、王彦兵<sup>[25,26]</sup>等对 D-TIN 约束线删除算法进行了研究,其中约束线删除算法与点删除算法的影响域重构、对角线交换等关键技术相同。

本文总结了国内外学者有关 D-TIN 动态更新算法的研究思想和相关技术,对比分析已提出的 D-TIN 点、约束线插入和删除算法,对以后的理论研究和实践应用都具有十分重要的意义。

## 1 点更新

点更新包括点的插入、删除或者移动等操作。移动操作可以由点在原位置的删除和在新位置的插入组合完成,下面详细介绍点插入和删除算法。

### 1.1 点插入算法

利用点与有向线段位置关系,确定插入点是否位于 D-TIN 凸包内部,若位于内部,定位该点所在的三角形,并进行 D-TIN 局部更新;否则,重新构造凸壳。点定位和 D-TIN 局部更新是点插入算法的关键技术,下面进行详细介绍。

#### ①点定位

对插入点与 D-TIN 中所有三角形进行相交测试,以寻找包含插入点的三角形。然而,面对具有大量三角形的 D-TIN 而言,插入点与所有三角形进行相交测试计算效率很低,其计算时间与三角形数量成正比。蒲浩<sup>[27]</sup>、陈楚江<sup>[7]</sup>、胡金星<sup>[28]</sup>等采用网格索引机制对 D-TIN 数据进行高效的组织管理,将整个点集划分为若干个子网格,建立数据点与子网格的空间映射关系。寻找插入点所在子网格,与该网格内的所有三角形进行相交测试,确定插入点所在三角形。该方法大大减少了相交测试次数,提高了点定位效率。

目前,确定插入点所在三角形的方法主要有矢量面积法、重心方向定位法、点边关系方向定位法、线线关系方向定位法。吴宇晓<sup>[29]</sup>、贾晓林<sup>[6]</sup>、邹永贵<sup>[30]</sup>等采用矢量面积法解决插入点的定位三角形问题,计算步骤简单,实现效率较高。但当出现搜索路径不唯一时,需要对每条搜索路径分别进行搜索,影响点定位算法效率。蒲浩<sup>[27]</sup>、宋占峰<sup>[31]</sup>采用重心方向定位法,该算法需要计算三角形重心,计算步骤复杂,实现效率低,且搜索路径不唯一,但其关键步骤为线线关系方向定位方法提供了一定的参考。刘少华<sup>[32]</sup>针对上面的重心方向定位算法进行改进,提出了点边关系方向

D-TIN 中约束线影响域的确定及重构进行了详细阐述;定位算法,该算法无需计算三角形重心,实现简单,但仍无法解决搜索路径不唯一问题。刘少华<sup>[32]</sup>继续提出线线关系方向定位算法,该算法将重心方向定位和点边关系方向定位相结合,不仅降低了计算复杂度,而且还解决了搜索路径不唯一的难题。下面对几种方法进行详细介绍。

#### 1)矢量面积法

矢量面积法是通过判断插入点与三角形三边所组成的三角形的矢量面积符号,确定插入点是否位于当前搜索三角形内。若面积全为正,则点在三角形内;若有一个面积为零,则点在面积为零的三角形边上;若有两个面积为零,则插入点为三角形顶点;若有一个面积为负,则插入点在三角形外,并将面积为负的子三角形外围边邻接的三角形作为下一个搜索三角形;若三个面积中有两个为负,搜索路径不唯一。

图 1 所示插入点与三角形的位置关系,其中 A、B、C 为当前搜索三角形三个顶点,点 P 为插入点,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  为插入点 P 同三角形三条边所组成的三角形的矢量面积。公式(1)为矢量面积计算公式,其中  $x, y$  表示点的横纵坐标。

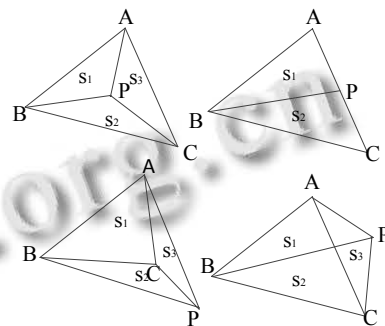


图 1 插入点与三角形的位置关系

$$S_1 = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} \quad S_2 = \begin{vmatrix} x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} \quad S_3 = \begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} \quad (1)$$

#### 2)重心方向定位法

重心方向定位法是根据判断插入点、当前搜索三角形的重心与三角形三边的位置关系,确定插入点是否位于搜索三角形内部。

公式(2)为任意一条有向线段函数表达式,

$$f(x, y) = ax + by + c \quad (2)$$

其中,  $a = y_B - y_A$ 、 $b = x_A - x_B$ 、 $c = x_B \cdot y_A - x_A \cdot y_B$ ,  $x$ 、

$y$ ,  $x$ ,  $y$  为横纵坐标,  $AB$  为线段顶点, 将任意一点坐标代入公式(2)中, 若函数式为正, 则该点在线段右侧; 若函数式为负, 则该点在线段左侧; 若函数式为零, 则该点在线段上。

根据公式(2)计算当前搜索三角形三边函数关系式, 将插入点坐标和当前搜索三角形重心点坐标代入三边函数关系式中计算函数值并做乘积。若三边均满足乘积为正, 则插入点位于三角形内部; 若有一条边满足乘积为零, 则插入点位于该边上; 若有两条边满足乘积为零, 则插入点为三角形顶点; 若有一条边满足乘积为负, 则插入点位于三角形外, 且将该边的邻接三角形作为下一个搜索三角形; 若有两条边满足乘积为负, 则搜索路径不唯一。

### 3)点边关系方向定位法

点边关系方向定位法是根据插入点与三角形三边的位置关系, 判断插入点是否位于搜索三角形内。将插入点坐标代入三边函数关系式中计算函数值, 若三角形三边满足函数值为正, 插入点在三角形内; 若有一条边满足函数值为零, 则插入点在该边上; 若有两条边满足函数值为零, 则插入点为三角形顶点; 若有一条边满足函数值为负, 则插入点在三角形外, 且将该边的邻接三角形作为下一个搜索三角形; 若两条边满足函数值为负, 则搜索路径不唯一。

### 4)线线关系方向定位法

线线关系方向定位法是一种点边关系方向定位法的改进算法, 将插入点坐标代入三边函数关系式中计算函数值, 若两条边满足函数值为负时, 计算当前搜索三角形的重心, 通过判断插入点与重心点连线  $QP$  和三角形三条边的位置关系, 若与三角形某条边相交, 则将相交边的邻接三角形作为下一个搜索三角形; 若与三角形某个顶点相交, 此时判断情况较复杂, 需遍历除当前搜索三角形外的包含该相交顶点的三角形, 查找与线段  $QP$  相交的三角形作为下一个搜索三角形。

### ②D-TIN 局部更新

在插入点所在三角形定位完成之后, 需要对 D-TIN 进行局部更新。目前, 主要有如下两种 D-TIN 局部更新方法: 一种是将插入点与其所在三角形顶点连接形成 3 个三角形, 对新三角形进行 LOP(Local Optimization Procedure)优化, 该方法可以构造比较规整的三角形, 且易于三角形检索, 但其需要执行多次 LOP 优化, 时间效率不高; 另一种是确定外接圆包含

插入点的三角形构成的影响域, 将插入点与影响域边界节点连接, 对影响域整体进行 LOP 优化, 完成 D-TIN 三角网局部更新, 该方法只需执行一次 LOP 优化, 时间效率较高, 但对于插入点数量较多的情况, 容易形成大量不规整的三角形, 且不易于三角形检索。

LOP 优化算法实现简单、恒定, 且具有累积性, 当插入点数据量较大时, LOP 优化效率会显著的影响 D-TIN 局部更新算法的执行效率。为了提高 LOP 优化算法的效率, 国内外学者先后提出了不同的空外接圆检测算法。常见做法是通过计算其中一个三角形外接圆圆心及其半径, 比较两个三角形不共边顶点到外接圆圆心的距离与外接圆半径的大小关系, 确定是否需要进行凸四边形的对角线互换, 该算法需要进行多次三角函数、平方、开平方、除法等运算, 执行效率较低。刘学军<sup>[33]</sup>给出了空外接圆检测公式, 公式中有正切函数具有很大的局限性。郭兆胜<sup>[34]</sup>、许建中<sup>[35]</sup>等通过计算并比较凸四边形中公共边所对两个内角的余弦值, 采用公式(3)实现了效率较高的空外接圆检测算法。李小秋<sup>[36]</sup>采用公式(4), 通过计算凸四边形中公共边对应两个内角角度和或者内角角度和的正弦值, 实现空外接圆检测, 该方法无需进行比较, 数值运算只涉及加、减、乘法, 计算效率极高。

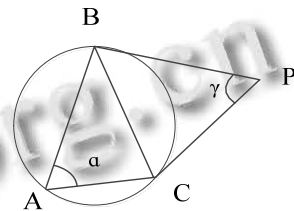


图 2 空外接圆检测改进算法

如图 2 所示,  $\Delta ABC$  和  $\Delta CBP$  为相邻三角形, 线段  $BC$  为其组成凸四边形的公共边,  $\alpha$  和  $\gamma$  分别为公共边  $BC$  所对的内角, 根据公式(3)可以判断点  $P$  与  $\Delta ABC$  外接圆的位置关系。

$$\begin{cases} \cos \alpha < \cos \gamma & \text{点 } P \text{ 在外接圆外} \\ \cos \alpha = \cos \gamma & \text{点 } P \text{ 在外接圆上} \\ \cos \alpha > \cos \gamma & \text{点 } P \text{ 在外接圆内} \end{cases} \quad (3)$$

$$\cos \alpha = \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}$$

$$\cos \gamma = \cos(\overline{PB}, \overline{PC}) = \frac{\overline{PB} \cdot \overline{PC}}{|\overline{PB}| \cdot |\overline{PC}|}$$

公式(4)是根据凸四边形的对角线 BC 所对的两个内角  $\alpha$ 、 $\gamma$  的角度和或者其角度和的正弦值, 以判断点 P 与  $\Delta ABC$  外接圆的位置关系.

$$\begin{cases} \alpha+\gamma < 180^\circ \text{ 或 } \sin(\alpha+\gamma) < 0 & \text{点 } P \text{ 在外接圆外} \\ \alpha+\gamma = 180^\circ \text{ 或 } \sin(\alpha+\gamma) = 0 & \text{点 } P \text{ 在外接圆上} \\ \alpha+\gamma > 180^\circ \text{ 或 } \sin(\alpha+\gamma) > 0 & \text{点 } P \text{ 在外接圆内} \end{cases} \quad (4)$$

### 1.2 点删除算法

国内外关于点删除算法的研究很多, Aggarwal<sup>[8]</sup>最早提出了 D-TIN 删除点算法, 但计算复杂, 应用很少. Chew<sup>[37]</sup>利用 Voronoi 图对点进行随机删除操作, 计算相对简单. Heller<sup>[9]</sup>提出了最小外接圆的点删除算法, Devillers<sup>[10]</sup>对 Heller 算法进行改进, 并纠正 Heller 的错误, 提出了凸耳权值点删除算法, 计算效率较高. Mostafavi<sup>[12]</sup>对凸耳权值点删除算法进行改进, 将凸耳性质和空外接圆准则结合, 使用四叉边维护三角网拓扑结构, 计算步骤简单, 但时间效率降低. 刘学军<sup>[24]</sup>将删除点过程看成简单多边形的三角剖分, 利用逐点插入算法进行三角剖分实现了点的删除. 贾晓林<sup>[6]</sup>基于凸耳权值的点删除算法, 用特征三角形取代凸耳的方法, 省去一部分凸耳权值的计算, 使用双向链表组织特征三角形队列. 张咏<sup>[38]</sup>基于刘学军的思想, 克服了其只能处理简单多边形的局限, 算法中使用矢量面积简化任意多边形三角剖分算法. Devillers<sup>[11]</sup>针对删除点影响域顶点数为 3-7 的情况, 基于决策树和分治算法相结合的思想, 提出了一种对角线交换优化算法和 D-TIN 点删除优化算法.

D-TIN 点删除算法可以看成点插入算法的逆过程, 涉及到关键技术如点的定位、影响域确定、LOP 优化等在插入点算法中已经具体介绍, 下面对几种点删除算法进行归纳总结.

#### ①凸耳权值点删除算法

凸耳权值点删除算法基本思想为: 查找以删除点为顶点的所有三角形, 构成影响域; 然后, 在影响域边界节点中, 根据公式 5 计算每个凸耳的权值, 其中, 在影响域边界点中, 任意相邻三个点, 两侧点连线位于多边形内部, 该三点所组成的三角形为凸耳. 寻找权值最小的凸耳, 交换该凸耳与删除点形成四边形的对角线, 若影响域边界包括约束线, 对角线交换时要保留约束线; 更新凸耳权值, 继续寻找下一个权值最小的凸耳, 交换对角线直到以删除点为顶点的三角形个数减到 3 个, 合并 3 个三角形, 点删除完成.

凸耳权值计算公式如下:

$$\text{power}(P, \text{circle}(q_i, q_{i+1}, q_{i+2})) = \frac{\begin{vmatrix} x_{q_i} & x_{q_{i+1}} & x_{q_{i+2}} & x_P \\ y_{q_i} & y_{q_{i+1}} & y_{q_{i+2}} & y_P \\ x_{q_i}^2 + y_{q_i}^2 & x_{q_{i+1}}^2 + y_{q_{i+1}}^2 & x_{q_{i+2}}^2 + y_{q_{i+2}}^2 & x_P^2 + y_P^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_{q_i} & x_{q_{i+1}} & x_{q_{i+2}} \\ y_{q_i} & y_{q_{i+1}} & y_{q_{i+2}} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \quad (5)$$

其中, 如图 3 所示, P 为插入点,  $q_i, q_{i+1}, q_{i+2}$  为凸耳三个顶点.

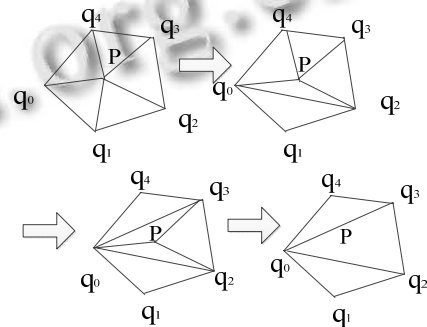


图 3 凸耳权值点删除过程

#### ②凸耳和空外接圆检测结合算法

结合凸耳和空外接圆检测算法不需要计算凸耳权值, 但需依次对每个凸耳进行空外接圆检测, 若凸耳外接圆不包含影响域其它节点, 符合空外接圆检测, 进行对角线交换.

#### ③影响域外围边三角剖分算法

影响域外围边三角剖分算法的基本思想为: 查找与删除点有关的三角形和边, 将其删除, 保留影响域边界, 若边界为简单多边形, 利用 LOP 法则, 直接进行三角剖分; 若边界为复杂多边形, 对边界节点中任意相邻三个节点进行检测, 若满足凸耳性质, 并且外接圆不包括其他边界节点, 该凸耳加入剖分三角形中, 继续进行剖分, 最后进行 LOP 优化.

## 2 约束线更新

约束线更新包括约束线插入与删除操作, 两者互为逆过程, 下面进行详细介绍.

### 2.1 约束线插入算法

约束线插入是将约束线与原始 D-TIN 进行重新构网的过程, 归纳总结目前主要有两种: 约束线特征点插入算法和约束线直接插入算法.

### ① 约束线特征点插入算法

Faugeras<sup>[14]</sup>、卢朝阳<sup>[15]</sup>、易法令<sup>[16]</sup>等国内外学者先后采用约束线特征点插入算法向 D-TIN 插入约束线, Faugeras 提出了“直接型”算法, 该算法具有无法同时考虑数据点和约束特征、添加的附加点数太多等局限性; 卢朝阳针对“直接型”算法的局限性, 提出了“对半划分增量型附加特征点插入”算法, 减少了插入附加点个数, 但应用性较差; 易法令提出了插入外接圆与约束边交点算法, 可以解决直接型算法的局限性, 算法的基本思想为: a. 基于点插入算法, 将约束线起点和终点插入原始 D-TIN; b. 确定与约束线相交的起始三角形; c. 将起始三角形外接圆与约束线的交点作为约束线特征点插入三角网中, 基于特征点及其影响域局部更新 D-TIN; d. 将约束线特征点作为约束线起点, 重复步骤 2-4, 直到新的起始三角形外接圆与终止三角形外接圆相交为止。

约束线特征点插入算法的优点是不用考虑影响域的凹凸性, 可以保证约束线插入过程中 D-TIN 全局剖分的完整性, 但当数据量比较大时, 算法效率低, 且容易改变原始 D-TIN 数据精度。

### ② 约束线直接插入算法

由于约束线特征点插入算法存在效率和精度问题, 因此国内外学者开展了大量有关约束线直接插入算法的研究, 该算法主要包含确定影响域和影响域重构两部分工作。根据约束线插入状态的不同, 可以将该算法分为两类: 一步法和两步法。

#### 1) 一步法

一步法也称静态插入法, 其基本思路是: 首先, 将插入线的两个端点和原始数据集进行重新构网; 其次, 结合插入线其它顶点, 查找与插入线相交的三角形边, 依次对以相交边为对角线的四边形进行对角线交换, 直到所有相交边处理完为止。一步法可以避免复杂的点定位判断, 但对 D-TIN 进行重新构网时间复杂度高, 因此一步法不适合 D-TIN 动态更新。

一步法采用对角线交换算法完成 D-TIN 局部重构, 大大提高了插入约束线的效率。国内外学者基于对角线交换法开展大量的研究, Sloan<sup>[17]</sup>首次提出对角线交换算法, 卢朝阳<sup>[39]</sup>先后提出了四边形对角线交换法和  $m+2$  边形对角线交换法。Choi<sup>[18]</sup>等采用“轨迹生成法”进行对角线交换, 即从约束线一端出发, 依次进行对角线交换, 直到约束边嵌入。但遇到凹四边形、影响域

内有悬点、插入线与三角形边重合或者相切等情况时, 对角线交换会失败。周晓云<sup>[40]</sup>对“轨迹生成法”进行了改进, 结合边界裁剪技术, 实现了对散乱数据点的三角剖分, 但该算法无法对凹四边形进行对角线交换。为了解决凹四边形的对角线交换的问题, Bern 和 Eppstein<sup>[41]</sup>给出基于边交换的约束 Delaunay 三角剖分算法总是收敛的证明, 因此可以得出采用对角线交换算法可以实现凹多边形约束 Delaunay 三角剖分算法收敛的结论, 该结论成为改进算法的理论基础。李立新<sup>[42]</sup>提出了循环算法和递减排法(也叫循环回溯法), 但证明前提有错误, 章孝灿<sup>[43]</sup>给出了完善的证明。循环回溯法在进行对角线交换时, 需要记录未做处理的相交边, 实现比较复杂, 循环算法简单, 易于实现, 但影响域较复杂时, 要进行一些重复的判断与交换。徐道柱<sup>[44]</sup>对循环算法做了改进, 减少了对角线的判断量, 并考虑了对角线的上下三角形组成的仍是三角形的情况。蒋红斐<sup>[45]</sup>采用搜索与约束线不相交的对角线, 然后用这些对角线去剖分影响域, 避免对角线交换中的回溯现象, 效率较高。陈学工<sup>[46]</sup>结合插入点和角线交换思想, 提出了“插入-交换”算法, 解决了影响域进行角线交换时遇到凹四边形的情况, 但添加附件点会改变原始数据的精度。宋晓眉<sup>[47]</sup>采用递归割耳法成功嵌入约束线段, 解决了影响域为凹边形和包含悬挂点的难题。陈学工<sup>[48]</sup>针对文献[49]中出现的问题, 提出了“分裂约束线”思想, 解决了约束线与三角形边重合或者相切的情况。

目前, 基于对角线交换的约束线插入算法可以归纳为以下三种方法:

① 循环回溯法: 依次查找与约束线相交的三角形边, 若以相交边为对角线的四边形是凸四边形, 则直接进行对角线交换; 若为凹四边形时, 先不做处理, 寻找下一条与约束线相交的边, 当以相交边为对角线的四边形为凸四边形时, 进行对角线交换, 并对之前未处理的相交边进行对角线交换, 直到处理完最后一条相交边为止。图 4 为循环回溯算法的实现过程示意图。

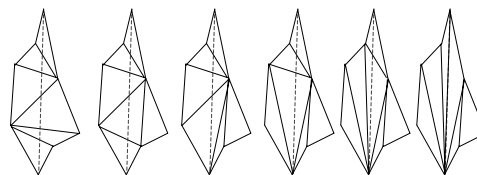


图 4 循环回溯算法对角线交换过程

②循环算法: 查找与约束线相交的三角形边, 依次检测以相交边为对角线的四边形的凹凸性, 只对凸四边形进行对角线交换, 当处理完所有对角线时, 结束该轮的对角线交换; 重新查找与约束线相交的三角形边, 依次开始新一轮的对角线交换, 直到约束线嵌入为止。

③插入-交换算法: 查找与约束线相交的三角形边, 依次检测以相交边为对角线的四边形的凹凸性, 若为凸四边形, 进行对角线交换; 若为凹四边形, 确定约束线与相交边的交点, 连接交点与凹四边形顶点生成 4 个三角形, 以该交点为起点继续插入约束线, 遇到凸四边形直接进行对角线交换, 若为凹四边形, 则做相同处理。该算法将点插入和对角线交换结合使用, 处理凹四边形情况时生成的 4 个三角形有 3 个符合 Delaunay 特性, 可以减少影响域内三角形的个数。图 5 为插入-交换算法的实现过程示意图。

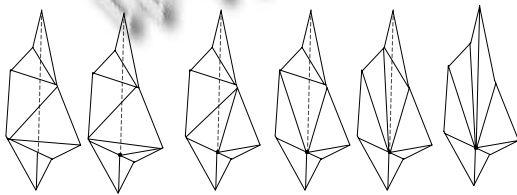


图 5 插入-交换算法对角线交换过程

## 2) 两步法

两步法也称动态插入法, 由于进行 D-TIN 更新时, 经常需要向 D-TIN 中动态插入约束线, 因此国内外学者大多采用两步法进行 D-TIN 动态更新的研究。该算法基本思想为: 首先, 在原始 D-TIN 中, 定位约束线起点和终点所在的三角形; 然后, 确定与约束线相交的三角形构成的影响域, 保留影响域边界, 删除与约束边相交的三角形边; 最后, 将影响域分为两个多边形区域, 对两个多边形区域进行三角剖分。

在对多边形区域进行三角剖分的研究中, 卢朝阳<sup>[19]</sup>、刘学军<sup>[23]</sup>等以约束线为基边, 采用距离最近原则寻找第三个点构造三角形, 接着以该三角形另外两边为基边, 继续按照距离最近原则寻找第三个点, 最后对影响域进行 LOP 优化; 蒲浩<sup>[20]</sup>、宋占峰<sup>[21]</sup>、刘少华<sup>[32]</sup>、王永会<sup>[50]</sup>等按照角度最大原则寻找第三个点, 该方法可以直接生成符合 Delaunay 特性的三角网, 不用进行 LOP 优化处理; 宋占峰<sup>[51]</sup>采用递归算法, 对影响域进行三角剖分; 宋晓宇<sup>[52]</sup>基于最大外接圆原则寻

找第三个点, 生成的三角网符合外接圆检测; 宋晓眉<sup>[47]</sup>基于递归剖耳法进行影响域的三角剖分, 解决了影响域为凹边形和存在悬挂点的问题; 卢扣<sup>[53]</sup>基于最小正切值原则寻找第三个点, 并验证利用该原则剖分的三角网满足可见性和最小角最大性质, 缩短了搜索第三个点的时间。

两步法适合 D-TIN 动态更新, 但该方法需要进行约束线端点定位, 影响域重构时需比较距离或角度大小, 计算较复杂, 相比一步法实现效率低。在实际应用中需将一步法和两步法结合使用。

## 2.2 约束线删除算法

删除约束线是插入约束线的逆过程, 通过去掉约束线的拓扑关系进行删除操作。Lu<sup>[22]</sup>很早提出了约束线删除算法, 算法的基本思想是: 删除所有以约束线为边的三角形, 基于这些三角形构成影响域, 对影响域进行重构; 刘学军<sup>[23, 24]</sup>通过交换对角线去掉散点间的约束关系, 删除约束线。王彦兵<sup>[25]</sup>针对约束 D-TIN 的多态性, 将删除约束线分为有虚点和无虚点两类进行分析, 无虚点时利用王彦兵<sup>[26]</sup>提出的一体化凸耳消元法进行删除, 有虚点时, 确定虚点影响域, 以约束边为基边, 对影响域重新进行三角剖分。约束线删除算法可以看成插入算法的逆过程, 算法中的关键技术如影响域重构、对角线交换等已经在前面进行了具体介绍, 具体操作步骤和点删除算法相同, 将不再具体阐述。

## 3 总结与展望

随着 D-TIN 生成算法研究相对成熟, 动态更新算法研究越来越受到人们的重视, 面对海量数据, 对已建成的 D-TIN 进行局部更新成为了研究的重点。目前 D-TIN 更新算法研究存在大量的不足之处, 其一是研究不够深入和细致, 大部分停留在对点、约束线的插入和删除等简单的操作, 更新结果较为粗糙。在实际应用中, 会遇到很多复杂的情况如复杂的曲线、曲面等, 国内外学者在这些方面的研究成果很少。其二是人们将研究重点放在时间效率与空间效率的提高上, 忽略了更新精度的问题, 更详尽的精度评价工作有待进一步展开, 同时在实际应用中, 局部重新构网和原三角网的衔接问题很少有文献涉及, 应该成为今后研究的重要方向。其三是实际应用中存在多种数据源, 不同数据源进行 D-TIN 的生成与动态更新方法的选择

问题尚未见研究。

D-TIN 在地理学、数字高程模型、三维可视化等很多领域应用广泛。由于坐标、温度、降雨量等区域离散数据具有较强的动态变化性、DEM 模型时效性差、三维可视化的动态交互要求日趋重要,因此开展有关 D-TIN 更新算法的研究已成为 D-TIN 进一步发展及应用的必然。

### 参考文献

- 1 Lawson CL. Generation of a triangular grid with applications to contour plotting. Jet Pollution Laboratory, 1972, 299: 2.
- 2 Tsai VJD. Delaunay triangulations in TIN creation: an overview and a linear-time algorithm. International Journal of Geographical Information Science, 1993, 7(6): 501-524.
- 3 Schrijvers. Insertions and deletions in Delaunay triangulations using guided point location [Ph.D. Thesis]. Netherlands, Eindhoven: Eindhoven University of Technology, 2012.
- 4 Liu JF, Yan JH, Lo SH. A new insertion sequence for incremental Delaunay triangulation. Acta Mechanica Sinica, 2013, 29(1): 99-109.
- 5 Devillers O. Delaunay triangulations, theory vs practice. In: Didimo W, Liotta G, eds. 28th European Workshop on Computational Geometry. Assisi, Italy. Bas Nieuwenhuizen. 2012. 1-7.
- 6 贾晓林, 吴立新, 王彦兵. 二维 Delaunay 三角网局部更新: 点插入与点删除. 地理与地理信息科学, 2004, 20(5): 28-31.
- 7 陈楚江, 王德峰. 海量数据 CDT 快速建立及其实时更新. 测绘学报, 2002, 31(3): 262-265.
- 8 Aggarwal A, Guibas LJ, Saxe J, Shor PW. A linear-time algorithm for computing the Voronoi diagram of a convex polygon. Discrete & Computational Geometry, 1989, 4(1): 591-604.
- 9 Heller M. Triangulation algorithms for adaptive terrain modeling. Proc. 4th Internat Sympos Spatial Data Handling. 1990. 163-174.
- 10 Devillers O. On deletion in Delaunay triangulations. International Journal of Computational Geometry & Applications, 2002, 12(03): 193-205.
- 11 Devillers O. Vertex removal in two-dimensional Delaunay triangulation: Speed-up by low degrees optimization. Computational Geometry, 2011, 44(3): 169-177.
- 12 Mostafavi MA, Gold C, Dakowicz M. Delete and insert operations in Voronoi/Delaunay methods and applications. Computers & Geosciences, 2003, 29(4): 523-530.
- 13 孟亮, 方金云, 唐志敏. Delaunay 三角网表示和点删除方法. 计算机工程与设计, 2008, 29(3): 738-740.
- 14 Faugeras O. Three-dimensional computer vision: a geometric viewpoint. Cambridge: MIT press, 1993.
- 15 卢朝阳, 吴成柯. 满足全局 Delaunay 特性的带特征约束的散乱数据最优三角剖分. 计算机学报, 1997, 20(2): 118-124.
- 16 易法令, 韩德志. 带特征线约束的 Delaunay 三角剖分最优算法的研究及实现. 计算机工程, 2001, 27(6): 32-34.
- 17 Sloan SW. A fast algorithm for constructing Delaunay triangulations in the plane. Advances in Engineering Software (1978), 1987, 9(1): 34-55.
- 18 Choi BK, Shin HY, Yoon YI. Triangulation of scattered data in 3D space. Computer-aided design, 1988, 20(5): 239-248.
- 19 卢朝阳, 吴成柯. 任意多边形内带特征约束的散乱数据的最优三角剖分. 计算机辅助设计与图形学学报, 1997, 9(4): 302-308.
- 20 蒲浩, 詹振炎, 宋占峰. 约束 Delaunay 三角化在路线设计中的应用及其生成算法研究. 中国公路学报, 2002, 15(2): 22-27.
- 21 宋占峰, 詹振炎. Delaunay 三角网剖分中嵌入约束边的局部调整算法. 西南交通大学学报, 2002, 37(4): 399-402.
- 22 Lu YZ. Dynamic Constrained Delaunay Triangulation and Application To Multichip Module Layout [Ph.D. Thesis]. USA: University of California at Santa Cruz, 1991.
- 23 刘学军, 龚健雅. 约束数据域的 Delaunay 三角剖分与修改算法. 测绘学报, 2001, 30(1): 82-88.
- 24 刘学军, 赵吉先. 三角网数字地面模型的动态修改与编辑. 中国公路学报, 2000, 13(4): 16-20.
- 25 王彦兵, 吴立新, 史文中. 基于虚点影响域重构的 CD-TIN 约束线删除算法. 武汉大学学报(信息科学版), 2005, 30(10): 5.
- 26 王彦兵, 吴立新, 贾晓林, 史文中. 约束 Delaunay 三角网点删除的一体化凸耳消元法. 地理与地理信息科学, 2004, 20(6): 31-34.
- 27 蒲浩, 宋占峰. 快速构建三角网数字地形模型方法的研究. 中国铁道科学, 2001, 22(6): 100-105.
- 28 胡金星, 马照亭, 吴焕萍, 潘懋. 基于格网划分的海量数据

- Delaunay 三角剖分.测绘学报,2004,33(2):163-167.
- 29 吴宇晓,张登荣.生成 Delaunay 三角网的快速合成算法.浙江大学学报(理学版),2004,31(3):343-348.
- 30 邹永贵,张涛.改进的平面域 Delaunay 三角网生成算法.计算机工程与应用,2013,49(20): 171-174.
- 31 宋占峰,蒲浩.基于三角网数字地面模型快速定位算法的研究.中国铁道科学,2002,23(1):63-66.
- 32 刘少华,程朋根,况化智,陈红华.Delaunay 三角网嵌入约束线段算法的研究及三维可视化.华东地质学院学报,2003,26(1):82-86.
- 33 刘学军,符铎.三角网数字地面模型快速构建算法研究.中国公路学报,2000,13(2):31-36.
- 34 郭兆胜,张登荣.一种改进的高效 Delaunay 三角网的生成算法.遥感信息,2005,(1):15-17.
- 35 许建中,马利庄.改进的 Delaunay 三角网渐次插入生成算法.计算机工程,2008,34(17):254-256.
- 36 李小秋,许民献,尹志永.Delaunay 三角网关键技术探讨.测绘工程,2011,20(6):61-63.
- 37 Chew LP. Constrained delaunay triangulations. Algorithmica, 1989, 4(1-4): 97-108.
- 38 张咏,刘长星,董汉军,赵奋军.二维 Delaunay 三角网的任意点删除算法研究.地理与地理信息科学,2009,24(6):50-53.
- 39 卢朝阳,吴成柯,陆心如.简单多边形的优化三角剖分.电子学报,1991,19(2):82-87.
- 40 周晓云,何大曾.实现平面上散乱数据点三角剖分的算法.计算机辅助设计与图形学学报,1994,6(4):256-259.
- 41 Bem M, Eppstein D. Mesh generation and optimal triangulation. Computing in Euclidean Geometry, 1992, 1: 23-90.
- 42 李立新,谭建荣.约束 Delaunay 三角剖分地嵌入约束边的多对角线交换算法.计算机学报,1999,22(10):1114-1118.
- 43 章孝灿.快速高精度 DEM 生成技术研究[博士学位论文].杭州:浙江大学,2002.
- 44 徐道柱,刘海砚.大量约束边条件下 Delaunay 三角网的快速生成.测绘工程,2007,16(3):6-10.
- 45 蒋红斐,詹振炎.约束边强行嵌入三角网的算法研究.华中科技大学学报(自然科学版),2001,(7):104-105.
- 46 陈学工,黄晶晶.Delaunay 三角网剖分中的约束边嵌入算法.计算机工程,2007,33(16):56-58.
- 47 宋晓眉,张晓东,李建林.一种高准确度的约束 Delaunay 三角网生成算法研究.地理与地理信息科学,2009,25(1): 99-102.
- 48 陈学工,李源,曹建,肖克炎.Delaunay 三角网剖分的约束边嵌入改进算法.计算机工程与应用, 2009,45(24):235-237.
- 49 Hjelle Y, Dahlen M. Constrained Delaunay Triangulation. Triangulations and Applications. Berlin Heidelberg: Springer, 2006: 113-129.
- 50 王永会,吴刚.大量约束边条件下构建约束 Delaunay 三角网的研究.测绘科学,2009,34(10):117-118.
- 51 宋占峰,詹振炎,蒲浩.约束 Delaunay 三角剖分动态算法研究.中国公路学报,2002,15(3):18-22.
- 52 宋晓宇,戚爱伟,王永会.基于最大外接圆的约束 Delaunay 三角剖分算法.沈阳建筑大学学报(自然科学版),2009, 24(6):1094-1098.
- 53 卢扣,李明峰,管莉莉,陈春晖.基于最小正切值的约束 Delaunay 三角剖分.南京工业大学学报(自然科学版), 2010,32(5):96-99.