地铁环境下时变公交网络的最优路算法①

徐 勇, 贾 欣, 王 哲, 王翠柳

(河北工业大学 理学院, 天津 300401)

摘 要: 通过建立图论模型实现了地铁环境下时变公交网络的出行优化问题. 首先, 建立了公交地铁网络图及基于此网络图的二分图、映射网络图, 并对地铁线路上站点间的权值进行合理倍数的缩小以达到优选地铁的目的. 同时, 考虑到地铁与公交的时变性, 即是否在它们的运营时间段内直接关系到查询到的最优路径. 然后给出以换乘次数少为目标的最优路径选择算法. 最后用实例来验证了该算法的有效性.

关键词: 最优路径; 时变性; 映射网络图; 二分图; 多部图

Mathematical Programming Model and Algorithm for Time-Varying Transit Network Based on the Environment of Subway

XU Yong, JIA Xin, WANG Zhe, WANG Cui-Liu

(School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China)

Abstract: The optimization of travel for time-varying transit network based on the environment of subway is realized through the establishment of graph theory model. First, bus and subway network graph, bipartite graph and mapping network graph which is based on the network graph are established. The weight between two subway stations is appropriately reduced in order that we can optimize subway. Meanwhile, time variation of bus and subway is considered in this paper. Whether the time we travel is in their operational period is directly related to the optimal path queried. Then, the optimal path selection algorithm based on the purpose of less transfer times and short distance is given. Finally, we use a numerical example to illustrate the solution process of the proposed method.

Key words: optimal path; time variation; mapping network graph; bipartite graph; multipartite graph

随着社会经济的迅猛发展, 人们对生活品质的追求日益提高. 而我国的公共交通系统不够发达, 使得人们在选择出行路径时存在困难, 因此建立一个发达的公交出行信息查询系统就显得尤为重要.

目前, 我国尚未开发出一个可行的公交出行信息查询系统, 但已有一些得到应用的算法, 主要有基于图论的最短路算法[1-6], 基于数据库的查询算法[7-10], 基于矩阵的查询算法[11,12], 而这些算法可能由于换乘次数太多而无法得以应用, 又或者在应用的同时搜索到大量不合理的路径, 容易产生维数爆炸问题, 难以用于大规模的公交网络.

考虑到算法的实用性, 本文将公交地铁的时变性同时加以研究, 并顾及到地铁在公共交通中越来越大的优势, 给出了地铁环境下时变的公交网络的最优路选择算法. 我们的目的是无论何时查询, 系统都会给出此时可乘坐的最优线路的方案, 避免由于运营时间的问题查询到不可行的出行方案. 而地铁是城市公交系统的骨架, 由于它的快捷性、准时性、舒适性越来越受到乘客的青睐, 那么我们在研究时就要将优选地铁这一因素考虑在内. 本文将地铁的这些优势转化为对地铁线路上站点之间权值的适当缩小, 缩小权值后的地铁线路可与公交线路进行一体化考虑, 这样就达到了优选地铁的目的. 公交地铁网络图、线路映射网络图及多部图等数学模型对算法的研究起到关键

① 基金项目:河北省自然科学基金(A2013202198);国家大学生创新创业训练计划(201310080030)
收稿时间:2014-04-18;收到修改稿时间:2014-05-16

的作用, 我们运用以上图论模型及高维数组[12-13]等理论给出地铁公交一体化下的时变公交网络的最优路径求解算法.

1 公交地铁网络的建立及图论模型与优化

1.1 公交地铁网络模型的建立及一些记法

公交地铁网络是由若干条公交线路和地铁线路及这些线路上若干个站点组成的, 每个线路上有多个站点, 每个站点也可能有多条线路通过.

考虑有 m 条公交或地铁线路, n 个公交或地铁站点的交通网络问题, 记站点集合 $S=\left\{S_1,\cdots,S_n\right\}$, 其中 $S_1,\cdots,S_n$ 为所有站点, 记线路集合 $L=\left\{L_1,\cdots,L_m\right\}$, 其中 $L_1,\cdots,L_m$ 为所有线路. 若站点 S_i 为线路 L_j 上的第 k 站, 我们记 $N_i^j=k$. 任意一条线路 L_k 都有其运营时间段 $\left[T_1^k,T_2^k\right]$, 其中 T_1^k 表示运营开始时间, T_2^k 表示运营结束时间, 用 $w_{i,j}^k\left(t\right)$ 表示在时刻 t 线路 L_k 上站点 S_i 与站点 S_j 之间的距离, 即

$$w_{i,j}^k\left(t\right)=\begin{cases}\left|N_j^k-N_i^k\right|, & t\in\left[T_1^k,T_2^k\right]\\ 0\quad, & t\notin\left[T_1^k,T_2^k\right]\end{cases} \tag{1}$$

所有的 $w_{i,j}^k\left(t\right)$ 构成了一个三维数组 $W=\left[w_{i,j}^k\left(t\right)\right]_{n\times n\times m}$, 其中 i,j 表示公交地铁网络中站点 S_i 与站点 S_j, k 表示公交地铁网络中线路 L_k, $w_{i,j}^k\left(t\right)=0$ 表示在时刻 t 站点 S_i 与站点 S_j 不同时存在于线路 L_k 上或者时刻 t 不在运营时间段内.

我们用 $T\left(w_{i,j}^k\right)$ 表示在线路 L_k 上从站点 S_i 到达站点 S_j 所花费的时间, ξ_k 为线路 L_k 的等待时间, 它是一个随机变量, 若每过 t 时间发车一次, 则等候时间可以认为服从均匀分布, 即: $\xi_k\sim U[0,t]$.

1.2 图论模型

首先建立二分图, 将 n 个公交或地铁站点看做二分图的顶部顶点集, m 条公交或地铁线路看做二分图的底部顶点集. 在二分图中, 边 S_iL_j 的权值赋为 N_i^j, 若站点 S_i 为线路 L_j 的第 k 站, 则 $N_i^j=k$.

然后建立线路映射图, 将 m 条公交或地铁线路 $L_1,\cdots,L_m$ 作为顶点, 在二分图中, 若 $N\left(L_i\right)\cap N\left(L_j\right)\neq\varnothing$, 则存在连接 L_i,L_j 两顶点的一条边 L_iL_j, 特别地, 若 L_i,L_j 同时经过的站点不止一个, 也只需用一条边连接. 这样就得到公交地铁网络的线路映射图. 线路映射图可直观地反映乘客的换乘次数.

最后建立站点映射网络图, 将 n 个公交或地铁站点 $S_1,\cdots,S_n$ 作为顶点, 在二分图中, 若 $N\left(S_i\right)\cap N\left(S_j\right)\neq\varnothing$, 则存在连接 S_i,S_j 两顶点的一条边 S_iS_j, 且 S_iS_j 赋权 $w_{i,j}^k\left(t\right)$. 特别地, 若同时经过 S_i 与 S_j 站点的线路不止一条, 则在站点映射图中连接 S_i,S_j 的边就不止一个. 站点映射网络图不仅反映乘客的换乘次数, 而且展现出换乘站点.

1.3 包含地铁在内的公交网络模型的优化

本文依次以换乘次数少、路程最短对网络模型进行点到点路程优化. 如引言所说, 地铁在公共交通系统中占绝对优势. 如果只是单纯地计算最短路程势必是不可行的, 我们不妨将这些因素转化为地铁线路上的路径距离, 即合理倍数缩小地铁站点之间的权值, 转化后可将地铁与公交线路进行一体化考虑. 最后我们得到的最少换乘条件下的最短路不一定路程最短, 而是将地铁优势转化后的最优路.

如若某地铁线路 L_0 上有站点 S_1,S_2,S_3, 它们的标号分别为: $N_1^0=3,N_2^0=6,N_3^0=12$, 此线路运营时间为 $\left[t_1,t_2\right]$, 那么两两站点间权值在运营时段 $\left[t_1,t_2\right]$ 内为: $w_{1,2}^0\left(t\right)=3,\ w_{2,3}^0\left(t\right)=6,w_{1,3}^0\left(t\right)=9$, 经调查并研究该号地铁线路站点间权值可成 3 倍缩小, 缩小后权值依次为: $w_{1,2}^0\left(t\right)=1,w_{2,3}^0\left(t\right)=2,w_{1,3}^0\left(t\right)=3$.

2 基于映射网络图的数学规划求解算法

2.1 基于线路映射网络图的最小换乘次数算法

第 1 步: 据公交地铁网络图中站点与线路的关联关系确定途经出发站 S_i 的线路集合 $l^1=\left\{L_1^1,L_2^1,\cdots,L_{n_1}^1\right\}$, 途径目的地站点 S_j 的线路集合 $l^e=\left\{L_1^e,L_2^e,\cdots,L_{n_e}^e\right\}$.

第 2 步: 在已求得 $l^1,l^2,\cdots,l^k$ 的情况下给出 l^{k+1} 的算法: 对于任一 $L_p^k\in l^k,p=1,\cdots,n_k$, 在线路映射网络图中的结点集 $L-\bigcup\limits_{q=1}^{k}l^q$ 中搜索 L_p^k 的相邻结点 $N\left(L_p^k\right)$, 则 $l^{k+1}:=\bigcup\limits_{p=1}^{n_k}N\left(L_p^k\right)$, 若 $l^{k+1}\cap l^e\neq\varnothing$, 则令 $l^{k+1}:=l^{k+1}\cap l^e$, 生成多部图 $G=\left\{l^1,l^2,\cdots,l^{k+1},E\right\}$,

转下步; 否则, 令 $k=k+1$, 转本步.

第 3 步: 依次删掉 $l^f, f=k,k-1,\cdots,1$ 中在 l^{f+1} 中度为 0 的结点, 若记 L_g^f 在 l^{f+1} 中相邻线路集合为 $N\left(L_g^f, l^{f+1}\right)$, 即删掉 $N\left(L_g^f, l^{f+1}\right)=\varnothing$ 的 L_g^f.

此时得到换乘次数最少的全部线路, 即约简多部图, 同时得到最少换乘次数为 v. 线路映射网络图也可直观地展现换乘次数.

2.2 基于站点映射网络图的最短路算法

我们研究地铁与公交一体化下的最优路径算法时, 首先按照 2.3 将模型优化. 本节考虑优化后的模型, 即将地铁线路与公交线路进行一体化研究.

由 2.1 已得出最少换乘次数为 v, 本节实现最少换乘次数下的最短路选择, 如下:

$$
\begin{aligned}
\min\ & w_{i,r_1}^{k_1}\left(t+\xi_{k_1}\right)+w_{r_1,r_2}^{k_2}\left(t+\xi_{k_1}+T\left(w_{i,r_1}^{k_1}\right)+\xi_{k_2}\right)+\\
& w_{r_2,r_3}^{k_3}\left(t+\xi_{k_1}+T\left(w_{i,r_1}^{k_1}\right)+\xi_{k_2}+T\left(w_{r_1,r_2}^{k_2}\right)+\xi_{k_3}\right)+\\
& \cdots+w_{r_v,j}^{k_{v+1}}\left(t+\xi_{k_1}+T\left(w_{i,r_1}^{k_1}\right)+\sum_{p=2}^{v}\left(\xi_{k_p}+T\left(w_{r_{p-1},r_p}^{k_p}\right)\right)+\xi_{k_{v+1}}\right)\\
s.t.\ \ & w_{i,r_1}^{k_1}\left(t+\xi_{k_1}\right)>0, L_{k_1}\in l^1;\\
& w_{r_1,r_2}^{k_2}\left(t+\xi_{k_1}+T\left(w_{i,r_1}^{k_1}\right)+\xi_{k_2}\right)>0, L_{k_2}\in l^2;\\
& w_{r_2,r_3}^{k_3}\left(t+\xi_{k_1}+T\left(w_{i,r_1}^{k_1}\right)+\xi_{k_2}+T\left(w_{r_1,r_2}^{k_2}\right)+\xi_{k_3}\right)>0, L_{k_3}\in l^3;\\
& \vdots\\
& w_{r_v,j}^{k_{v+1}}\left(t+\xi_{k_1}+T\left(w_{i,r_1}^{k_1}\right)+\sum_{p=2}^{v}\left(\xi_{k_p}+T\left(w_{r_{p-1},r_p}^{k_p}\right)\right)+\xi_{k_{v+1}}\right)>0,\\
& L_{k_{v+1}}\in l^{v+1}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

其中站点 $r_1,r_2,\cdots,r_v$ 分别为线路 L_{k_1} 与 L_{k_2}, L_{k_2} 与 L_{k_3}, …, L_{k_v} 与 $L_{k_{v+1}}$ 之间的转乘站点. 此时, 我们得到最少换乘条件下的最短路. 站点映射网络图可直观地展现换乘次数及换乘站点.

注 1. 公式(2)中的含义与 1.1 节和 2.1 节的符号含义相同.

注 2. 公式(2)给出的优化问题实质是多部图 $G=\{l^1,l^2,\cdots,l^{v+1},E\}$ 上的最短路问题, 存在多项式算法, 如: Dijkstra 算法.

注 3. 考虑线路花费时间 $T(w_{u,v}^k)$ 的实际计算问题, 当 L_k 为常规的公交汽车线路, 则需要考虑时变性, 不同时段线路花费时间不同; 当 L_k 为地铁线路时, 由于地铁准时性, 线路花费时间可以按常值计算.

3 算例

我们考虑由 1 条地铁线路 L_0、8 条公交线路 $L_1,L_2,\cdots,L_8$ 及 9 个公交或地铁站点 $S_1,S_2,\cdots,S_9$ 组成的公交地铁网络, 如图 1. 站点在线路上的标号可如下表示:

$$L_0: N_3^0=1, N_4^0=5, N_8^0=10$$

$$L_1: N_1^1=2, N_3^1=5, N_5^1=7$$

$$L_2: N_1^2=3, N_2^2=7$$

$$L_3: N_2^3=1, N_4^3=4$$

$$L_4: N_5^4=2, N_6^4=7$$

$$L_5: N_6^5=3, N_7^5=6$$

$$L_6: N_7^6=4, N_9^6=8$$

$$L_7: N_6^7=1, N_9^7=6$$

$$L_8: N_8^8=3, N_9^8=8$$

已知各地铁或公交线路的运营时间区间如下:

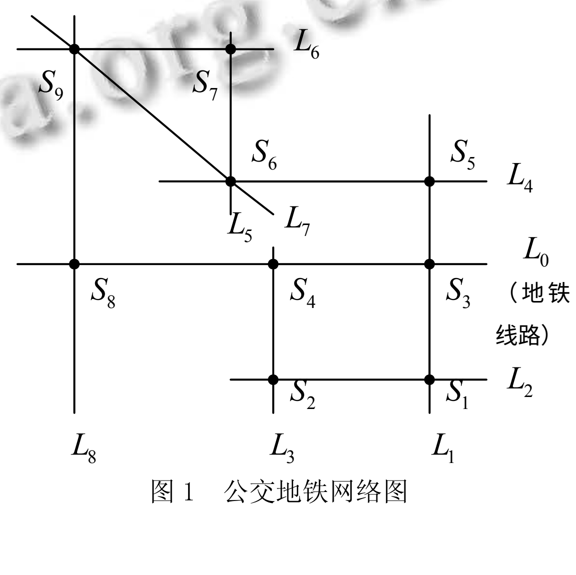

图 1 公交地铁网络图

$L_0: 6:00-23:00$　$L_1: 5:30-22:30$　$L_2: 6:00-22:00$
$L_3: 5:30-22:00$　$L_4: 5:40-22:30$　$L_5: 6:00-22:00$
$L_6: 6:30-22:20$　$L_7: 6:40-22:20$　$L_8: 5:30-23:00$

图 1 的线路映射网络图如图 2.

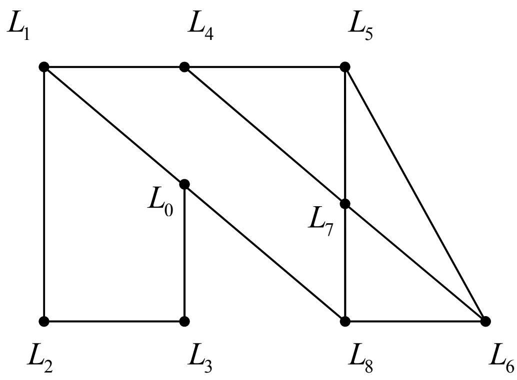

图 2 图 1 的线路映射网络图

考查站点 S_1 到站点 S_9 的最少换乘最短路问题. 利用 2.1 中查询线路第一步, 首先得到: $l^1=\{L_1,L_2\}$, $l^e=\{L_6,L_7,L_8\}$, 由图 2 搜索得到 $l^2=\{L_4,L_0,L_3\}$, $l^3=\{L_5,L_7,L_8\}$, 因为 $l^3\cap l^e\neq\varnothing$, 得: $l^3:=l^3\cap l^e=\{L_7,L_8\}$, 由此生成的多部图为 $G=\{l^1,l^2,l^3,E\}$, 见图 3.

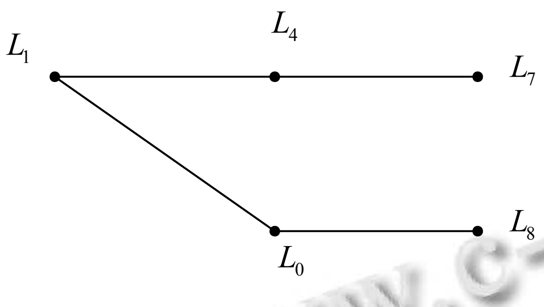

图 3 查询线路第二步生成的多部图

按照查询线路第三步约简多部图, $N(L_3,l^3)=\varnothing$, 所以在 l^2 中删掉 L_3, 进而 $N(L_2,l^2)=\varnothing$, 所以在 l^1 中删掉 L_2, 经约简后得到的多部图中有:

$l^1=\{L_1\}$,

$l^2=\{L_4,L_0\}$,

$l^3=\{L_7,L_8\}$, 如图 4.

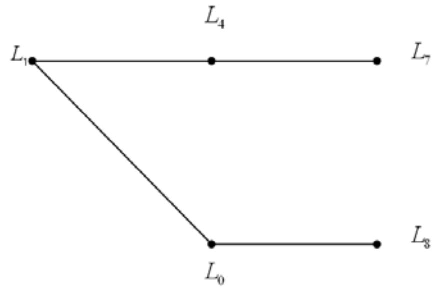

图 4 查询线路第三步生成的约简多部图

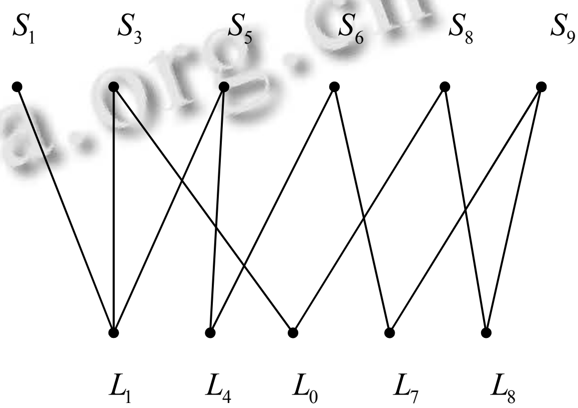

图 5 约简多部图的二分图

据图 4 的约简多部图, 我们得到约简后剩余的线路关联的站点集合, 从而得到约简多部图的二分图及约简的线路映射网络图, 如图 5、6, 换乘次数为 2 次.

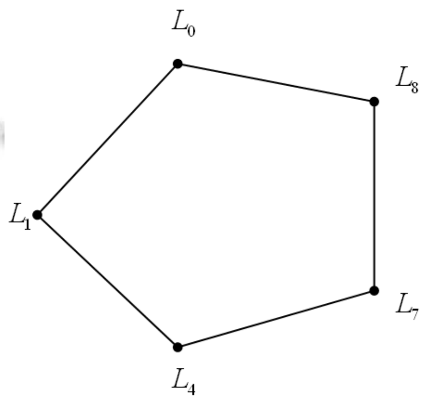

图 6 约简二分图的线路映射网络图

简约后的站点在线路上的标号可如下表示:

$L_0:N_3^0=1,N_8^0=10$

$L_1:N_1^1=2,N_3^1=5,N_5^1=7$

$L_4:N_5^4=2,N_6^4=7$

$L_7:N_6^7=1,N_9^7=6$

$L_8:N_8^8=3,N_9^8=8$

据 2.3 中算法来优化模型, 若该模型中地铁线路上站点间权值的合理缩小倍数为 3 倍, 即将原本的 $w_{3,8}^{0}\left(t\right)=9$ 改为缩小后的 $w_{3,8}^{0}\left(t\right)=3$, 进而可将地铁线路与公交线路进行一体化考虑. 另外, 其余公交线路上站点间权值为: $w_{1,3}^{1}\left(t\right)=3$　$w_{3,5}^{1}\left(t\right)=2$　$w_{1,5}^{1}\left(t\right)=5$　$w_{5,6}^{4}\left(t\right)=5$　$w_{6,9}^{7}\left(t\right)=5$　$w_{8,9}^{8}\left(t\right)=5$. 此时的站点映射网络图如图 7.

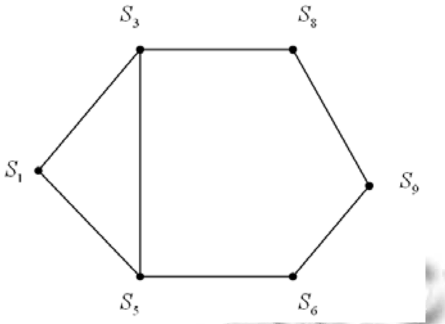

图 7　约简二分图的站点映射网络图

若查询时刻为 8:00, 且给出 L_0, L_1, L_4, L_7, L_8 的发车频率为每小时 12,3,4,3,5 班, 则有:

$\xi_0 \sim U[0,5]$, $\xi_1 \sim U[0,20]$, $\xi_4 \sim U[0,15]$, $\xi_7 \sim U[0,20]$, $\xi_8 \sim U[0,12]$, 对应的优化问题(2)为:

$$
\begin{aligned}
\min \Big\{ & w_{1,5}^{1}\left(t+\xi_1\right)+w_{5,6}^{4}\left(t+\xi_1+T\left(w_{1,5}^{1}\right)+\xi_4\right) \\
& +w_{6,9}^{7}\left(t+\xi_1+T\left(w_{1,5}^{1}\right)+\xi_4+T\left(w_{5,6}^{4}\right)+\xi_7\right), \\
& w_{1,3}^{1}\left(t+\xi_1\right)+w_{3,8}^{0}\left(t+\xi_1+T\left(w_{1,3}^{1}\right)+\xi_0\right) \\
& +w_{8,9}^{8}\left(t+\xi_1+T\left(w_{1,3}^{1}\right)+\xi_0+T\left(w_{3,8}^{0}\right)+\xi_8\right)\Big\} \\
s.t.\quad & w_{1,5}^{1}\left(t+\xi_1\right)>0; \\
& w_{5,6}^{4}\left(t+\xi_1+T\left(w_{1,5}^{1}\right)+\xi_4\right)>0; \\
& w_{6,9}^{7}\left(t+\xi_1+T\left(w_{1,5}^{1}\right)+\xi_4+T\left(w_{5,6}^{4}\right)+\xi_7\right)>0; \\
& w_{1,3}^{1}\left(t+\xi_1\right)>0; \\
& w_{3,8}^{0}\left(t+\xi_1+T\left(w_{1,3}^{1}\right)+\xi_0\right)>0; \\
& w_{8,9}^{8}\left(t+\xi_1+T\left(w_{1,3}^{1}\right)+\xi_0+T\left(w_{3,8}^{0}\right)+\xi_8\right)>0
\end{aligned}
$$

可得站点 S_1 到站点 S_9 的最优换乘为: $S_1 \xrightarrow{L_1} S_3 \xrightarrow{L_0} S_8 \xrightarrow{L_8} S_9$. 从站点 S_1 到站点 S_9 的乘车距离为: $w_{1,3}^{1}\left(t\right)+w_{3,8}^{0}\left(t\right)+w_{8,9}^{8}\left(t\right)$=3+3+5=11. 假设每两站点间运行时间均为 3 分钟(地铁两站点间花费时间短这一因素已在缩小站点间权值时合理转化), 从站点 S_1 到站点 S_9 花费时间在[33,70]分钟之间, 平均为 51.5 分钟, 到达时刻为[8:33,9:10]之间, 平均到达时刻为 8:51.5.

4　结语

本文考虑了地铁环境下公交网络的出行优化问题, 换乘算法综合考虑了公交换乘等车时间, 乘车时间, 这样利用该算法可以计算到达目的地的时刻. 地铁在城市公交网络中的作用日益变大, 我们有必要更深入地探究关于地铁占主导地位的城市公交网络模型. 另外, 现有的公交网络优化算法很少将公交的时变性考虑在内, 可见关于公交的时变性仍需我们深入探讨. 另外, 综合考虑出行费用的时变公交网络出行优化问题也需要进一步研究. 本文为时变的公交地铁网络模型提供了算法和理论, 也为公交网络构建和公交配流问题提供了一定的思路.

参考文献

1 徐勇,李杰,张军芳,等.新型公交网络模型与最优线路选择算法.系统工程理论与实践,2011,31(11):2234–2240.
2 闫小勇,尚艳亮.基于二部图模型的公交网络路径搜索算法.计算机工程与应用,2010,46(5):246–248.
3 王海帅,冀振燕,王森.公交线路查询算法.计算机系统应用,2013,2:88–91.
4 商丽媛,张全信.一种改进的公交网络最优路径算法.数学的实践与认识,2009,39(1):167–171.
5 陈小辉.公交网络最优路径选择算法研究.科学技术与工程.2009,9(11): 3141–3143.
6 姚春龙,李旭,沈岚.公共出行最优路径搜索的有向赋权图模型.计算机应用研究,2013,30(4):1058–1063.
7 梁虹,袁小群,刘蕊.一种新的公交数据模型与公交查询系统实现.计算机工程与应用,2007,43(3):234–238.
8 伍雁鹏,彭小奇,杨恒伏.改进的基于关系数据库技术的公交查询算法.中南大学学报(自然科学版),2009,40(3):763–766.
9 伍雁鹏,彭小奇,黄同成.基于路径集合运算的公交网络寻径算法研究.计算机科学,2009,36(6):239–272.
10 王世祥,饶维亚.数据库系统中公交网络换乘线路的优化选择模型.计算机系统应用,2008,17(4):112–116.
11 张林峰,范炳全,吕智林.公交网络换乘矩阵的分析与算法.系统工程,2003,21(6):92–96.
12 刘旭浩,徐勇.基于半张量积理论的公交网络查询.复杂系统与复杂性科学,2013,10(1):38–44.
13 程代展,齐洪胜.矩阵的半张量积理论与应用.北京:科学出版社,2007.