

基于近似弧长参数化的机器人轨迹规划^①

郝卫东, 李 君, 闫 伟, 陈志丹, 梁卫鸽, 邓阳光

(桂林电子科技大学 机电工程学院, 桂林 541004)

摘 要: 主要研究了采用近似弧长参数化的插值方法进行关节式工业机器人的轨迹规划. 运用近似弧长参数化的插值方法将机器人末端轨迹参数曲线离散为等弧长的插值点序列, 通过机器人逆向运动学求解各关节的位移点序列, 采用极限的方法进行各关节速度和加速度规划. 这种轨迹规划方法可以避免关节空间的插值计算和雅克比矩阵的计算. 在 matlab7.8 平台上, 对近似弧长参数化的插值方法、轨迹规划及可行性验证进行了实例仿真, 仿真结果表明该轨迹规划方法是可行的.

关键词: 关节式机器人; 轨迹规划; 弧长参数化; 线性有理函数; Mtlab 仿真

Trajectory Planning of Robot Based on Nearly Arc-Length Parameterize Curve

HAO Wei-Dong, LI Jun, YAN Wei, CHEN Zhi-Dan, LIANG Wei-Ge, DENG Yang-Guang

(Mechanical Engineering, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: This paper mainly studied the joint type arc length parametric industrial robot trajectory planning method. Using the approximation of the arc length parametric curve interpolation method to end the robot trajectory parameters for arc such as discrete interpolation point sequence, the displacement of each joint point by solving inverse kinematics of robot sequences adopts the method of the limit of velocity and acceleration of each joint planning. This method is effective to avoid the joint space interpolation calculation and jacobian matrix calculation. In matlab7.8 platforms, the instance simulation is carried out on the above theory. The simulation results show that the trajectory planning method is feasible.

Key words: web information extraction; joint type robot; trajectory planning; arc length parametric; linear rational function; Mtlab simulation;

关节式工业机器人作业方式分为点位作业(PTP)和连续路径作业, 只有点位作业才能在关节坐标系中直接进行轨迹规划, 连续路径作业则需要给出路径轨迹方程. 针对连续路径的轨迹规划, 一般是先以参数为步长进行曲线离散, 再进行关节空间的轨迹规划. 关节空间的轨迹规划具有不发生机构奇异性等特点, 但需要进行大量插值计算^[1]. 速度及加速度规划, 一般采用逆雅克比方法计算, 速度规划的雅克比矩阵是 $6 \times n$ 的, 雅克比矩阵的逆运算复杂, 其计算量将随着关节数的增加而增加^[2]. 许瑛等人采用输入角切换法对曲线等弧长分割的机器人轨迹规划进行了研究, 实现了近似等弧长轨迹输出, 有效的避免了关节空间的插值计

算, 但弧长误差较大^[3].

方奎等人对近似弧长参数化方法进行了深入的研究, 并成功应用于实际生产. 本文将把近似弧长参数化的方法应用于机器人轨迹规划中, 以避免轨迹规划中复杂的插值计算, 并结合极限方法, 实现速度加速度规划, 避开雅克比矩阵的计算. 文中将在 Matlab7.8 的平台上, 对轨迹曲线近似弧长参数化和轨迹规划进行实例仿真及可行性论证.

1 参数曲线近似弧长参数化的插值方法

弧长参数化是指, 曲线是以弧长为参数的矢量函数, 弧长称为自然参数, 曲线方程称为自然参数方程.

^① 基金项目:2012 年广西研究生科研创新项目(YCSZ2012064)

收稿时间:2014-01-17;收到修改稿时间:2014-03-31

一般来说, 弧长公式没有解析表达式, 即使有, 它的反函数也未必能求出, 因此精确地实现曲线 Γ 的弧长参数化是不可能的^[4]. 通常采用近似方法实现弧长参数化.

本例中将采用分段有理线性插值建立自然参数方程的近似弧长参数化方法, 实现轨迹曲线的等弧长步长离散化. 该插值方法没有参数化失真的缺点, 且在插值点处弧长是精确的, 其它点的弧长相对误差也很小, 满足机器人轨迹曲线弧长参数化的要求^[5].

假设参数曲线 $\Gamma: \vec{r} = \vec{r}(t)$ ($a \leq t \leq b$) 是给定的或是某种插值参数三次样条, 给定区间上的任意分划:

$$\Delta: a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

由弧长公式计算参数对应的弧长:

$$s_i = \int_{t_0}^{t_i} |\vec{r}'(t)| dt \quad i=0, 1, \dots, n \quad (1)$$

为了反求参数 t , 设区间 $[s_i, s_{i+1}]$ 上的线性有理函数为:

$$s_i(t) = \frac{w_{i-1}s_{i-1}(t_i - t) + w_i s_i(t - t_{i-1})}{w_{i-1}(t_i - t) + w_i(t - t_{i-1})} \quad i=1, \dots, n \quad (2)$$

(2)式中 w_i 是为权因子, 且 $w_i \neq 0$. w_i 有如下递推公式:

$$w_{i+1} = \frac{\Delta s_i / \Delta t_i}{\Delta s_{i+1} / \Delta t_{i+1}} w_{i-1} \quad i=1, 2, \dots, n-1 \quad (3)$$

式中: $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$,

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

再有公式(2)求得反函数:

$$t = \frac{d_i s - b_i}{a_i - c_i s} \quad s \in [s_{i-1}, s_i] \quad (4)$$

式中: $a_i = w_i s_i - w_{i-1} s_{i-1}$,

$$b_i = w_{i-1} s_{i-1} t_i - w_i s_i t_{i-1}$$

$$c_i = w_i - w_{i-1}$$

$$d_i = w_{i-1} t_i - w_i t_{i-1}$$

再将(4)式代入参数曲线 Γ 中, 得

$$\bar{\Gamma}: \vec{r}(s) = \vec{r}\left(\frac{d_i s - b_i}{a_i - c_i s}\right), \quad s \in [s_{i-1}, s_i] \quad (5)$$

我们称曲线 $\bar{\Gamma}$ 是 Γ 的近似弧长参数化插值曲线. 通过(5)式可以求出等弧长的曲线离散点坐标值.

2 机器人的运动学分析

2.1 D—H 坐标系的建立

LS-6 工业机器人是 4 自由度的关节式工业机器人,

其中 3 个旋转关节在同一平面内(回转中心线互相平行), 最后一个关节为移动式关节, 移动方向与其它关节的回转中心线平行. 为了简化轨迹规划, 可将 LS-6 机器人看作 3 自由度的平面机器人. 按照 D—H 坐标法, 建立数学模型如图 1 所示. D-H 参数表如表 1 所示.

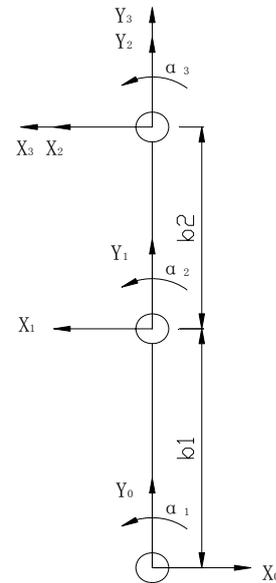


图 1 LS-6 工业机器人数学模型

2.2 运动学正解

根据连杆坐标系和 D-H 参数表, 机器人运动学方程^[6]可描述为:

$${}^3_0T = {}^1_0T {}^2_1T {}^3_2T \quad (6)$$

式中, ${}^{i-1}_i T$ —第 i 个连杆坐标系相对于第 $i-1$ 个连杆坐标系的齐次变换矩阵.

且有:

$${}^{i-1}_i T = R_z i T_x i = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & b_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & b_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中, $c_i = \cos(\theta_i)$, $s_i = \sin(\theta_i)$ ($i=1, 2, 3$)

将表 1 中的连杆参数代入到式(6,7)中, 得到机器人末端相对于基坐标系的位姿矩阵. 同时, 末端在基坐标系下的位姿亦可表示为:

$${}^3_0T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

表 1 D-H 参数表

关节	$\theta/(\circ)$	b/(mm)	关节范围/ (\circ)
1	90	330	-150~150
2	0	270	-150~150
3	0	0	-360~360

2.3 运动学逆解

平面三自由度机器人在结构上满足 pieper 准则, 将采用封闭解法来求解该逆运动学问题^[7], 则:

$${}^1_0\mathbf{T}^{-1}{}^3_0\mathbf{T} = {}^1_0\mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

式(9)左边(1,4)和(2,4)与右边等同起来, 可得:

$$b_2 \cos(\theta_2) = p_y \cos(\theta_1) - b_1 - p_x \sin(\theta_1) \quad (10)$$

$$b_2 \sin(\theta_2) = -p_x \cos(\theta_1) - p_y \sin(\theta_1) \quad (11)$$

式(10)与式(11)等式两边分别平方再求和消去 θ_2 , 令 $L = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$, $\rho = \arctan(\frac{p_y}{p_x})$, 可得:

$$\sin(\rho - \theta_1) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + b_1^2 - b_2^2}{2Lb_1} \quad (12)$$

其中 $\rho - \theta_1$ 为 0° 至 180° 的两个值对应着 θ_1 的两个可能值, 需要根据实际条件设定边界条件排除一个伪解.

将解得的 θ_1 值代入式(10)和(11)可解得 $\cos(\theta_2)$ 和 $\sin(\theta_2)$ 的值, 根据 $\cos(\theta_2)$ 和 $\sin(\theta_2)$ 的正负值判断 θ_2 所在的象限, 排除 θ_2 的伪解.

式(9)左边(1,1)和(2, 1)分别与右边等同起来, 可得:

$$\cos(\theta_2 + \theta_3) = n_y \cos(\theta_1) - n_x \sin(\theta_1) \quad (13)$$

$$\sin(\theta_2 + \theta_3) = -n_x \cos(\theta_1) - n_y \sin(\theta_1) \quad (14)$$

将 θ_1 、 θ_2 的值带入式(13)和(14), 同样采用 θ_2 的求解方法可解出唯一的 θ_3 的值.

3 机器人速度规划

3.1 各关节角速度及角加速度计算

机器人在执行焊接等任务时, 对末端的速度控制有较高的要求, 需对机器人进行速度规划^[8]. 在对轨迹曲线进行等弧长离散过程后, 利用极限的方法, 进行速度及加速度计算.

在进行等弧长离散时, 假设弧长步长 Δs 可取的无限小, 则在 Δs 范围内可认为是匀速的. 在每个插值点

处计算出末端角速度和线速度值, 取第 i 个点处的速度值为 Δs_i 的平均速度, 则 Δs_i 内的运动时间则可以通过式(15)计算. 在关节坐标系中, 可看作是过路径点的线性插值计算, 关节角速度可由式(16)计算, 关节角加速度可由式(17)计算. 通过以上计算可得各关节的角速度和角加速度序列.

$$\Delta t_i = \frac{\Delta s}{v_i} \quad (15)$$

式中, Δs - 弧长步长,

v_i - 第 i 个插值点的线速度,

Δt_i - 第 i 个步长内的运动时间,

$$w_i = \frac{\Delta \theta_i}{\Delta t_i} \quad (16)$$

式中, w_i - 角速度,

$\Delta \theta_i$ - 相邻插值点的关节角度差值,

$$a_i = \frac{\Delta w_i}{\Delta t_i} \quad i=1,2,\dots,n-1 \quad (17)$$

式中, a_i - 角加速度,

Δw_i - 角速度差值.

3.2 速度规划的可行性分析方法

为了验证其速度规划的可行性, 本研究将利用雅可比方法对末端速度进行验证. 对于 n 个关节的机器人, 雅可比矩阵是 $6 \times n$ 的矩阵, 前 3 行代表对末端线速度 V 的传递比, 后 3 行代表对末端角速度 W 的传递比, 即:

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & \dots & J_{1n} \\ J_{a1} & J_{a2} & \dots & J_{an} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad (18)$$

式中, $n=3$; 雅可比矩阵— 6×3 矩阵; J_{li}, J_{ai} - 关节 i 的单位关节速度引起末端线速度和角速度.

本研究采用微分变换法求解雅可比矩阵^[8]. 因为 Ls-6 机器人各个关节为转动关节, 对于任意的关节 i , 连杆 i 相对于连杆 $i-1$ 绕坐标系 i 的 Z_i 轴所作微分运动 $d\theta_i$, 其微分运动矢量为:

$$d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \delta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\theta_i \quad (19)$$

由微分变换公式, 可解得夹手相应的微分运动矢量为:

$$\begin{bmatrix} {}^T d_x \\ {}^T d_y \\ {}^T d_z \\ {}^T \delta_x \\ {}^T \delta_y \\ {}^T \delta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p \times n)_z \\ (p \times o)_z \\ (p \times a)_z \\ n_z \\ o_z \\ a_z \end{bmatrix} d\theta_i \quad (20)$$

因此, 可得雅克比矩阵 $J(q)$ 的第 i 列如下:

$${}^T J_{ii} = \begin{bmatrix} (p \times n)_z \\ (p \times o)_z \\ (p \times a)_z \end{bmatrix}, {}^T J_{ai} = \begin{bmatrix} n_z \\ o_z \\ a_z \end{bmatrix} \quad (21)$$

式(18~20)中, $i=1, 2, 3$; n, o, a, p — ${}^T T$ 的 4 个列矢量. 其最终表达式如下:

$$J = \begin{bmatrix} \sin(\theta_3)b_2 + \sin(\theta_2 + \theta_3)b_1 & \sin(\theta_3)b_2 & 0 \\ \cos(\theta_3)b_2 + \cos(\theta_2 + \theta_3)b_1 & \cos(\theta_3)b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

可得末端线速度 V 和角速度 W 的表达式:

$$\bar{V}' = (b_2 \bar{w}_1 + b_2 \bar{w}_2)^2 + (b_1 \bar{w}_1)^2 + 2b_1 b_2 \bar{w}_1 (\bar{w}_1 + \bar{w}_2) \cos(\theta) \quad (23)$$

$$\bar{W}' = \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \bar{w}_3 \quad (24)$$

其插值可行性可用相对误差作为评估标准, 其估计式如下:

$$V_\varepsilon = \left| \frac{\Delta V_i}{V_i} \right| \max \quad (25)$$

式中, ΔV_i -计算得到的线速度真值与理论值之差,

V_i -理论线速度,

V_ε -线速度相对误差,

$$W_\varepsilon = \left| \frac{\Delta W_i}{W_i} \right| \max \quad (26)$$

式中: ΔW_i -计算得到的角速度真值与理论值之差,

W_i -理论角速度,

W_ε -角速度相对误差,

4 Matlab仿真实验

本研究以 Matlab7.8 为实验平台, 对笛卡儿空间的参数曲线进行近似弧长参数化插值实例仿真, 对机器人运动学和轨迹规划及可行性进行仿真分析.

4.1 近似弧长参数化实例仿真

本文的参数曲线是 C^1 连续的且具有插值性质^[5]. 其曲线方程如下:

$$\Gamma: \bar{r} = \{t, 400 - 0.01t^2\} \quad t \in [0, 100]$$

计算式(1)中的曲线弧长时, 取 t 的分化为等步长分化, 其步长 $\Delta t = 0.1$, $t_i = t_0 + i\Delta t$, 对自然函数进行离散时取弧长步长 $\Delta s = 0.1mm$. 其离散结果如图 2 所示, 从图中可看出, 本插值没有出现明显的失真现象, 且插值点合理, 离散结果可用作轨迹规划研究.

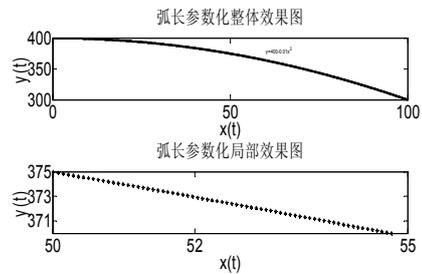


图 2 轨迹曲线近似弧长参数化离散效果图

4.2 轨迹规划仿真

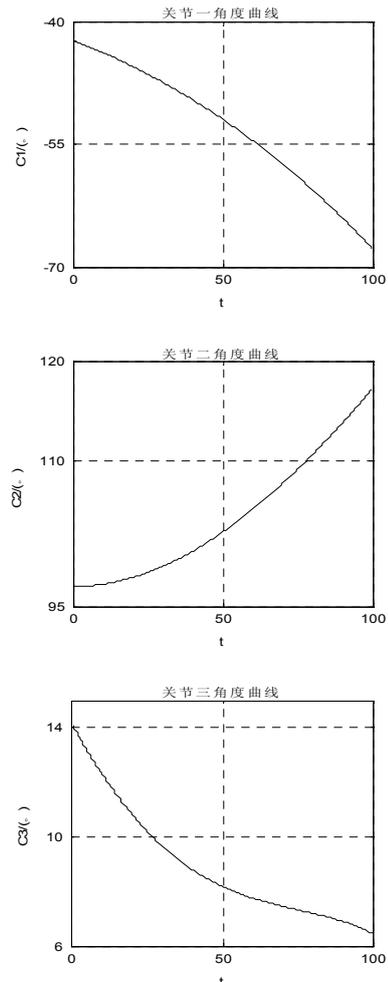


图 3 各关节角位移仿真曲线效果图
在机器人末端轨迹参数曲线离散化后, 通过反解

运动学方程, 求出各关节的位移点序列, 实现机器人的位姿规划. 其仿真结果如图 3 所示. 仿真结果显示, 各关节角位移曲线是连续且光滑的曲线, 则可认为有连续的关节角速度.

在机器人的连续作业中, 除了有位姿要求外, 还会有速度要求, 如焊接机器人. 因而, 我们需要对末端速度进行规划. 在速度规划中, 将通过极限的方法直接对末端速度进行规划. 本例取 $w = 0^\circ/s$, 进行仿真分析. 其仿真结果如图 4.

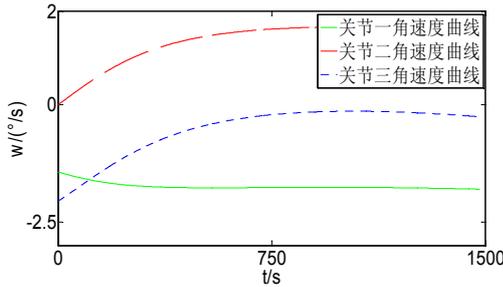


图 4 各关节角速度仿真曲线图

从图中可以看出各关节角速度曲线是连续且光滑的. 为了进一步研究各关节的速度及加速度特性, 对各关节的加速度也进行了计算, 其仿真结果如图 5 所示. 仿真结果显示, 各关节的角速度和角加速度均连续且光滑, 表明各关节即没有刚性冲击也没有柔性冲击.

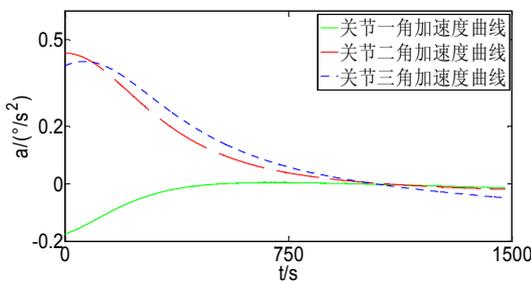


图 5 各关节角加速度仿真曲线图

4.3 轨迹规划可行性分析仿真实验

为了验证速度规划的准确性, 本研究采用雅克比矩阵方法, 将关节角速度转化为末端速度, 与末端速度理论值进行比较, 若与末端速度相符(相对误差小于 5%), 则对速度规划方法是可行的. 其仿真结果如图 6 所示.

从图 6 中可知:

$$|\Delta v|_{\max} \approx 3 \times 10^{-6} \text{ mm/s}$$

$$|\Delta w|_{\max} \approx 0.035^\circ/s$$

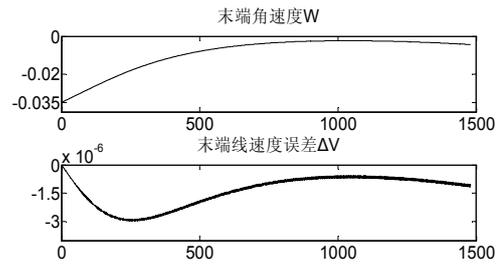


图 6 速度规划误差分析仿真曲线图

将计算结果代入(25)式和(26)式(当速度和角速度为零时, 取分母为 1 进行计算), 可得:

$$V_{\varepsilon} = \left| \frac{3 \times 10^{-6} \text{ mm/s}}{0.1 \text{ mm/s}} \right| = 3 \times 10^{-5}$$

$$W_{\varepsilon} = \left| \frac{0.035^\circ/s}{1^\circ/s} \right| = 0.035$$

通过计算可得线速度和角速度相对误差值均小于 5%, 满足工业应用要求. 表明采用极限方法进行速度规划是可行的.

5 结语

针对机器人轨迹规划, 研究了近似弧长参数化的插值方法在轨迹规划中的应用. 在 matlab7.8 平台上, 对线性有理函数的近似弧长参数化插值方法进行了仿真分析, 仿真结果表明采用分段有理线性插值的近似弧长参数化插值方法进行轨迹曲线离散可以满足轨迹规划要求. 轨迹规划仿真结果表明, 采用近似弧长参数化的方法进行轨迹规划, 可以获得连续的关节角位移, 结合极限的思想可以进行速度规划, 且速度相对误差小于 5%, 可以满足应用要求. 通过近似弧长参数化的方法进行轨迹规划, 可以避免关节空间的插值计算和速度规划的雅克比矩阵的计算, 将大大减少计算量.

参考文献

- 1 Kubota N, Apakawa T. Trajectory generation for redundant manipulator using virus evolutionary genetic algorithm. Robotics and Automation, 1997 Proc., IEEE International Conference on Albuquerque, USA. IEEE, 1997. 205-210.
- 2 许志杰, 王念峰, 张宪民. 六自由度涂胶机器人轨迹规划. 中国机械工程学会机械传动分会机构学专业委员会. 第 10 届中国机构与机器科学应用国际会议(2013CCAMMS)论文集. 中国机械工程学会机械传动分会机构学专业委员会, 2013.
- 3 许瑛, 渡边克己, 许伟. 连杆曲线的等弧长分割法在机器人轨迹规划中的应用. 第十四届全国机构学学术研讨会暨第二届海峡两岸机构学学术交流会议论文集. 中国机械工程学会机械传动分会机构学专业委员会, 2004.
- 4 方远, 吴泉源. 近似弧长参数化曲线综述. 株洲工学院学报, 2005, 6: 33-35.
- 5 方远. 参数曲线近似弧长参数化的插值方法. 计算机辅助设计与图形学学报, 1996, 2: 115-120.
- 6 Chang YH, Lee TT, Liu CH. On-Line cartesian path trajectory planning for robot manipulators. IEEE. 1998. 62-67.
- 7 吕世增, 张大卫, 刘海年. 基于吴方法的 6R 机器人逆运动学旋量方程求解. 机电工程学报, 2010, 46(17): 35-41.
- 8 刘鹏, 宋涛, 负超, 高志慧. 焊接机器人运动学分析及轨迹规划研究. 机电工程, 2013, 4: 390-394.