

贝叶斯小波图像压缩感知方法^①

杨光祖

(长沙环境保护职业技术学院 信息技术系, 长沙 410004)

摘要: 现有小波图像压缩感知方法大多利用父子小波系数的相关性来提高重构精度, 很少考虑同一尺度兄弟小波系数间的相关性关系. 鉴于此, 提出一种基于贝叶斯模型的高频系数联合重构小波图像压缩感知方法. 该算法将同一尺度水平、垂直和对角三个方向高频系数分别压缩感知采样, 然后设计分层贝叶斯模型, 充分利用此三个方向兄弟小波系数的相关性来重构图像. 实验结果表明本文提出的方法比传统的多尺度压缩感知有更高的图像重构质量.

关键词: 图像; 压缩感知; 贝叶斯

Wavelet Image Compressed Sensing Based on Bayesian Model

YANG Guang-Zu

(Changsha Environmental Protection Vocational College, Changsha 410004, China)

Abstract: Most image compressed sensing algorithms improve the reconstruction quality by utilizing the correlation of parent-child wavelet coefficients. However, few people study the compressed sensing based on the fraternal relationship of the high-frequency coefficients. In this paper, a Bayesian-based image compressed sensing algorithm using joint reconstruction of high-frequency wavelet coefficients is proposed. Firstly, the high-frequency coefficients of the horizontal, vertical and diagonal directions in the same scale are sampled separately when executing compressed sensing. Then, a hierarchical Bayesian model is presented and the correlation is used when reconstruction is performed. Experimental results show that our proposed algorithm has higher image reconstruction quality than the existed MCS.

Key words: image; compressed sensing; Bayesian

1 前言

图像压缩研究历经 60 多年, 涌现出了 JPEG2000 等很多优秀的图像压缩标准. 现有图像压缩的基本方法是由图像传感器遵循奈奎斯特采样定律对目标采样, 然后对采样结果进行压缩, 获取压缩格式的图像. 奈奎斯特定律要求采样速率必须达到信号带宽的两倍以上. 研究人员认为, 如果信号本身是可压缩的, 那么就有可能直接获取其压缩表示, 而略去对大量无用信息的采样.

压缩感知^[1-2](Compressed Sensing)是近几年提出的信号处理新理论. 压缩感知理论突破了奈奎斯特定律的限制, 只需要获取少量的采样就可以重构出原始

图像. 假设长度为 N 的信号 X 在某变换域中的系数是稀疏的, 用一个与变换基 Ψ 不相关的采样基 $\varphi: M \times N (M \ll N)$ 对系数进行线性采样得到 $Y: M \times 1$, 那么只需计算该 M 个采样数据 Y 即可精确或者高概率的重构原始信号 X .

压缩感知理论给图像压缩研究带来了新思路, 目前国内外研究人员已经展开了对图像压缩感知的研究. 小波变换有“数字显微镜”的美誉, 是压缩感知图像稀疏化的重要方法. Donoho 等人首先研究的基于小波变换的压缩感知问题, 提出多尺度压缩感知方法 (MCS)^[3], 为图像压缩感知奠定了理论基础. 文献[4]提出加权的图像压缩感知, 利用自然图像的统计特点

^① 收稿时间:2012-07-15;收到修改稿时间:2012-08-24

决定加权系数, 这些加权系数随着压缩感知采样值序列一起传输到解码器端来帮助解码器获得更好的重构质量. 文献[5]指出不同级小波系数携带的原始信号的信息不同, 因此采样时应该区别对待, 进而提出了一个对数据包丢失具有健壮性的图像压缩感知方法. Bing Han 等人指出小波系数的低频和低频存在相关性, 通过插值的方法用低频预测高频, 再将预测得到的高频作为 POCS 算法的初始值来减少迭代次数, 提高了算法的重构质量^[6]. 练秋生等人是通过建立图像小波系数的隐马尔可夫树模型来描述父子小波系数的“大”或“小”状态在尺度间传递特性, 并将隐马尔可夫树模型重构转化为标准图像压缩感知重构的优化问题^[7]. Lihan He 和 Shihao Ji 等人则是通过建立贝叶斯小波树结构的压缩感知模型来利用父子小波系数之间的状态相关性^[8-9].

从上述研究现状来看, 目前图像压缩感知的研究成果利用的是父子小波系数之间的相关性, 或者说是不同尺度小波系数间的相关性. 事实上, 同一尺度内的兄弟高频系数间也存在相关性. 本文将利用高频小波系数之间的相关性, 研究一种基于贝叶斯模型的图像压缩感知方法.

2 基于贝叶斯的小波图像感知

2.1 图像高频小波系数相关性

二维图像经多级小波变换后的小波系数不仅被分级, 而且每一级的高频小波系数被分成水平、垂直和对角等三个方向, 如图 1 所示. 在图 1 中, HL1、HL2 和 HL3 分别表示第一、二、三级的水平高频小波系数, LH1、LH2 和 LH3 以及 HH1、HH2 和 HH3 是相应的垂直和对角高频系数.

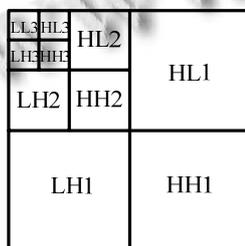


图 1 三级小波变换

在小波图像系数中, 水平、垂直和对角等三个方向的高频系数存在着相关性. 对大小为 256×256 的图像 INDOR 做 5 级 Haar 小波变换, 设置阈值为 20, 大

于阈值的系数为大系数并将该处的系数值设置为 1, 小于阈值的系数为小系数并将该处的系数设置为 0. 图 2 为图像 INDOR 第二级小波变换三个方向高频图像显示, 依次为垂直、水平、对角方向. 图 2 中白色处即为大系数. 从图 2 可以看出同一尺度内的三个方向高频系数间有很多大系数出现在相同位置上. 从视觉上看, 图 2(a)、(b)和(c)也显示出很大的相似性, 这正是兄弟高频小波系数相关性的表现. 遗憾的是, 迄今为止还没有相关研究在图像压缩感知中利用这种兄弟系数间的相关性.



(a) 垂直方向 (b) 水平方向 (c) 对角方向

图 2 INDOR 第二级高频系数图

2.2 贝叶斯小波图像压缩感知

图像经小波变换后, 同一尺度内的水平、垂直、对角等三个方向高频系数存在相关性. 我们将三个方向高频小波系数看成是即独立又相关的三个任务. 在采样压缩时将此三个方向的高频系数看成是独立的, 但是在重构时却可以通过联合重构来利用三个任务间的相关性, 即将此三个任务看成是相关的. 贝叶斯理论是机器学习中的一个重要理论, 分层贝叶斯模型特别适合处理既独立又相关的任务. 本文提出分层贝叶斯模型, 在水平、垂直、对角等多个任务间共享和传递信息.

对二维图像执行 n 级小波变换, 设某一尺度三个方向的高频小波系数一维化为 $\{\theta_i\}_{i=1,2,3}$, 大小为 $N \times 1$. $\{\varphi_i\}_{i=1,2,3}$ 为采样矩阵, 大小为 $M_i \times N$. 下标 i 取 1 代表垂直方向高频; 取 2 代表水平方向高频, 取 3 代表对角方向高频. 此三个方向的采样压缩过程是独立的, 如式(1)所示:

$$v_i = \varphi_i \theta_i + \omega_i \quad (1)$$

其中 v_i 为采样值向量, $\omega_i \in R^{M_i}$ 为误差向量, 服从均值 0, 方差为 $1/\alpha_0$ 的高斯随机分布.

根据上述压缩感知定义, 建立如下分层(三层)贝叶斯模型:

$$p(v_i|\theta_i, \alpha_0) = (2\pi/\alpha_0)^{-\frac{M_i}{2}} \exp\left\{-\frac{\alpha_0}{2}\|v_i - \varphi_i\theta_i\|_2^2\right\} \quad (2)$$

$$p(\theta_i|\alpha) = \prod_{j=1}^N N(\theta_{i,j}|0, \alpha_j^{-1}) \quad (3)$$

$$p(\alpha|c, d) = \prod_{j=1}^N Ga(\alpha_j|c, d) \quad (4)$$

$$p(\alpha_0|a, b) = Ga(\alpha_0|a, b) \quad (5)$$

其中式(2)为总体分布, 由于误差向量的引入, 带来了除 θ_i 之外的未知参数 α_0 , 使得原本的贝叶斯问题成为一个多参数贝叶斯问题, v_i 为样本信息. 式(3)为先验分布, 未知参数 θ_i 亦为目标参数, 服从均值为 0 的高斯随机分布. 这就表明三个方向的高频小波系数在统计上是相关的. 其中 $\alpha = \{\alpha_j\}_{j=1, N}$ 为未知参数即超参数, 很重要的一点是超参数为三个方向高频小波系数所共享, 使得在重构时三个方向的高频重构任务之间可以传递信息. 公式(4)为超参数 α 的超先验分布, 参数 $\{\alpha_j\}_{j=1, N}$ 服从 Gamma 分布. 我们在实验中发现取 $c = d = \varepsilon$ 时贝叶斯模型有很好的性能, 其中 ε 是一个大于零的小常量. 简单起见, 默认 $c = d = 0$. 式(5)为超参数 α_0 的超先验分布, 服从 Gamma 分布. 取 $a = b = 0$ 作为默认取值. 显然, 通过推断出超参数 α 和噪声精度参数 α_0 的后验密度函数, 可以得到 θ_i 的后验分布.

分层贝叶斯模型如图 3 所示. 从图 3 可以看出, 三个方向的高频系数 θ_i 是独立采样压缩的, 但是它们共享了一个先验 α , 使得三个方向的高频系数在重构时可以共享和传递信息. 重构算法分解为如下两步:

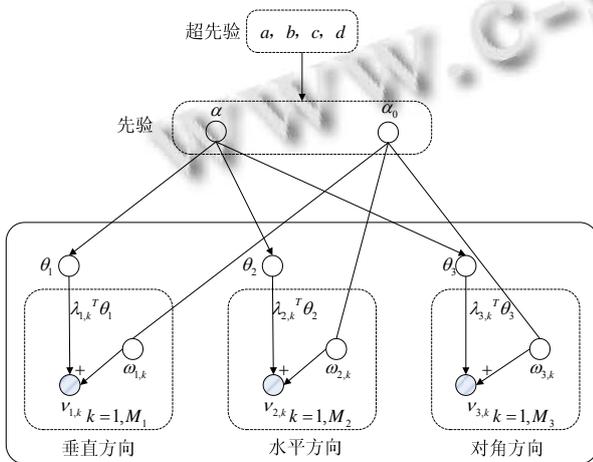


图 3 分层贝叶斯学习模型, 其中采样矩阵 $\varphi_i = [\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \dots, \lambda_{i,M_i}]$

第一步, 所有三个方向高频系数的压缩感知采样数据 $\{v_i\}_{i=1,3}$ 来参与超参数的点估计计算, 得到参数 α 和 α_0 的点估计值, 接着通过式(3)得到参数 θ_i 的先验分布.

第二步, 首先由参数 θ_i 的先验计算出参数 θ_i 的后验, 然后所有三个方向高频系数的压缩感知采样数据 $\{v_i\}_{i=1,3}$ 被用来构成 θ_i 的经验贝叶斯先验. 这个先验被单独的运用到每一个压缩感知采样 v_i 来更新相关的 θ_i 的逼近值.

重构算法在第一步和第二步之间来回迭代. 确切的说是在重构每一个方向的高频系数时都从另外两个方向高频系数的采样信息中借用了信息来帮助本身的重构.

3 实验结果及分析

本文用的实验平台为 matlab7.0, 计算机的主频为 2.93GHz, 内存大小为 3G, 测试图像为 MRI、INDOR 和 CAMERAMAN, 大小均为. 我们用 Haar 小波对图像做 3 级小波变换. 以峰值信噪比 PSNR 作为重构质量的性能指标, 本实验将本文提出的基于贝叶斯的高频系数联合压缩感知重构算法 (简称 Joint Reconstruction, JR) 与多尺度压缩感知方法(MCS)、三方向高频独立重构(Independent Reconstruction, IR)算法进行比较. 为了减小其他因素对实验结果的影响, 所有的数据结果都是做 10 次实验取平均得到.

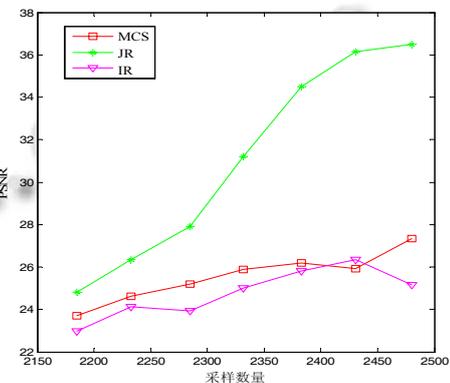


图 4 图像 MRI 的 MCS, IR, JR 重构质量

图 4 和图 5 分别是图像 MRI、INDOR 和 CAMERAMAN 等三种算法重构的 PSNR 比较图. 从图 4 和图 5 可以看出, 在相同采样数量的情况下, 算法 IR 的重构质量低于算法 MCS 和算法 JR, 同时算法 JR 的重构质量要高于算法 MCS. 这说明将三个方向的高频小波系数分开采用压缩感知进行采样压缩时的重构质量降低了. 但是我们提出的方法将三个方向高频小波系数的相关性通

过分层贝叶斯在重构时利用起来,因此重构质量 PSNR 提高了不少,并且是高于 MCS 算法.随着采样数量的逐渐增多,我们提出的算法取得了更好的重构质量.

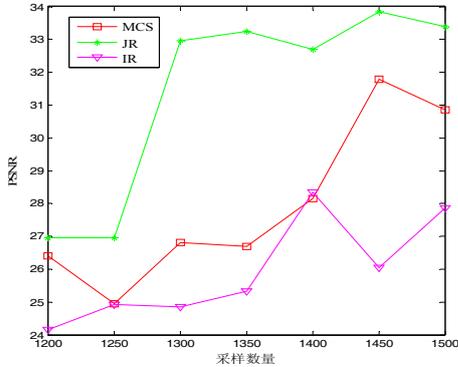


图 5 图像 INDOR 的 MCS, IR, JR 重构质量

图 6 是采样数量为 2250 时各算法的 MRI 重构图像对比结果,图 7 是采样数量为 1470 时各算法的 INDOR 图像对比结果.从图 6 和图 7 可以看出,在视觉上看,由我们提出的算法重构的图像也明显比其他两种算法的重构图像清晰.

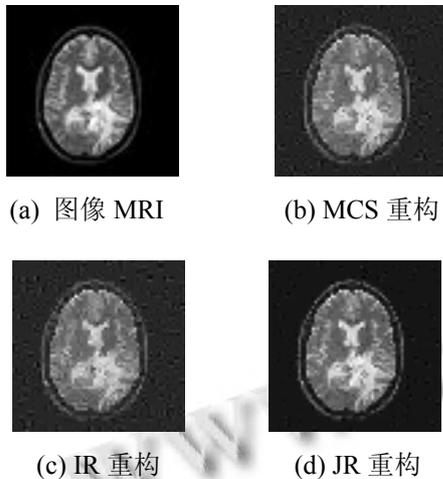


图 6 图像 MRI 采样数量为 2250 时重构图像序列

4 结论

基于小波变换的现有图像压缩感知研究成果大多利用父子小波系数间存在的相关性,目前还没有针对兄弟高频小波系数间相关性的压缩感知研究.本文利用高频小波系数间的相关性,提出了一种基于贝叶斯模型的图像压缩感知方法.该方法将水平、垂直和对角等三个方向的高频系数分开采样压缩,基于分层贝

叶斯模型将同一尺度内三个方向高频系数的相关性在重构时利用起来,从而显著提高了图像的重构质量.

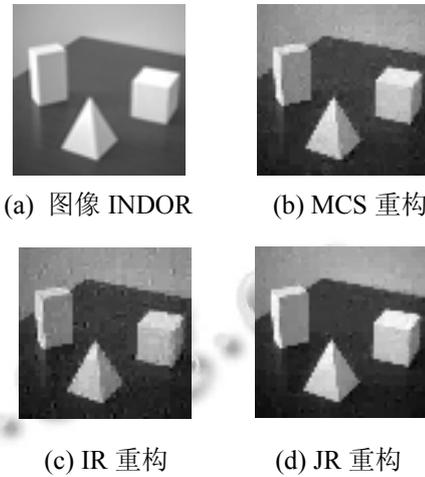


图 7 图像 INDOR 采样数量为 1470 时重构图像序列

参考文献

- 1 Candès E, Romberg J. Quantitative robust uncertainty principles and optimally sparse decompositions. *Foundations of Computer Math*, 2006,6(2):227-254.
- 2 石光明,刘丹华,高大化,等.电子学报,2009,37(5):1070-1081.
- 3 Donoho DL, Tsaig Y. Extensions of compressed sensing. *Signal Processing*, 2006,86(3):533-548.
- 4 Yi Y, Au OC, Lu F. Reweighted Compressive Sampling for image compression. *Proc. of IEEE International Conference on Picture Coding Symposium*. Dresden, Germany: IEEE Press, 2009:1-4.
- 5 Deng CW, Lin WS, Lee BS. Robust image compression based on compressive sensing. *Proc. of IEEE International Conference on Multimedia and Expo*. Singapore: IEEE Press, 2010: 462-467.
- 6 Han B, Wu F, Wu DP. Image representation by compressed sensing. *IEEE International Conference on Image Processing*, 2008: 1344-1347.
- 9 练秋生,王艳.基于双树小波通用隐马尔可夫树模型的图像压缩感知.电子与信息学报,2010,32(10):2301-2307.
- 8 He L, Carin L. Exploiting structure in wavelet-based Bayesian compressive sensing. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2009,57(9):3488-3497.
- 9 Ji S, Dunson D, Carin L. Multitask Compressive sensing. *Signal Processing*. *IEEE Trans. on*, 2008:92-106.