

# 一类受限非线性系统显示模型预测控制器<sup>①</sup>

刘 景

(江南大学 轻工过程先进控制教育部重点实验室, 江南大学自动化研究所, 无锡 214122)

**摘 要:** 提出了一种利用神经网络与显示预测控制相结合来处理一类带约束非线性系统的新方法。首先基于神经网络理论对非线性系统进行建模, 通过对神经网络中转移函数的最大最小值的调整构造多面体描述的线性时变系统来包裹原非线性系统, 然后采用多参数规划在线离线相结合的方法建立显式模型预测控制系统。最后对该方法进行仿真实验, 仿真结果证明, 采用这种方法可以很好的描述非线性系统, 改善控制器的控制效果。

**关键词:** 显示模型预测控制; 神经网络; 多面体

## Explicit Model Predictive Control for a Class of Constraint Nonlinear Systems

LIU Jing

(Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry (Ministry of Education), Department of Automation, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

**Abstract:** A novel method that combines neural net with predictive control is proposed in this paper. Firstly, the neural net is employed to construct the nonlinear systems, the original nonlinear systems are wrapped by the linear time-varying systems described using the polyhedron which is formatted by the maximum or minimum values of the transition function in the neural net. Then, the multiple parametric programming based on combination of the on-line and off-line is utilized to obtain the explicit model predictive control systems. Finally, an example is presented to illustrate the effectiveness of our method. The results show that the developed method can describe the nonlinear system effectively, and improve the control performance.

**Key words:** explicit model predictive control; neural net; polyhedron

模型预测控制算法是处理多变量带约束系统最优控制问题的最有效的方法之一<sup>[1]</sup>, 如今国内外对线性系统的模型预测控制在理论上以及应用中都已非常成熟。但随着社会工业产品精度的提高以及环境、工艺等的限制, 所以对带约束的非线性预测控制算法做进一步研究十分必要。

有些非线性系统可以用线性化模型来近似, 再通过反馈校正来调整模型的失配。但绝大多数强非线性系统使用上述方法都不能达到很好的控制效果, 有时甚至不能保证系统的稳定性。为更好的描述非线性系统, 文献[2]通过泰勒级数对系统线性化, 采用对每个偏导数取最大最小值的方法构造多面体, 但这种方法在线计算量比较大且有很大的保守性。文献[3]应用神

神经网络对非线性系统输入输出进行辨识, 将非线性系统描述成一个线性广义预测模型。但广义预测模型属于经典预测控制范畴, 很难对它进行稳定性分析。

本文考虑一类非线性系统, 采用神经网络和显示模型预测控制<sup>[4-7]</sup>相结合的方法将显示模型预测控制应用到非线性领域。首先, 通过神经网络与线性微分包含相结合的方法把非线性系统转换成多面体描述的线性时变系统, 然后把多参数规划方法引入到线性时变对象的约束优化控制问题的求解中, 建立显式模型预测控制系统, 通过离线与在线综合的方法, 离线时利用约束条件对系统进行区域划分并得到控制率的显式解, 在线时将滚动优化过程转化为控制率查表过程, 从而可以提高在线的计算速度, 使得系统获得更好的

① 基金项目:江苏省自然科学基金(BK20090879)

收稿时间:2011-12-01;收到修改稿时间:2012-01-09

实时性,扩展了模型预测控制的应用范围。

### 1 系统线性化

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= f(\mathbf{x}(k)) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{1}$$

式中  $f$  是一定非线性函数且 2 次连续可微的,  $f(0,0)=0$ ,  $x \in R^n, u \in R^m$  分别是状态向量和输入向量, 系统的控制输入约束满足:

$$Fx_k + Gu_k \leq f \tag{2}$$

由于神经网络(简称 NN)在处理非线性方面具有很大的优势,它通过不断调整内部的权值可以任意精度逼近任何非线性<sup>[8]</sup>。对于上述非线性系统(1)我们可以通过如图 1 的神经网络神经结构来转化成多面体描述的线性系统。

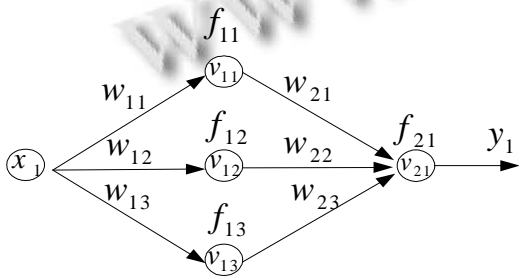


图 1 神经网络模型

为了叙述简洁我们讨论单输入单输出的情形,应用含 3 个神经元的前向神经网络来逼近非线性系统,  $w, v, f$  分别是 NN 中的权值, 神经元以及转移函数。

$$v_{1i} = w_{1i}x(k) \quad i=1,2,3 \tag{3}$$

$$v_{21} = w_{21}f_{11}(v_{11}) + w_{22}f_{12}(v_{12}) + w_{23}f_{13}(v_{13}) \tag{4}$$

$$\bar{x}(k+1) = f_{21}(v_{21}) \tag{5}$$

定义 1: 对于隐含层和输出层中各个神经元其转移函数为:

$$f(v) = \frac{2}{1 + \exp(-\frac{v}{q})} - 1 \tag{6}$$

$$g_1 v \leq f(v) \leq g_2 v, v > 0$$

其中  $g_1 = \min_v f'(v) = 0$ ,  $g_2 = \max_v f'(v) = \frac{0.5}{q}$ 。

考虑极大-极小微分中值原理,所有转移函数可以转换成如下形式:

$$\left. \begin{aligned} f_{1i}(v_{1i}) &= (h_{j1}(k)g_1 + h_{j2}(k)g_2)v_{1i} \\ f_{21}(v_{21}) &= (h_{41}(k)g_1 + h_{42}(k)g_2)v_{21} \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

其中  $h_{ji} \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^2 h_{ji} = 1 \quad j=1,2,3,4$ 。把式(3),(4),(7)代入(5)可以得到:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \sum_{i_4=1}^2 \sum_{i_3=1}^2 \sum_{i_2=1}^2 \sum_{i_1=1}^2 h_{4i_4} h_{3i_3} h_{2i_2} h_{1i_1} A_{i_4 i_3 i_2 i_1} \hat{\mathbf{x}}(k) \tag{8}$$

令  $W_1 = [\omega_{11} \ \omega_{12} \ \omega_{13}]^T, W_2 = [\omega_{21} \ \omega_{22} \ \omega_{23}]$

定义 2:

$$A(k) = \sum_{i_4=1}^2 \sum_{i_3=1}^2 \sum_{i_2=1}^2 \sum_{i_1=1}^2 h_{4i_4} h_{3i_3} h_{2i_2} h_{1i_1} A_{i_4 i_3 i_2 i_1} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} A_v &= \Phi(i_1, i_2, i_3, i_4, W_1, W_2) \\ &= h_{i_4} [h_{i_1} \ h_{i_2} \ h_{i_3}] W_1 \bullet W_2^T \end{aligned} \tag{10}$$

式中  $v = \{[i_1 \ i_2 \ i_3 \ i_4] \in R^4 \mid i_j \in \{1,2\}, j=1,2,3,4\}$ 。对于多输入/多输出情形,推导基本相同,只是  $A(k), A_v$  均为矩阵形式,由此神经网络逼近非线性系统式(1),得到线性时变形式:

$$x(k+1) = A(k)x(k) \tag{11}$$

$A(k)$  与权值  $W_1, W_2$  及  $i_1, i_2, i_3, i_4$  不同组合所决定的  $h_k$  有关。

### 2 显式模型预测控制器设计

引入控制作用,考虑下一类线性时变系统:

$$x_{k+1} = A(\theta_k)x_k + Bu_k \tag{12}$$

由上文知参数  $\theta_k$  是在线测的且:

$$\theta_k \in \Theta = \left\{ \theta_k \in \mathfrak{R}_+^{n_\theta} : \sum_{j=1}^{n_\theta} \theta_k^{[j]} = 1 \right\} \tag{13}$$

将参数矩阵表示为基于多面体的仿射形式:

$$A(\theta_k) = \sum_{j=1}^{n_\theta} A^j \theta^j \tag{14}$$

式中  $A^j$  是多面体的第  $j$  个顶点.为了确保系统的稳定性加入终端约束:

$$x_{k+N} \in \mathcal{X}^f = \{x \in R^n : F_{k+N}x \leq f_{k+N}\} \tag{15}$$

针对上述线性时变系统我们要求出它的最优状态

反馈显式控制律:

$$u_k = u_k(x_k, \theta_k) \quad (16)$$

为了简化符号记  $U_k := \{u_k^1, \dots, u_k^{n_u}\}$ , 求解控制率就是求解如下优化控制问题:

$$J_i^*(x_{k+i}) = \min_{u_{k+i}} J_i(x_{k+i}, u_{k+i}) \quad (17a)$$

s.t.

$$\begin{cases} Fx_{k+i} + Gu_{k+i} \leq f \\ A(\theta_k)x_{k+i} + Bu_{k+i} \in \mathcal{X}^{i+1} \end{cases} \quad (17b)$$

$$J_i(x_{k+i}, u_{k+i}) = \max_{\theta_k \in \Theta} \{ \|Qx_{k+i}\|_p + \|Ru_{k+i}\|_p + J_{i+1}^*(A(\theta_k)x_{k+i} + Bu_{k+i}) \} \quad (17c)$$

式中  $i=1, \dots, N-1$ , 对于极限情况:

$$J_N^*(x_{k+N}) = \|Px_{k+N}\|_p \quad (18a)$$

$$\mathcal{X}^N = \mathcal{X}^f \quad (18b)$$

为了确保上式 (17a) - (17c) 的可行性定义  $\mathcal{X}^i$ :

$$\mathcal{X}^i = \{x_k \in \mathfrak{R}^{n_x} \mid \exists u, (Fx + Gu \leq f, A(\theta_k)x_k + Bu_k \in \mathcal{X}^{i+1}, \theta_k \in \Theta)\}$$

首先我们需要证明上述优化问题可以转化为基于多面体顶点的多参数线性规划的凸优化问题。

定理 2.1 设  $J: \mathfrak{R}^{n_z} \times \mathfrak{R}^{n_x} \rightarrow \mathfrak{R}$  是一个关于  $(z, x)$  的凸的分段仿射函数, 则多参数优化问题:

$$J^*(x) = \min_z J(z, x) \quad (19a)$$

s.t.

$$Cz \leq c + Sx \quad (19b)$$

就是一个多参数线性规划。

式中  $z \in \mathfrak{R}^{n_z}$  是优化向量,  $x \in \mathfrak{R}^{n_x}$  是参数向量,  $g \in \mathfrak{R}^{n_z}$ ,  $C \in \mathfrak{R}^{n_c \times n_z}$ ,  $c \in \mathfrak{R}^{n_c}$ ,  $S \in \mathfrak{R}^{n_c \times n_x}$  是约束矩阵。

证明: 因为  $J$  是一个凸的分段仿射函数, 有  $J(z, x) = \max_{j=1, \dots, s} \{L_j z + H_j x + K_j\}$  [9]。这样容易得到多参数线性规划  $\min_{z, x} Cz \leq c + Sx, L_j z + H_j x + K_j \leq \varepsilon, j=1, \dots, s$ 。

引理 2.1 设  $f: \mathfrak{R}^{n_z} \times \mathfrak{R}^{n_x} \times \mathfrak{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathfrak{R}$  和  $g: \mathfrak{R}^{n_z} \times \mathfrak{R}^{n_x} \times \mathfrak{R}^{n_\theta} \rightarrow \mathfrak{R}^{n_g}$  对于每一个  $(z, x)$  关于  $(z, x, \theta)$  的函数在  $\theta$  上都是凸的, 假设变量  $\theta$  属于多面体域  $\Theta$ ,

$\{\theta_i\}_{i=1}^{N_\theta}$  是多面体的顶点, 则有极小-极大多参数规划问题:

$$J^*(x) = \min_z \max_{\theta \in \Theta} f(z, x, \theta) \quad (20a)$$

$$s.t. \quad g(z, x, \theta) \leq 0 \quad \forall \theta \in \Theta \quad (20b)$$

等价于多参数规划优化问题:

$$J^*(x) = \min_{t, z} t \quad (21a)$$

$$s.t. \quad t \geq f(z, x, \theta_j), \quad j=1, \dots, N_\theta \quad (21b)$$

$$g(z, x, \theta_j) \leq 0, \quad j=1, \dots, N_\theta \quad (21c)$$

证明: 因为求解一个凸函数的极值点, 这个极大值点肯定是多面体的顶点。

由上述引理我们得到, 如果  $f$  是关于  $(z, x)$  的凸的分段仿射如  $f(z, x, \theta) = \max_{j=1, \dots, s} \{L_j(\theta)z + H_j(\theta)x + K_j(\theta)\}$  且对所有的  $\theta \in \Theta$ ,  $g$  是  $(z, x)$  的线性函数,  $g(z, x, d) = K_g(d) + L_g(d)x + H_g(d)z$  ( $K_g(\bullet), L_g(\bullet), H_g(\bullet), L_j(\bullet), K_j(\bullet), H_j(\bullet)$  都是凸函数), 那么式 (20) 的极小-极大多参数规划问题就等价于多参数线性规划问题。

由于上述优化问题可以表示为基于顶点的多参数线性规划问题, 这样我们设未来的控制率可表示为仿射形式:

$$u_k = \sum_{j=1}^{n_\theta} \theta_k^j u_k^j \quad (22)$$

上式中  $u^j(x_k)$  是第  $j$  个多面体顶点的控制率, 因此可以把系统描述成如下形式:

$$x_{k+1} = \sum_{j=1}^{n_\theta} \theta_k^j (A^j x_k + B^j u_k^j) \quad (23)$$

因为未来时刻的时变矩阵参数序列是不可测的, 所以当  $j=N-1$ , 在闭环 MPC 通道我们需要考虑最坏的情况, 因为把控制率表示为仿射形式所以消去了时变参数对优化问题的影响, 所以优化问题可以表示为多参数线性规划形式:

$$J_{N-1}^*(x_{k+N-1}) = \min_{u_{k+N-1}} J_{N-1}(x_{k+N-1}, u_{k+N-1}) \quad (24a)$$

$$s.t. \quad \begin{cases} Fx_{k+N-1} + Gu_{k+N-1} \leq f \\ A(\theta_k)x_{k+N-1} + Bu_{k+N-1} \in \mathcal{X}^f \end{cases} \quad (24b)$$

$$J_{N-1}(x_{k+N-1}, u_{k+N-1}) = \max_{\theta_k \in \Theta} \{ \|Qx_{k+N-1}\|_p + \|Ru_{k+N-1}\|_p + \|P(A^j x_{k+N-1} + Bu_{k+N-1}^j)\|_p \} \quad (24c)$$

然后每一步我们将  $x_{k+i+1}$  带入  $J_{i+1}^*$ ，这样去迭代知道  $\theta_k$  可测。

动态规划的最后一步也就是优化的第一步不同于上述的过程，因为此时的参数序列  $\theta_k$  可测，这个信息要被带入去计算我们之前所考虑的最坏情况，因此  $x_k$  和  $\theta_k$  的优化问题可表示成：

$$J^*(x_k, \theta_k) = \min \|Ru_k\|_p + J_1^*(x_k, \theta_k) \quad (25)$$

上式是一个关于  $x_k$  和  $\theta_k$  的双线性问题，为了解决这个双线性问题我们令：

$$z_k = \left( \sum_{j=1}^{n_\theta} \theta_k^j A^j \right) x_k \quad (26)$$

所以：

$$x_{k+1} = z_k + Bu_k \quad (27)$$

带入 (27) 式我们就可以获得关于  $z_k$  和  $u_k$  的分段仿射函数，这样就可以求得显示控制率。以上过程均是离线完成即把模型预测控制的滚动优化过程转化为离线完成。这样在线时，我们只需根据每一步的状态量  $x_k$  和可得的参数序列  $\theta_k$  来计算出  $z_k$ ，并确定此时状态所在的区域，通过查表就可以得到控制输入量  $u_k$ 。

### 3 仿真

考虑一个带正弦函数的非线性系统：

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) + u(k) \\ \sin x_1(k) + x_2(k) + u(k) \end{bmatrix} \quad (28)$$

首先用误差反向传播算法选取转移函数的最小最大值分别为 0, 1 来逼近非线性函数  $\sin x_1(k)$  计算得到  $A_j$ ，那么：

$$x(k+1) = (A + A_j)x(k) + u(k) \quad (29)$$

式中  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，取权重矩阵  $Q = I, R = 0.1$  输入约束为

$$-5 \leq |u| \leq 5, \text{ 状态约束 } \begin{bmatrix} -8 \\ -8 \end{bmatrix} \leq x(k) \leq \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}, P = Q, N = 4,$$

应用 MPT<sup>[10]</sup>和 YALMIP<sup>[11]</sup>工具箱对多面体描述系统进行区域划分与代价函数的关系如图 2 所示：

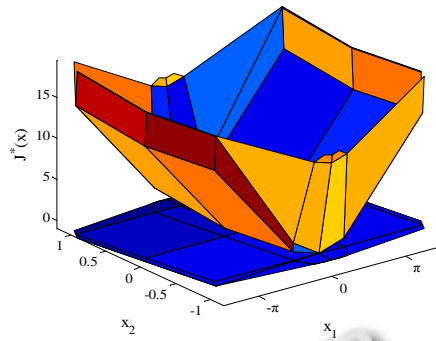


图 2 MATLAB 离线区域划分

如图 2 所示，离线时将状态区域划分成 31 多面体域并得到了每个子区域所对应的控制率的显式表达式，在线时设系统的初始状态为  $x_0 = [2 \ 0.5]^T$ ，系统的状态跟踪曲线和控制输入曲线分别为：

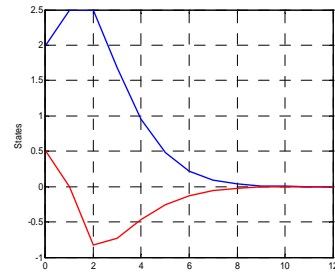


图 3 系统状态跟踪曲线

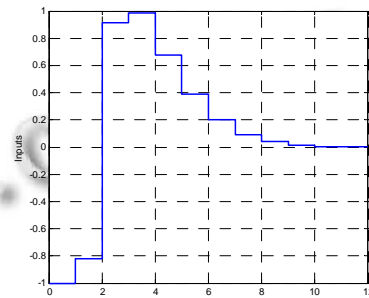


图 4 系统控制输入曲线

### 4 结语

基于神经网络的非线性模型显示预测控制针对非线性控制系统，具有强大的生命力。它以神经网络为桥梁把非线性系统转化为基于多面体描述的线性时变系统，从而把显示预测控制的应用扩张到了非线性领域，获得了适用于原非线性系统的控制律。与传统的非线性预测控制算法相比，上述方法将大部分在线求解控制律的运算转化为离线完成，在线时只需查找状态所在区域即可得到控制作用，大大提高了控制效率，

(下转第 104 页)

- 2 Fax JA, Murray R. Information Flow and Cooperative Control of Vehicle Formations. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2004,49(9):1465–1476.
- 3 Olfati-Saber R, Murray R. Consensus Protocols for Networks of Dynamic Agents. *Proceedings of the American Control Conference, Denver, Colorado June 4–6, 2003*. 951–956.
- 4 Olfati-Saber R, Murray R. Consensus Problems in Networks of Agents with Switching Topology and Time-Delays. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2004,49(9):1520–1533.
- 5 Lin P, Jia Y. Further Results on Decentralized Coordination in Networks of Agents with Second-Order Dynamics. *IET Control Theory and Applications*, 2009,3:957–970.
- 6 Olgac N, Sipahi R. An Exact Method for The Stability Analysis of Time-Delayed Linear Time Invariant Systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2002,47:793–797.
- 7 Olgac N, Sipahi R. Complete Stability Robustness of Third Order LTI Multiple Time Delay Systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2005,41:1413–1422.
- 8 Olgac N, Sipahi R. An Improved Procedure in Detecting The Stability Robustness of Systems with Uncertain Delay. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2006,51:1164–1165.
- 9 Yu WW, Chen GR, Cao M. On Second-Order Consensus in Multi-Agent Dynamical Systems with Directed Topologies and Time Delays. *Proc. of the Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference, Shanghai, China, Dec. 12-15, 2009*. 3709–3714.
- 10 Yu WW, Chen GR, Cao M. Some Necessary and Sufficient Conditions for Second-Order Consensus in Multi-Agent Dynamical Systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2010,46:1089–1095.
- 11 Lin P, Jia Y. Distributed Control of Multi-Agent Systems with Second Order Dynamics and Delay-Dependent Communications. *Asian Journal of Control*, 2008,10:54–59.
- 12 Lynch NA. *Distributed Algorithms*. Morgan Kaufmann, San Francisco, 1997.

(上接第 88 页)

而且从仿真效果来看, 这样获得的控制律依然能够得到较好的控制效果。

### 参考文献

- 1 Qin SJ. A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering*, 2003,7(11):733–764.
- 2 邹志强. 一种基于多面体描述系统的非线性预测控制. *同济大学学报*, 2006,34(6):813–817.
- 3 黄西平, 刘军. 一种改进的神经网络非线性预测控制. *计算机仿真*, 2006,23(4):145–148.
- 4 Bemporad A, Morari M, Dua V, Pistikopoulos EN. T11e Explicit Linear Quadratic Regulator for Constrained Systems. *Automatica*, 2002,38:3–20.
- 5 Motee N, Jadbabaie A. Distributed Multi-Parametric Quadratic Programming. *IEEE Transactions on automatic control*, 2009,10(54):2279–2289.
- 6 张聚, 丁靖. 倒立摆系统显式模型预测控制. *控制工程*, 2010,17(4):551–556.
- 7 Rauová I, Kvasnica M. Separating Functions for Complexity Reduction of Explicit Model Predictive Control. *Institute of Automation. 18th International Conference on Process Control*. Bratislava: 2011:427–433.
- 8 Tanaka K. An Approach to Stability Criteria of Neural-Network Control Systems, *IEEE Transactions on neural networks*, 1996,7(3):629–642.
- 9 Tanaka K. An Approach to Stability Criteria of Neural-Network Control Systems, *IEEE Transactions on neural networks*, 1996,7(3):629–642.
- 10 Lofberg J. Modeling and solving uncertain optimization problems in YALMIP, *IFAC World Congress*, 2008,6(11):1337–1341
- 11 Kvasnica M, Grieder P, Baotic M, et al. Multi-Parametric Toolbox (MPT) in Hybrid Systems Computation and Control. *Institut für Automatik, Swiss Federal Institute of Technology*, 2006.448–462.