

基于 Bloch 球面坐标编码的量子粒子群算法及应用^①

李盼池, 王海英

(东北石油大学 计算机与信息技术学院, 大庆 163318)

摘要: 为提高粒子群算法的优化效率, 在分析粒子群优化算法的基础上, 提出了一种基于 Bloch 球面坐标编码的量子粒子群优化算法。该算法每个粒子占据空间三个位置, 每个位置代表一个优化解。采用传统粒子群优化方法的搜索机制调整量子位的两个参数, 可以实现量子位在 Bloch 球面上的旋转, 从而使每个粒子代表的三个优化解同时得到更新, 并快速逼近全局最优解。标准测试函数极值优化和模糊控制其参数优化的实验结果表明, 与同类算法相比, 该算法在优化能力和优化效率两方面都有改进。

关键词: 量子计算; 粒子群优化; Bloch 坐标; 算法设计

Bloch Coordinates-Based Quantum Particle Swarm Optimization Algorithm and Its Application

LI Pan-Chi, WANG Hai-Ying

(School of Computer & Information Technology, Northeast Petroleum University, Daqing 163318, China)

Abstract: To improve the efficiency of particle swarm optimization, a quantum particle swarm optimization algorithm is proposed on the basis of analyzing the search process of particle swarm optimization algorithm. In the proposed algorithm, particles are encoded by qubits described on the Bloch sphere, each particle occupies three locations of the search space, and each location represents a optimization solution. By employing the search method of general PSO to adjust the two parameters of qubit, the qubits rotation are performed on the Bloch sphere, which can simultaneously update three locations occupied by a qubit and quickly approach the global optimal solution. The experimental results of standard test function extreme optimization and fuzzy controller parameters optimization show that the proposed algorithm is superior to other similar algorithm in optimization ability and optimization efficiency.

Key words: quantum computation; particle swarm optimization; Bloch coordinates; algorithm design

粒子群优化(PSO)是由 Eberhart 博士和 Kennedy 博士于 1995 年基于鸟类的觅食行为提出的一种全局优化算法^[1]。目前已成功应用于各类组合优化^[2]和数值优化^[3]中。关于 PSO 性能的改进, 一是基于算法参数的选择^[4]; 二是基于粒子位置及速度的更新规则^[5]; 三是与其它算法的融合^[6,7]; 四是与量子计算融合设计的量子 PSO(Quantum PSO, QPSO)^[8,9]。目前 QPSO 的构造方式有两种, 一种是通过模拟量子力学中粒子在势场中向势能最低点的移动建立搜索机制^[8], 这种改进模型的灵感来源于量子势阱, 具有较快的时间收敛速度, 但其在每一维上的搜索过

程依然是一维数轴上的直线搜索。另一种是粒子采用量子比特编码, 采用量子旋转门更新量子比特的相位实现粒子位置的更新^[9], 尽管这种方法将每一维上的搜索扩展为平面上的二维搜索, 但用于编码的量子比特基于平面单位圆描述, 只有一个可变参数, 量子特子没有得到充分体现, 从而影响了优化效率的进一步提高。基于以上问题, 本文提出一种基于 Bloch 球面坐标编码的量子粒子群优化 (Bloch quantum particle swarm optimization, BQPSO) 算法。该方法将每一维上的搜索扩展为空间中的三维搜索, 每个粒子占据空间中三个位置, 采用传统传统 PSO

^① 基金项目:国家自然科学基金(61170132);国家博士后科学基金(20090460864,201003405);黑龙江省博士后科学基金(LBH-109289);黑龙江省教育厅科学基金(11551015,11551017,12511009)

收稿时间:2011-11-28;收到修改稿时间:2012-01-04

搜索机制调整量子比特的两个相位参数，可使三个位置同步更新。实验结果表明，该算法比同类算法有较高的优化效率。

1 基本粒子群算法

设 n 在维空间中的 M 个粒子组成一个种群。其中，第 i 个粒子位置为 $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ 、速度为 $V_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$ 、自身最优和全局最优位置分别为 $P_i^L = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in})$ 、 $P_g = (p_{g1}, p_{g2}, \dots, p_{gn})$ 。粒子更新策略为

$$V_i(t+1) = wV_i(t) + c_1r_1(P_i^L - X_i(t)) + c_2r_2(P_g - X_i(t)) \quad (1)$$

$$X_i(t+1) = X_i(t) + V_i(t+1) \quad (2)$$

其中 $i=1,2,\dots,M$ ； w 为惯性因子； c_1, c_2 为常数； r_1, r_2 为 $[0, 1]$ 内均匀分布的随机数。对种群中每个粒子应用(1)、(2)两式循环迭代，可使整个种群逐步逼近全局最优解。为便于叙述，将式(1)重写为如下形式。

$$V_i(t+1) = wV_i(t) + [\Phi](P_i - X_i(t)) \quad (3)$$

其中

$$P_i = \text{diag}\left(\frac{c_1r_1^1}{c_1r_1^1 + c_2r_1^2}, \dots, \frac{c_1r_n^1}{c_1r_n^1 + c_2r_n^2}\right)P_i^L \quad (4)$$

$$+ \text{diag}\left(\frac{c_2r_1^2}{c_1r_1^1 + c_2r_1^2}, \dots, \frac{c_2r_n^2}{c_1r_n^1 + c_2r_n^2}\right)P_g$$

$$[\Phi] = \text{diag}(c_1r_1^1 + c_2r_1^2, \dots, c_1r_n^1 + c_2r_n^2) \quad (5)$$

为使 PSO 收敛，所有粒子必须逼近式(4)定义的加权平均粒子 P_i 。

2 BQPSO基本原理

2.1 粒子的 Bloch 坐标编码方案

在量子计算中，最小的信息单位用量子位表示。量子位又称量子比特，一个量子比特的状态可表示为

$$|\varphi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta/2)|1\rangle \quad (6)$$

数 θ 和 φ 定义了 Bloch 球面上一点 P 。

任何量子位都与 Bloch 球面上一点对应，因此，量子位可以用 Bloch 坐标表示为 $|\varphi\rangle = [\cos\varphi \sin\theta \sin\varphi \sin\theta \cos\theta]^T$ 。在 BQPSO 中，直

接采用量子位的 Bloch 坐标作为编码。设 p_i 为种群中第 i 个粒子，BQPSO 的编码方案如下：

$$p_i = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{i1} \sin\theta_{i1} & \cdots & \cos\varphi_{in} \sin\theta_{in} \\ \sin\varphi_{i1} \sin\theta_{i1} & \cdots & \sin\varphi_{in} \sin\theta_{in} \\ \cos\theta_{i1} & \cdots & \cos\theta_{in} \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中 $\varphi_{ij} = 2\pi \times \text{rnd}$ ， $\theta_{ij} = \pi \times \text{rnd}$ ， rnd 为 $(0, 1)$ 之间随机数； $i=1,2,\dots,m$ ； $j=1,2,\dots,n$ ； m 是种群规模； n 是量子位数。在 BQPSO 中，每个粒子同时占据空间三个位置，即同时代表如下三个优化解，分别称为 X 解、 Y 解、 Z 解。

$$p_{ix} = (\cos\varphi_{i1} \sin\theta_{i1}, \dots, \cos\varphi_{in} \sin\theta_{in}) \quad (8)$$

$$p_{iy} = (\sin\varphi_{i1} \sin\theta_{i1}, \dots, \sin\varphi_{in} \sin\theta_{in}) \quad (9)$$

$$p_{iz} = (\cos\theta_{i1}, \cos\theta_{i2}, \dots, \cos\theta_{in}) \quad (10)$$

2.2 解空间变换

记第 i 个粒子 p_i 上第 j 个量子位的 Bloch 坐标为 $[x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}]^T$ ，优化问题解空间第 j 维的取值范围为 $[a_j, b_j]$ ，则由单位空间 $I^n = [-1, 1]^n$ 映射到优化解空间的变换公式为

$$X_{ix}^j = [b_j(1+x_{ij}) + a_j(1-x_{ij})]/2 \quad (11)$$

$$X_{iy}^j = [b_j(1+y_{ij}) + a_j(1-y_{ij})]/2 \quad (12)$$

$$X_{iz}^j = [b_j(1+z_{ij}) + a_j(1-z_{ij})]/2 \quad (13)$$

因此，每个粒子对应优化问题的三个近似解。

2.3 粒子位置的更新

本文沿用普通 PSO 的更新机制调整量子比特的两个相位参数 θ 和 φ ，以实现粒子位置的更新。令粒子 p_i 的当前相位为 $\theta_{i1}, \theta_{i2}, \dots, \theta_{in}$ ； $\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, \dots, \varphi_{in}$ ，自身最优相位为 $\bar{\theta}_{i1}, \bar{\theta}_{i2}, \dots, \bar{\theta}_{in}$ ； $\bar{\varphi}_{i1}, \bar{\varphi}_{i2}, \dots, \bar{\varphi}_{in}$ ，全局最优相位为 $\theta_{g1}, \theta_{g2}, \dots, \theta_{gn}$ ； $\varphi_{g1}, \varphi_{g2}, \dots, \varphi_{gn}$ ，则 p_i 的相位可按如下两式调整。

$$\theta_{ij}(t+1) = w\Delta\theta_{ij}(t) + c_1r_1^1(\bar{\theta}_{ij}(t) - \theta_{ij}(t)) + c_2r_2^2(\theta_{gj}(t) - \theta_{ij}(t)) \quad (14)$$

$$\varphi_{ij}(t+1) = w\Delta\varphi_{ij}(t) + c_1r_1^1(\bar{\varphi}_{ij}(t) - \varphi_{ij}(t)) + c_2r_2^2(\varphi_{gj}(t) - \varphi_{ij}(t)) \quad (15)$$

其中 w 为惯性因子， c_1, c_2 分别为自身因子和全局因子， r_1^1, r_2^2 为 $(0,1)$ 之间随机数。

将式(14)重写为 $\theta_i(t+1) = w\Delta\theta_i(t) + [\Phi](\hat{\theta}_i(t) - \theta_i(t))$

其中

$$\hat{\theta}(t)_i = \text{diag}\left(\frac{c_1 r_1^1}{c_1 r_1^1 + c_2 r_1^2}, \dots, \frac{c_1 r_n^1}{c_1 r_n^1 + c_2 r_n^2}\right) \bar{\theta}(t)_i + \text{diag}\left(\frac{c_2 r_1^2}{c_1 r_1^1 + c_2 r_1^2}, \dots, \frac{c_2 r_n^2}{c_1 r_n^1 + c_2 r_n^2}\right) \theta(t)_g$$

此式与式(4)相同, 可见本文提出的“基于 Bloch 球面坐标编码的量子粒子群优化算法”能够收敛。

2.4 粒子位置的变异

一般量子优化算法都采用量子非门实现变异功能, 这种变异实质上为量子比特在单位圆内绕圆心旋转。量子非门即为泡利矩阵 σ_x , 其定义为

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

该门的功能为, 使量子比特在单位圆上绕圆心旋转。设量子比特为 $|\varphi\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle$ 则变异后为

$$\sigma_x |\varphi\rangle = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)|1\rangle \quad (17)$$

根据式(17), 我们提出如下变异方法。

令粒子 p_i 上第 j 个量子位的当前相位为 θ_{ij} 和 φ_{ij} , 则变异后的相位为 $\pi/2 - \theta_{ij}$ 和 $\pi/2 - \varphi_{ij}$ 。

2.5 种群评估和最优解更新

按式(8)-(10)计算每个粒子代表的三个解, 实施解空间变换, 计算适应度, 并排序。令 $gfit_{best}$ 为到目前为止历代种群获得的最佳适应度值, gp_{best} 为相应的最佳粒子。记 $fit(p_i) = \max(fit(X_i), fit(Y_i), fit(Z_i))$, $fit_{best} = \max_{1 \leq i \leq N}(fit(p_i))$, 若 $gfit_{best} < fit_{best}$, 则 $gfit_{best} = fit_{best}$, $gp_{best} = p_{best}$ 。

2.6 BQPSO 算法的优点

本算法中每个粒子占据搜索空间中的三个位置, 每步迭代三个位置同步更新, 因此, 可以提高对解空间的遍历性, 提高获得全局最优解的概率。

3 仿真应用

3.1 函数极值优化

1) Bohachevsky 函数

$$f(x, y) = 0.3 \cos 3\pi x - 0.3 \cos 4\pi y - x^2 - y^2 - 0.3 \quad (18)$$

其中 $x, y \in [-1, 1]$, 优化目标为求取函数极大值。此函数有多个局部极大值点, 其中只有两个为全局极大,

全局极大值为 0.24003441039434。当优化结果大于 0.24 时认为算法收敛。

2) Shaffers F1 函数

$$f_2(x, y) = 10 \cos 2\pi x + 10 \cos 2\pi y - x^2 - y^2 - 20 \quad (19)$$

其中 $x, y \in [-5.12, 5.12]$, 优化目标为求取函数极大值。此函数有很多个局部极大值点, 全局极大值为 0, 当优化结果大于 -0.005 时认为算法收敛。

3) Shaffers F5 函数

$$f(x_i) = \frac{1}{500} + \sum_{j=1}^{25} \frac{1}{j + \sum_{i=1}^2 (x_i - a_{ij})^6} \quad (20)$$

其中 $x_i \in (-65.536, 65.536)$

$$(a_{ij}^k) = \begin{pmatrix} -32 & -16 & 0 & 16 & 32 \\ -32+16k & -32+16k & -32+16k & -32+16k & -32+16k \end{pmatrix}$$

$$(a_{ij}) = (a_{ij}^0, a_{ij}^1, a_{ij}^2, a_{ij}^3, a_{ij}^4)$$

此函数有多个局部极大点, 全局极大值为 1.002, 当优化结果大于 1.000 时认为算法收敛。

4) Shubert 函数

$$f(x, y) = \left\{ \sum_{i=1}^5 i \cos[(i+1)x + i] \right\} \left\{ \sum_{i=1}^5 i \cos[(i+1)y + i] \right\} \quad (21)$$

其中 $x, y \in [-10, 10]$ 。此函数极易陷入局部极小值 -186.34, 此函数全局最小值为 -186.73090882259。当优化结果小于 -186.34 时认为算法收敛。

对于以上 4 个函数, 分别用 BQPSO、文献[8]中基于 Delta 势阱的 QDPSO 和文献[9]中 QPSO 优化, 为体现对比结果的公正性, 三种算法采用相同的种群规模 $m = 20$ 和进化代数 $G = 100$ 。QDPSO 的控制参数 $\alpha = 0.8$ 。BQPSO 和 QPSO 的变异概率 $p_m = 0.001$ 。为体现对比结果的客观性, 分别用每种算法运行 1000 次, 并记录收敛次数、平均步数、平均结果等评价指标, 对于收敛的情况, 还分别统计收敛到 X 解、Y 解、Z 解的次数。实验结果如表 1-表 4 所示。

表 1 Bohachevsky 函数优化结果对比

算法	收敛次数	X 解	Y 解	Z 解	平均步数	平均结果
BQPSO	954	468	485	1	46.5310	0.2400
QDPSO	160	71	89	—	93.7210	0.2390
QPSO	951	—	—	—	48.6810	0.2400

表 2 Shaffers F1 函数优化结果对比

算法	收敛次数	X 解	Y 解	Z 解	平均步数	平均结果
BQPSO	989	459	459	71	37.0240	-0.0050
QDPSO	163	68	95	—	83.3640	0.2670
QPSO	880	—	—	—	48.9870	0.0727

表 3 Shaffers F5 函数优化结果对比

算法	收敛次数	X 解	Y 解	Z 解	平均步数	平均结果
BQPSO	685	249	253	183	68.5100	0.8790
QDPSO	167	78	89	—	92.3560	0.5608
QPSO	368	—	—	—	75.6950	0.6983

表 4 Shubert 函数优化结果对比

算法	收敛次数	X 解	Y 解	Z 解	平均步数	平均结果
BQPSO	411	118	103	190	81.8300	-185.4323
QDPSO	175	96	79	—	92.3450	-182.8926
QPSO	390	—	—	—	81.4490	-184.7904

由表 1-表 4 可知, 对于连续优化问题, 三种模型优化能力的排序是一致的。由高到低依次为 BQPSO、QDPSO、QPSO。对于这种结果可作如下分析。

对于 QPSO, 蚂蚁采用基于平面上单位圆描述的量子位编码, 量子位只有一个可调参数, 量子行为不能充分体现, 所以其优化效率最低。

对于 QDPSO, 由于采用量子势阱(具体为 Delta 势阱)建立搜索机制, 所以具备收敛速度快的优点。然而在 QDPSO 中各优化变量为一维数轴上的直线搜索, 因此限制了搜索能力的进一步提高。

对于 BQPSO, 由于直接采用量子位的 Bloch 坐标对蚂蚁编码。从而将量子位的平面单位圆描述拓展到 Bloch 球面描述, 使量子行为得以充分体现, 因而有效提高了搜索能力。以上分析与实验结果是一致的。

3.2 模糊控制器参数优化

在模糊控制器的设计中, 控制作用 u 取决于误差 E 及误差变化 EC , 为适应不同被控对象的要求, 通过引进一个调整因子 α , 可得到一种带有调整因子的解析描述的模糊控制规则, 其形式如下。

$$u = -(\alpha E + (1-\alpha)EC), \quad \alpha \in (0, 1) \quad (22)$$

通过调整 α 的大小, 可以实现对 E 和 EC 不同程度的加权。当 E 较大时, 控制任务主要是消除误差, 此时应加大对 E 的加权, 相反当 E 较小时, 控制任务主要是减少超调以使系统尽快稳定, 此时应加大对 EC 的加权。因此, 在不同的误差等级, 需要引入不

同加权因子, 以实现控制规则的自调整。

以二阶系统为 $F(s) = \frac{20}{(2s+1)(4s+1)}$ 被控对象, 输入为阶跃信号, 误差、误差变化、控制量的论域为:

$$\{E\} = \{EC\} = \{u\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \quad (23)$$

考虑到模糊控制系统在不同状态下对控制规则中的应该有不同的要求, 实验中将 α 分为三级。

$$u = \begin{cases} -(\alpha_1 E + (1-\alpha_1)EC) & E = 0, \pm 1 \\ -(\alpha_2 E + (1-\alpha_2)EC) & E = \pm 2 \\ -(\alpha_3 E + (1-\alpha_3)EC) & E = \pm 3 \end{cases} \quad (24)$$

因此本实验需要同时优化 6 个模糊控制器参数: 量化因子 ke 、 kc , 比例因子 ku , 调整因子 α_1 、 α_2 、 α_3 。

应用 ITAE 积分性能指标设计评价函数

$$f = \frac{1}{a + J(\text{ITAE})} \quad (25)$$

其中 $J(\text{ITAE}) = \int_0^{\infty} t |e(t)| dt$, 为某一小正数以使分母不为零。根据经验, 6 个待优化参数初始范围设置为: $ke, kc, ku \in (0, 10)$, $\alpha_1 \in (0, 0.4)$, $\alpha_2 \in (0.4, 0.8)$, $\alpha_3 \in (0.8, 1.0)$

分别用 BQPSO、QDPSO、QPSO 优化上述参数, 种群规模取 15, 量子位数取 6, 限定代数取 50, 其他参数同前。三种算法的优化结果对比如表 5 所示。

表 5 模糊控制器参数优化结果对比

算法	ke	kc	ku	α_1	α_2	α_3	J(ITAE)
BQPSO	5.2252	2.1735	9.049	0.3528	0.4244	0.8115	4.2374
QDPSO	4.8721	2.8991	6.9541	0.0354	0.7472	0.8597	4.5621
QPSO	5.4012	7.8837	6.1881	0.2957	0.4392	0.9041	5.1298

由表 5 可知, 在相同种群规模和迭代步数条件下, BQPSO 的 ITAE 指标最小, 其次是 QDPSO 和 QPSO。从而表明 BQPSO 比 QDPSO 和 QPSO 搜索到了更加优良的控制参数组合, 从而使模糊控制器有更加优良的控制性能。实验结果表明, BQPSO 的优化能力的确优于 QDPSO 和 QPSO。

4 结语

优化能力和优化效率的改进, 是智能优化算法领域的两个基本问题。本文在分析量子粒子群优化算法

(下转第 84 页)

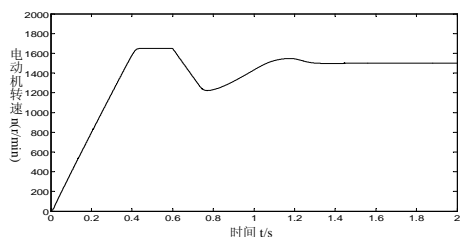


图7 常规PI控制器双闭环直流调速系统电动机转速波形

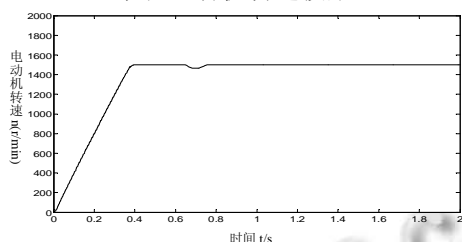


图8 模糊PI控制器双闭环直流调速系统电动机转速波形

7 结论

鲁棒性是一个系统极为重要的性能指标，是系统得以正常工作的前提。直流电机调速系统是一个多变量、强耦合、非线性、时变的复杂系统，用常规的PI控制难以满足动态响应和高性能、高精度的要求。而模糊PI控制策略与常规PI控制策略相比明显具有鲁棒性强、跟踪性能好、响应灵敏、波动小的优点，因此

模糊PI控制策略在双闭环直流调速方面应具有更好的应用前景。

参考文献

- 1 杨祖元,杨华芬.双闭环直流调速系统模糊PID控制研究.计算机应用研究,2011,28(3):921-923.
- 2 赵梅花,吴锐,付军.晶闸管直流调速系统的应用.机电产品开发与创新,2007,20(5):158-164.
- 3 刘洋,范立南.基于MATLAB的直流调速系统仿真研究.沈阳大学学报,2010,22(5):11-14.
- 4 李欣.基于免疫遗传算法的永磁无刷直流电机模糊控制.天津:天津大学,2007:53-53.
- 5 王祖亮,侯北平.基于Simulink的双闭环调速系统仿真研究.浙江科技学院学报,2009,21(1):6-9.
- 6 许晓峰.电机及拖动.第2版.北京:高等教育出版社,2004.64-65.
- 7 邹月海.基于模糊控制的永磁无刷直流电机调速系统研究.哈尔滨:哈尔滨工程大学,2009.14-15.
- 8 王兆安,黄俊.电力电子技术.第4版.北京:机械工业出版社,2002.54-59.
- 9 洪乃刚.电力电子和电力拖动控制系统的MATLAB仿真.北京:机械工业出版社,2006.162-169.
- 10 陆华才,徐月同,杨伟民,陈子辰.永磁直线同步电机进给系统模糊PID控制.电工技术学报,2007,22(4):59-63.

(上接第79页)

运行机理的基础上，提出了一种基于Bloch坐标编码的量子粒子群优化算法。实验结果揭示出基于Bloch球面建立搜索机制，可有效扩展解空间的搜索范围，增强解空间的遍历性。

参考文献

- 1 Kennedy J, Eberhart RC. Particle swarms optimization. Proc. of IEEE international conference on Neural Networks. USA: IEEE Press,1995:1942-1948.
- 2 郭文忠,陈国龙.求解VLSI电路划分问题的混合粒子群优化算法.软件学报,2011,22(5):833-842.
- 3 Lin SW, Ying KC, Chen SC, et al. Particle swarm optimization for parameter determination and feature selection of support vector machines. Expert Systems with Applications, 2008,35(4):1817-1824.

- 4 Cai XJ, Cui ZH, Zeng JC, et al. Dispersed particle swarm optimization. Information Processing Letters,2008,105(6):231-235.
- 5 Liu Y, Qin Z, Shi ZW, et al. Center particle swarm optimization. Neurocomputing,2007,70(4-6):672-679.
- 6 张英杰,邵岁锋.一种基于云模型的云变异粒子群算法.模式识别与人工智能,2011,24(1):90-96.
- 7 朱海梅,吴永萍.一种高速收敛粒子群优化算法.控制与决策,2010,25(1):20-24.
- 8 方伟,孙俊,谢振平,须文波.量子粒子群优化算法的收敛性分析及控制参数研究.物理学报,2010,59(6):3686-3694.
- 9 李士勇,李盼池.求解连续空间优化问题的量子粒子群算法.量子电子学报,2007,24(5):569-574.