基于递归插值与逼近的曲面拟合改进算法①

杨 剑，陈和平，余 伟，沈 磊

(武汉科技大学 信息科学与工程学院，武汉 430081)

摘 要：对原有的递归插值分割曲面算法进行了分析，给出了基于递归插值与逼近的曲面拟合改进算法，克服了原有算法在复杂曲面拟合中由于已知点分布不均匀等因素造成的困难，改善了曲面拟合的效果和效率。

关键词：曲面；拟合；递归；插值；分割

Surface Fitting Improved Algorithm Based on Recursive Interpolation and Approximation

YANG Jian, CHEN He-Ping, YU Wei, SHEN Lei

(Institute of Information Science and Engineering, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China)

Abstract: The original recursive interpolating subdivision surface algorithm is analyzed. The surface fitting improved algorithm based on recursive interpolation and approximation solved the difficulties caused by some factors such as uneven distribution of known point with original algorithm in the complex surface fitting, improved effectiveness and efficiency of surface fitting.

Keywords: surface; fitting; recursive; interpolation; partitioning

自由曲面建模是复杂产品数字化设计与制造的基础和关键。随着信息技术的快速发展，复杂产品的数字化设计与制造技术已成为快速研发相关产品的重要手段[1]。

本文主要研究了基于递归插值与逼近的曲面拟合方法，在原有的递归分割曲面算法的基础上进行了改进，改进后的算法根据多面体分割情况进行分析计算并调整递归算法，改善了曲面拟合的效率和画面效果。

1 基本原理

基于递归插值分割的自由曲面重构算法是从简单的多边形初始网格开始，通过网格模型中相连定点进行插值分割来递归计算新的节点，然后将计算出的新的节点相连，最终达到逼近曲面的目的。插值分割算法一般采用中点插值逼近曲面[2]。

递归插值分割算法一般用三角形或者四边形为初始网格进行分割。现以三角形初始网格递归插值来逼近曲面为例。如果以空间曲面上的三个初始测量点构成的三角形表示空间曲面时，一般会存在较大的误差。解决此问题的算法是：由于三角形是网格的基本单元，因此，针对每个三角形进行考虑，在三角形的每条边上均插入一个节点,将新插入的节点映射到需要模拟的曲面上，再将新旧节点分别相连, 用新生成的 4 个小三角形代替原来的平面三角形单元以逼近空间曲面，减小几何误差，如图 1 所示。对于新生成的三角形单元, 再分别应用上述递归插值分割算法生成新的小三角形。只要采用的插值算法适当, 经过若干次递归插值后便可得到满足一定几何精度要求的自由曲面模型。

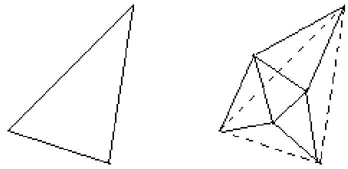


图 1 三角形插值分割原理

上述算法可以克服传统参数化曲面表示法无法直接处理拓扑结构比较复杂的曲面的缺点，从而避免了繁琐的参数曲面片之间的光滑拼接和裁剪问题，而且

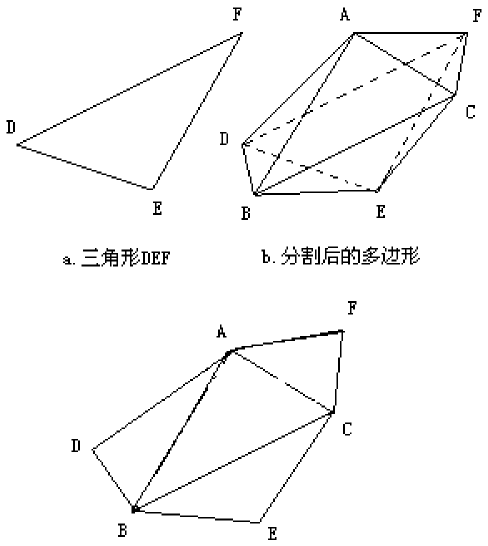
① 收稿时间:2010-09-12;收到修改稿时间:2010-10-15

由递归分割算法所得到的几何模型是典型的多面体模型，一般情况下还可以省去参数化曲面在实际应用中所必须的离散化处理[3]。

2 现有方法的不足及改进算法

2.1 现有方法的不足

根据以上对插值分割的介绍，可以得知递归插值法进行曲面重构依赖于插值分割算法，如果插值算法选用不适当，将会导致曲面重构不理想。如图 2 所示，在曲面重构中如果对非正规 ΔDEF 进行中点插值分割，分割后由三个插值点得到的 ΔABC 远远大于 ΔABD、ΔACF 和 ΔBCE，在进行多次分割后这种情况依然存在，这种情况影响曲面拟合效果。



a. 三角形DEF b. 分割后的多边形

c. 将分割后的四个三角形展开的结果

图 2 中点递归插值分割示意图

目前，对于分布不均匀的曲面原始数据，大多数软件还是使用蒙面法拟合曲面。设曲面的原始数据点集合为 $S=\{q_s(s=0,1,...,M-1)\}$，那么蒙面法能够保证曲面严格通过集合 S 中所有的数据点。但是，在解决分布不均与原始数据点的复杂曲面拟合时，该方法依然存在困难。

曲面原始点的分布不均匀将导致拟合的曲面光顺性很差，而这主要由于分布不均匀的点组合成的三角形大小不等，在进行多次分割后曲面内部形状的变化不均匀。因此，本文提出在解决分布不均与曲面原始点的曲面重构问题时，应充分考虑曲面网格点的位置，对于分布不均匀的网格点组成的三角形区域，分别计算出其面积，对于面积超出一定范围的三角形再进行分割。

已知三角形三条边的长度分别为 a,b,c，设 p 为三角形周长的一半，S 为三角形的面积，有：

$$p=\frac{a+b+c}{2},$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$S=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}}{4}$$

针对图 2 中不规则三角形 DEF 的分割，先对其进行中点插值分割得到四个三角形：ΔABD、ΔABC、ΔACF 和 ΔBCE，分别计算这些三角形的面积，可以得知 ΔABC 的面积超出其他三角形，然后对 ΔABC 再做一次中点分割，得到结果如图 3 所示。所得到的新曲面不仅更加趋近于曲面，而且也更有利于下一次的分割。本文将上述方法称为“4 点插值分割法”。该 4 点插值分割法不仅适用于针对某个三角形的分割，对多个三角形的分割也同样适用。

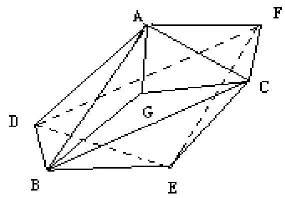


图 3 改进后的分割结果

2.2 改进算法—4 点插值分割法

定义：设在对任意曲面进行拟合过程中，曲面的原始数据点集合为 S，其中分布均匀合理的子集为 $S_1=\{q_{s_i},(i=0,1,...,r)\}$，剩余分布不均匀不合理的子集为 $S_2=\{q_{s_j},(j=0,1,...,M-1-r)\}$。

则改进后的递归插值逼近算法如下：

ⅰ)将待分割的网格点加入到集合 S；

ⅱ)将集合 S 按其中的网格点满足的规则分成子集 S_1 和 S_2；

iii)对于子集 S_1，运用常规递归插值分割算法进行分割；

iv)若子集 S_2 非空，运用 4 点插值分割法进行分割；

ⅴ)判断多面体是否满足精度要求，如果不满足，则返回到步骤 ⅰ 再进行分割；如果满足，则完成分割。

3 实例分析

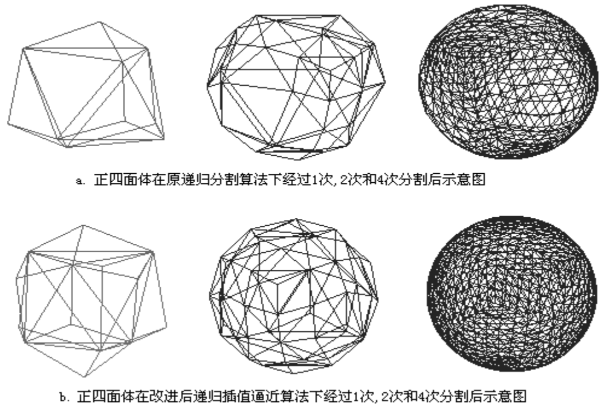
基于递归插值与逼近的曲面拟合过程是一个逐步实现的过程，需要经过多次循环递归。本例中，采用正四面体经过分割后趋近于球面。图 6 给出了正四面体在两种算法下进行 1 次、2 次和 4 次分割后的示意图。表 1 给出了两种算法下三角形个数、体积、曲率的范围和接近度的比较。在体积的计算中，分别计算出每个三角形与圆心组成的四面体的体积，然后求和即可[7]。设：

$$\vec{a} = \vec{AB}$$

$$\vec{b} = \vec{AC}$$

$$\vec{c} = \vec{AD}$$

$$V = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \bullet \vec{c}|}{6}$$



a. 正四面体在原递归分割算法下经过1次, 2次和4次分割后示意图

b. 正四面体在改进后递归插值逼近算法下经过1次, 2次和4次分割后示意图

图 4 正四面体在不同算法下分割不同次数后的示意图

表 1　两种算法生成曲面的性能比较

项目	算法	1 次分割	2 次分割	4 次分割
三角形个数	原算法	16	64	1024
	改进算法	24	96	1536
多面体体积	原算法	1.821367	3.274469	4.120592
	改进算法	2.309401	3.606130	4.149588
高斯曲率变化范围	原算法	-54.1-17.5	-5.3-3.7	-2.5-2.4
	改进算法	-34.6-10.1	-4.0-3.8	-2.0-1.8
接近度	原算法	0.435	0.781	0.984
	改进算法	0.551	0.861	0.991

从表 1 可知，改进后的算法在递归分割中产生了更多的三角形，每次分割后的接近度都大于原算法的接近度，并且曲率的变化也比原算法要小。仅从分割 4 次后的比较中可知，改进的算法使得曲面与球面的接近度达到了 0.991，基本完成球面的拟合，而且其高斯曲率的变化也减小到-2.0～1.8，这表明改进后的分割算法比改进前具有更优良的光顺性。

从图 4 和表 1 的比较中可以看出，在经过 4 次分割后改进后的曲面拟合算法已经基本满足了对原始网格点的逼近要求。

本文所提出的将递归插值与逼近相结合的方法可以应对复杂曲面的重构，并且使得分割后的三角形更趋近于均匀化，曲面拟合的程度更好。

4 结语

本文作者创新点：对原有算法进行了改进，弥补了原算法在不均匀区域分割时的困难，克服了传统参数曲面表示法无法直接处理任意拓扑结构复杂曲面的缺陷,从而避免了复杂而又难以处理的参数曲面片的光滑拼接问题。

参考文献

1 Hearn D, Baker MP. Computer Graphics with OpenGL 3rd Edition. Prentice Hall. 2003: 20－56.

2 OpenGL 体系结构审核委员会.OpenGL 编程指南.第 4 版.北京:人民邮电出版社,2005.10－12.

3 任秉银,孟庆鑫,王丽慧.面向自由曲面重构的递归插值分割算法.哈尔滨工程大学学报,2001.

4 任秉银,孟庆鑫,于华.基于递归分割的曲面造型算法.高技术通讯,2002,12(1):71－74.

5 邱泽阳,肖双九,杨海成,等.一种基于逼近理论的曲面重构方法.计算机辅助设计与图形学学报,2001.

6 王申,屈志毅,等.基于邻域的多尺度模糊 C-均值聚类图像分割.微计算机信息,2010,1(2):184－185.

7 李庆杨,王能超,易大义.数值分析.北京:清华大学出版社,2001.23－35.

8 McReynolds T, Blythe D. Advanced Graphics Programming Using OpenGL, 2000.