粒子群优化算法种群规模的选择①

张雯雰 [1] 王 刚 [1] 朱朝晖 [2] 肖 娟 [1] (1.湘南学院 计算机系 湖南 郴州 423000;

2.广州杰赛通信规划设计院 广东 广州 510310)

摘 要： 介绍了相关文献对粒子群优化算法种群规模的建议，分析了种群规模与问题维度、搜索速度、精度及稳定性之间的关系，提出了一种选择种群规模的更精确的方法。选用了 2 个经典测试函数分别在维度为 20、60、100 和 200 的情况下，对 20、40、60、80 共 4 种不同的种群规模进行了函数优化实验。对实验结果进行了分析，给出了种群规模的一个一般性的建议，并且提出了一种基于实验的，利用种群规模与精度、时间关系图来选择种群规模的方法。

关键词： 粒子群优化算法；种群规模；维度；函数优化

Population Size Selection of Particle Swarm Optimizer Algorithm

ZHANG Wen-Fen[1], WANG Gang[1], ZHU Zhao-Hui[2], XIAO Juan[1]

(1.Faculty of Computer, Xiangnan University, Chenzhou 423000, China; 2.Guangzhou GCI Plan & Design Institute of Communication Engineering, Guangzhou 510310, China)

Abstract: This paper gives advice on population size selection from literatures and analyzes the relations between population size, dimension, precision and stability. It proposes a method of population size selection. Two benchmark functions are employed to perform function optimization with different dimensions: 20, 60, 100 and 200. For each dimension, population size is set to 20, 40, 60 and 80. This paper analyzes the results and proposes a general population size. Furthermore, an approach based on experiments is proposed for population size selection. With the approach, a relation graph of population size, time and precision can be used to determine the optimum population size.

Keywords: PSO; population size; dimension; function optimization

粒子群优化(Particle Swarm Optimizer, PSO)算法[1]是在 1995 年由 Kenndy 和 Eberhart 共同提出。PSO 算法源于对鸟群觅食行为的模拟，是群体智能算法的一个典型代表。此算法简单高效，已被广泛用于各种寻优问题，是智能优化算法中的一个研究热点。

目前，对 PSO 算法的研究主要集中在 2 个方面，一是算法的改进，二是参数的设置。本文将对种群规模的设置进行一些探讨。种群规模 PSize 是 PSO 算法的一个重要参数，表示粒子群中粒子的个数，对算法的收敛速度、精度和稳定性有较大影响，因此很多文献论及或者研究了此参数的选择问题。如 Shi 和 Eberhart 提到“ PSO 算法对种群规模不敏感 ”[2]；文献[3]建议将此参数设置为 30；文献[4]建议设为 20 至 50；文献[5]则建议设为 30 或者 40。这些文献都只提出了一个一般性的建议，没有说明更精确的选择方法，也没有提及问题维数与 PSize 的关系，本文将对这两个方面进行更为细致的论述。

1 粒子群优化算法

PSO 算法是一种基于随机搜索的仿生优化算法，

① 基金项目:湖南省教育厅科研基金(09C921)

收稿时间:2009-09-28;收到修改稿时间:2009-11-08

此算法不需要问题连续可微，简单高效且易于实现。最基本的 PSO 算法描述如下：

PSO 算法中的群被称为粒子群，群里的个体被称为粒子。在一个 D 维搜索空间中，共存在 n 个粒子。在第 k 次迭代时，第 i 个粒子的位置为 $X_i^k \in R^D$，其历史最优位置为 P_i^k，所有 $P_i^k(i=1,2,\cdots,n)$ 中的最优值为 P_g^k，粒子的飞行速度为 $V_i^k \in R^D$。

每个粒子的初始位置和速度都随机产生。第 k+1 次迭代时，每个粒子的飞行速度及位置按公式(1)和(2)进行计算[1]：

$$V_i^{k+1} = \omega V_i^k + c_1 r_1 (P_i^k - X_i^k) + c_2 r_2 (P_g^k - X_i^k) \quad (1)$$

$$X_i^{k+1} = X_i^k + V_i^k \quad (2)$$

其中，c_1 和 c_2 为正的常数，称为学习因子或加速因子，r_1 和 r_2 为[0, 1]间均匀分布的随机数。ω为惯性权重系数，是 Shi 与 Eberhart 等人后来加入的，用于控制算法的搜索步长[6]。在每轮迭代中，飞行速度都限制在区间[-Vmax, Vmax]内。粒子群中的每个粒子从初始位置和速度开始，按照公式(1)和(2)进行迭代计算，直至满足算法终止条件。

2 函数实验

2.1 实验设计

本文使用 PSOT 粒子群优化工具箱[7]里的标准 PSO 在 MATLAB7.0 中进行函数优化实验。PSO 算法的参数采用默认值：c_1 和 c_2 取值为 2，惯性权重系数由 0.9 变化到 0.4，最大步长为 4。

本文的测试函数为 2 个常用的经典测试函数，分别是：

$$f1(x) = -\sum_{i=1}^{n} (x_i \sin(\sqrt{|x_i|})) \quad (3)$$

$$f2(x) = \frac{1}{4000}\sum_{i=1}^{n}(x_i - 100)^2 - \prod_{i=1}^{n}\cos(\frac{x_i - 100}{\sqrt{i}}) + 1 \quad (4)$$

其中，函数 f1 的全局最小值为-418.98333n，函数 f2 的全局最小值为 0；f1 函数自变量 $x_i \in$ [-500,500]，f2 函数自变量 $x_i \in$ [-600,600]。

对于以上 2 个函数，问题维数 n 被设计为 4 种大小：20、60、100 和 200，PSize 也设计为 4 种规模：20、40、60、80。这样，维数和 PSize 一共有 16 种组合，对于其中每一种组合，都用 PSO 算法进行了 100 次函数优化。

2.2 实验结果与分析

函数 f1、f2 的优化结果如图 1、图 2 所示。图中分别列出了维数为 20、60、100、200 时，不同种群大小的收敛曲线，其数据点均为 100 次运行的平均值。图中的横坐标为种群规模与迭代次数的乘积，即新位置的个数。因为算法生成相同个数的新位置所花费的时间几乎相同，若处理一个新位置所需的时间为 t，则横坐标上的点 x 所对应的运行时间为 tx，即可以把横坐标作为运行时间的度量。

从图 1、图 2 可知，问题的维数对种群规模的选取有一定的影响。对于函数 f1，在 20 维情况下，种群规模为 80 时的搜索精度约是为 20 时的 1.33 倍，200 维情况下则为 1.95 倍。可见当维度从 20 变化到 200，大种群规模的优势变大了。对于函数 f2，在 20 维情况下，种群规模为 20 和为 40 时精度差距不大，但在 200 维情况下，种群规模为 40 时的精度明显比为 20 时高。但总的来说，相对于 10 倍的维度变化，种群规模对问题的维度并不敏感。

图 1、图 2 表明，无论维度大小，PSize 越大收敛速度越慢、搜索的精度越高。对于函数 f1，增大种群规模可以较明显地提高搜索精度，特别是当种群规模从 20 变为 40 时，或者 60 维情况下从 40 变为 60，100 维和 200 维情况下从 40 变为 80 时。对于函数 f2，在维数为 200 时，较大的种群规模也显示出了优势。但总的来说，当维数大于 40 时，增加种群规模只会带来较小的精度提升。还可以看到，对于不同的函数种群规模对精度的影响可能相差很大。

实际上，PSize 越大，搜索的稳定性也越好。以 f1 函数 60 维的情况为例，图 3 显示了 F1 函数 60 维情况下不同种群规模各 100 次运行所得的收敛曲线。从图中可以看出，PSize 越大这些收敛曲线就越集中，搜索的稳定性越好。

3 种群规模选择方法

上述分析说明，选择种群规模需要在精度、稳定性和运行时间之间进行权衡，有时也要考虑到问题的维度。一般而言，若侧重于减少运行时间，种群规模可设为 40 左右，若偏向于高精度和高稳定性，则可

设为 50 到 80。实际上，对于种群规模为 100 的情况，我们也做了一些函数优化实验，与 80 的情况相比，其精度的提升已经很不明显了。

上面的函数实验也说明，对于不同问题，种群规模对精度的影响可能很不一样。因此，若要为实际问题更精确地选择种群规模，最好依据此问题的实验数据。我们可以利用种群规模与精度、时间关系图来确定种群大小。例如，若要在 T 时间内找到尽可能优的解，选择种群规模的步骤如下：

1) 先确定 x 轴上与时间 T 对应的坐标点。

2) 通过这一点向上作一条与 y 轴平行的辅助线，选出最先与此线相交的曲线。

3) 以这条曲线所代表的种群规模为基础，综合稳定性要求确定种群规模。

具体地，对于 f1 函数 60 维的情况，若要求在 3 秒内找到尽可能好的解，并且经过测试已知所用的计算机每秒钟能生成和处理 10000 个新位置。那么选择种群规模的方法是：先在图 1 维度为 60 的 x 轴上找到值为 30000 的点，通过此点向上作一条平行于 y 轴的直线。最先与此线相交的是规模为 60 和 80 的曲线，表明当运行到这个时间点时，种群规模为 60 和 80 的算法获得的精度最高，再参考图 3 综合稳定性需求确定种群规模。

类似地，若要尽快找到精度高于 Y 的解，也可用相似的方法。只需先确定 y 轴上与 Y 对应的坐标点，然后通过此点向右作一条平行于 x 轴的线，选出最先与此线相交的曲线，再以这条曲线所代表的种群规模为基础来确定种群规模。

4 结论

对于文中的 2 个测试函数，通过优化实验和分析可知：种群规模对问题的维数不敏感；当维数大于 40 时，搜索精度对种群规模不敏感；一般地，若侧重于减少运行时间，种群规模可设为 40 左右，若偏向于高精度和高稳定性，则可设为 50 到 80；利用种群规模与精度、时间关系图可以更精确地选择具体问题的种群规模。这些结论对选择 PSO 算法的种群规模具有指导意义。

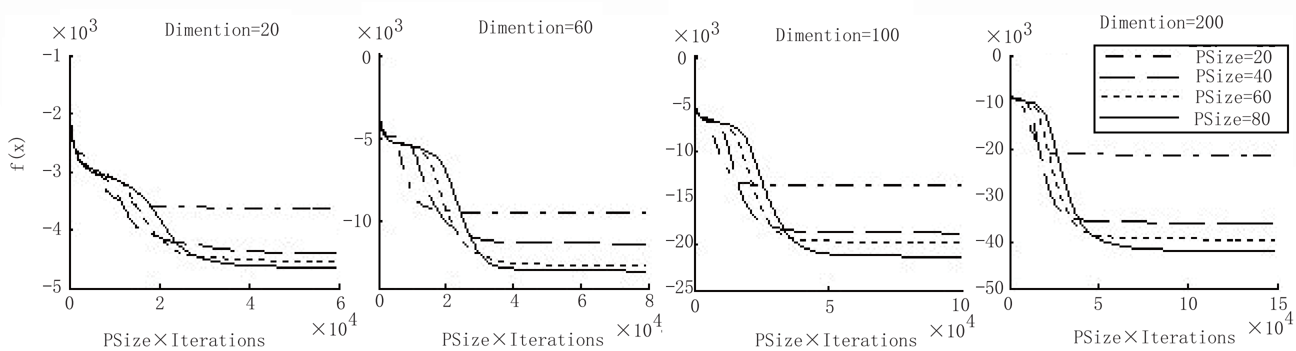

图 1　函数 f1 不同维数的种群规模与精度、时间关系

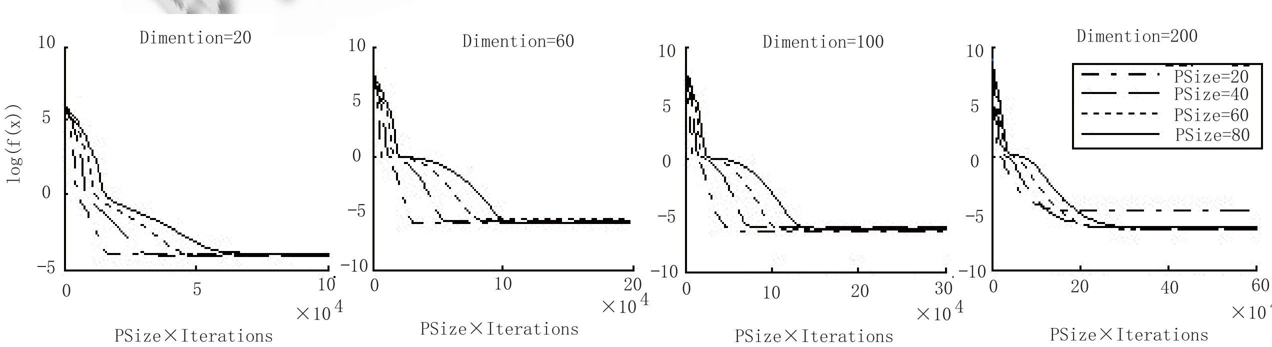

图 2　函数 f2 不同维数的种群规模与精度、时间关系

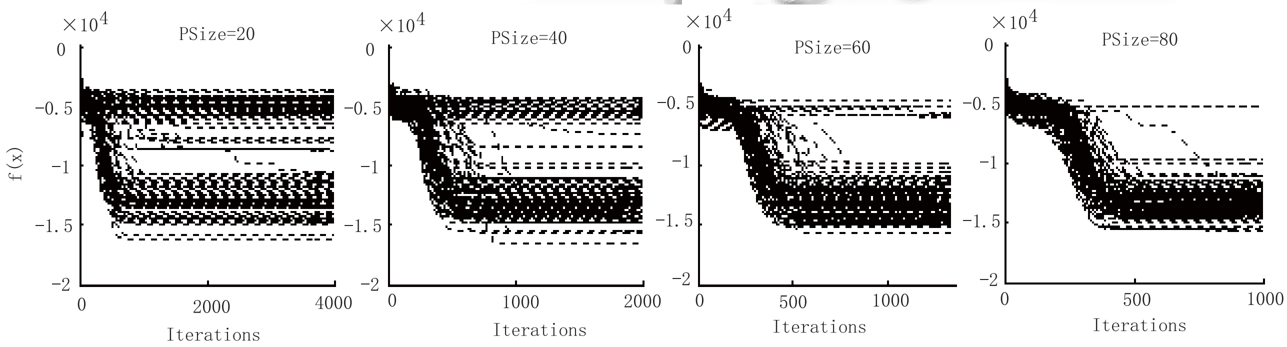

图 3 函数 f1 60 维时不同种群规模各 100 次运行的收敛曲线

参考文献

1 Kenndy J, Ebethart RC. Particle Swarm Optimization. Proc. of the 1995 IEEE International Conference on Neural Networks, Piscataway, NJ, USA, 1995,1942－1948.

2 Shi Y, Eberhart RC. Empirical Study of Particle Swarm Optimization. 1999 Congress on Evolutionary Computing, 1999, Vol. III: 1945－1950.

3 Carlisle A, Dozier G. An Off-The-Shelf PSO. Proc. of the Workshop on Particle Swarm Optimization. 2001. 1－6.

4 王维博,林川,郑永康. 粒子群算法中参数的实验与分析.西华大学学报, 2008,27(1):76－80.

5 刘志煌,杨宜民. PSO 的惯性权重与种群大小选择. 计算机与现代化, 2007,(6):1－3.

6 Shi Y, Eberhart RC. A modified Particle Swarm Optimizer. IEEE International Conference on Evolutionary Computation Proceedings, Anchorage, AK, USA, 1998. 69－73.

7 Birge B. Psot-a particle swarm optimization for use with matlab. In SIS’03，Proceedings of the 2003 IEEE, Swarm Intelligence Symposium, April 2003. 182－186.