

# 一种基于谱聚类的灰度图像分割法<sup>①</sup>

## A Spectral Clustering-Based Algorithm for Gray Graph Segmentation

金慧珍 赵辽英 刘 博 (杭州电子科技大学 计算机应用研究所 浙江 杭州 310018)

**摘要:** 针对传统模糊核聚类算法当数据类差别很大时,小数据类被误分或被大数据类吞并的缺陷,提出了一种新的加权模糊核 C 均值聚类算法(Weighted Fuzzy Kernel C-Means),为每一个类分配了一个动态权值;同时将该算法引入到谱聚类中,设计了一个以图像灰度特征作为分类样本的改进的谱聚类算法,解决了谱聚类应用于图像分割时权矩阵的谱难以计算的实际问题。实验结果表明该算法具有较好的分割效果。

**关键词:** 模糊核聚类 谱聚类 图像分割 权矩阵 灰度特征

### 1 引言

C 均值算法和 FCM 算法均存在不适合多种数据结构的缺陷,模糊核聚类算法<sup>[1,2]</sup>将数据通过不同的核函数映射到高维特征空间后再进行模糊 C-均值(Fuzzy C-Means, FCM)聚类,在一定程度上克服了这个缺陷,但在数据类差别很大的情况下,会导致聚类时小数据类被误分或被大数据类错误吞并的后果<sup>[3]</sup>。针对上述问题,本文提出了一种加权模糊核聚类算法(WFKCM),将各类之间的影响因子引入其中,通过为每一个类动态分配一个权值,并使算法在聚类过程中对权值进行自适应调整,可改善差别很大数据类的聚类效果。

C 均值算法、FCM 都存在对初始解敏感并且容易获得局部最优解的问题。谱聚类<sup>[4,5]</sup>具有能在任意形状的样本空间上聚类,且收敛于全局最优解的优点。谱聚类算法是近几年研究得比较多、应用逐渐广泛的一种聚类分析算法。谱聚类<sup>[4]</sup>用 C 均值算法对权矩阵的特征向量进行重聚类,本文提出了一种改进的谱聚类算法,用 WFKCM 对权矩阵的特征向量进行重聚类。

基于谱聚类的图像分割方法在实际应用中存在一个问题:权矩阵的特征值和特征向量难以计算<sup>[6]</sup>。由于聚类的对象是图像的像素,权矩阵的维数将比较大,例如一幅  $256 \times 256$  的灰度图像,其权矩阵的维数将达到  $2^{16} \times 2^{16}$ ,而一幅  $1024 \times 1024$  的灰度图像,

其权矩阵的维数将高达  $220 \times 220$ ,所以计算权矩阵的特征值和特征向量将比较困难。针对上述问题,本文首先用谱聚类算法对图像的灰度级进行聚类,再对具体图像进行分割。实验表明,该算法用于图像分割中的效果优于文献<sup>[4]</sup>。

### 2 加权模糊核 C 均值算法--WFKCM

假设输入空间样本  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  已被映射到特征空间  $\phi(x_1), \dots, \phi(x_N)$ , 我们提出改进的模糊核聚类算法——加权模糊核聚类(WFKCM)算法,定义了一个新的目标函数:

$$J_{k,m}(X; U, V) = \sum_{j=1}^c \sum_{i=1}^N a_j u_{ji}^m d_{k,j}^2(X_i, V_j) = \sum_{j=1}^c \sum_{i=1}^N a_j u_{ji}^m \|\phi(X_i) - \phi(V_j)\|^2 = \sum_{j=1}^c \sum_{i=1}^N a_j u_{ji}^m (K(X_i, X_i) - 2K(X_i, V_j) + K(V_j, V_j)) \quad (1)$$

式(1)中  $m$  为模糊控制指数,  $u_{ji}$  为第  $j$  个数据对第  $i$  类的隶属度,  $C$  是需要划分的类数,  $2 \leq C \leq N$ ,  $a_j$  是一个类的动态权值,它表示该类的重要度,亦即在迭代过程中那些拥有较多元素的类具有较稠密的组成元素,它的重要度应该更大,同时它对应的所有元素的隶属度之和也较大;反之,那些组成元素较小的类或组成元素的分布较稀疏的类具有较小的重要度,因此隶属度之和也较小。通过权值的动态调整可以使算法

① 基金项目:浙江省自然科学基金项目(Y106085)

收稿时间:2008-09-26

为数据集中不同的类分配不同的权值，从而改善聚类的效果。该  $a_j$  满足约束条件：

$$\sum_{j=1}^c a_j = 1 \quad (2)$$

按照 Lagrange 乘子寻优法，式(1)所示目标函数的最小值可由式(3) ~ (5)式获得：

$$\hat{v}_j = \frac{\sum_{i=1}^N u_{ji}^m K(x_i, v_j) x_i}{\sum_{i=1}^N u_{ji}^m K(x_i, v_j)} \quad (3)$$

$$\hat{a}_j = \frac{(\sum_{i=1}^N u_{ji}^m (1/d_{Kji}^2(x_i, \hat{v}_j)))^{1/(m-1)}}{\sum_{j=1}^c (\sum_{i=1}^N u_{ji}^m (1/d_{Kji}^2(x_i, \hat{v}_j)))^{1/(m-1)}} \quad (4)$$

$$\hat{u}_{ji} = \frac{a_j (1/d_{Kji}^2(x_i, v_j))^{1/(m-1)}}{\sum_{j=1}^c a_j (1/d_{Kji}^2(x_i, v_j))^{1/(m-1)}} \quad (5)$$

当  $\max_{j,i} |\hat{u}_{ji} - u_{ji}| < \varepsilon$  获得最终的划分矩阵和聚类中心矩阵。WFKCM 的实现步骤如下：

- 1) 选择类数  $c$ 、模糊指数  $m$  和停止条件  $\varepsilon \in (0, 1)$
- 2) 选择核函数  $K$  及其参数
- 3) 选择初始类中心和加权矩阵  $a_j$  ( $j=1, 2, \dots, c$ )
- 4) 按式(3)更新类中心为  $\hat{v}_j$
- 5) 按式(4)更新加权全矩阵为，按式(5)更新更新划分矩阵为  $\hat{u}_{ji}$
- 6) 如果  $\max_{j,i} |\hat{u}_{ji} - u_{ji}| < \varepsilon$ ，则结束，否则转到第 4) 步。

### 3 基于谱聚类的灰度图像分割法

#### 3.1 谱聚类相关定义

源于图的谱分割，谱聚类进行图像分割时一般先以图像的像素为顶点构造赋权图(边权一般反映像素之间的相似程度)，然后通过分析一个以图的边权为元素的矩阵(权矩阵)的特征向量和特征值来对图的顶点进行聚类以达到分割图像的目的。将一幅图像视为一个带权的无向图  $G=(V, E)$ ，像素集被看作节点集  $V$ ，边缘集被看作边集  $E$ ，像素之间的连接权为  $W(i, j)$ 。

定义 1<sup>[7]</sup>.  $link(A, B) = \sum_{i \in A, j \in B} W_{ij}$ ， $degree(A) = link(A, V)$   
 图像分割的目标是将图  $G$  划分为  $k$  互不相交部分  $V_1, V_2, \dots, V_k$ ，即  $v_1 \cup v_2 \cup \dots \cup v_k = v$ ，且有

$$v \cap v_1 \cap \dots \cap v_k = \emptyset。$$

定义 2. 
$$RAssoc(G) = \max_{V_1, \dots, V_k} \sum_{c=1}^k \frac{link(v_c, v_c)}{|V_c|}$$

对于一幅图像，最优分割基本原则就是使划分成  $k$  个子图(区域)内部相似度最大，子图之间的相似度最小，即定义 2 的  $RAssoc$  值式取得最大。

#### 3.2 谱聚类的灰度图像分割法

基于谱聚类的图像分割方法简单，能处理较复杂的图像。但是基于谱聚类的图像分割方法在实际应用中存在一个问题：权矩阵的特征值和特征向量难以计算。由于聚类的对象是图像的像素，权矩阵的维数将比较大，例如一幅  $2^{56} \times 2^{56}$  的灰度图像，其分类样本数为 65536，其权矩阵的维数将达到  $216 \times 216$ ，而一幅  $1024 \times 1024$  的灰度图像，其分类样本数为  $2^{10} \times 2^{10}$ ，其权矩阵的维数将高达  $2^{20} \times 2^{20}$ ，所以计算权矩阵的特征值和特征向量将比较困难。针对这个问题本文直接以图像的灰度级为样本进行谱聚类算法，从而其分类样本数严格小于等于 256，避免了上述问题。并且数值特征样本数不会随着图像大小的扩大而增加。因此采用数值特征作为分类样本，会大大降低谱聚类算法的计算复杂程度。避免了谱聚类对于大图像处理困难的问题。

谱聚类算法本质上是利用亲和矩阵的特征向量进行聚类。设  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  为待聚类的数据集。亲和矩阵的定义为： $A_{ij} = \exp(-d(x_i - x_j)/2\sigma^2)$ ，其中  $d(x_i - x_j)$  一般取  $\|x_i - x_j\|^2$ 。 $\sigma$  为事先确定的参数。目前已经提出许多谱聚类算法。常见的谱聚类算法，一般选取矩阵的前  $K$  个最大的特征值所对应的特征向量，从而在  $[k]$  空间中构成与原数据一一对应的表述，进而在  $[k]$  空间中进行  $K$  均值聚类<sup>[4]</sup>。本文引入 WFCM 对其进行聚类。该算法表述如下：

- 1) 计算亲密矩阵  $A$ ，当  $i \neq j$  时， $A = \exp(-d(x - x)/2\sigma)$ ， $A_{ii} = 0$
- 2) 计算拉普拉斯矩阵  $L$ ， $L = D^{-1}/2AD^{-1/2}$ ，其中  $D$  是对角化矩阵， $D_{ij} = \sum_j A_{ij}$
- 3) 计算  $L$  的前  $k$  个本征值 ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ ) 和相应的本征向量  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$  (必要时做正交化处理)，构造矩阵按照本征值的大小顺序将相应的本征向量排列构成  $S = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k] \in [k]^{n \times k}$
- 4) 对矩阵  $S$  中的每一行进行单位化处理，即将行

向量转变为单位向量，得到矩阵 Y

5) 将 Y 中的每一行视为空间中的一个点，对其使用 1 中所描述的 WFCM 算法，得到 k 个聚类，如果 Y 矩阵中的第 i 行属于第 j 个聚类，则也属于第 j 个聚类。

#### 4 仿真实验

实验中的计算环境为 CPU Pentium(R)4 cpu2.4GHz, 512M 内存。实验中的核函数 RBF 核函数  $\exp(-\|x - x' \| / 2\sigma)$ ，其中  $\sigma$  为核参数，参数的确定采用交叉验证法。

##### 4.1 WFKCM 的有效性研究

为测试加权模糊核聚类算法(WFKCM)的有效性，我们对 UCI 数据库中的 Iris 数据集和 satimage 数据集进行了测试实验，给出实验结果，并将其与传统的 k 均值算法、FCM 算法和算法进行了性能比较，显示出新算法的优良性能。

表 1 标准数据集的识别率比较

数据集	类 别 数	属 性 数	总数	kmeans(%)	FCM (%)	WFKCM (%)
iris	3	4	150	88.67	89.33	90.67
satimage	6	36	4435	68.16	69.33	69.63

##### 4.2 基于谱聚类的灰度图象分割法仿真实验

为了验证算法的有效性，我们对 cameraman 这副图像进行实验，并将其与文献[4]的算法结果进行比较。实验中  $\sigma$  取值为 2。

图 1 显示了两种算法的分割结果比较，其中：图 1(a)中源图像大小为  $256 \times 256$ ，图 1(b)为文献[4]算法的分割结果，图 1(c)为本文算法分割结果。

从图 1 容易得出相同聚类数，相同取值的情况下，采用本文算法进行分割的图像信息更加丰富，更加细致，更加接近原貌。尤其体现在背景部分，两种算法分割结果差异明显。

表 2 为两种算法在所耗时间、迭代次数及 RAssoc 值结果的比较。从表中可以看出，引入加权模糊减少了迭代次数，从而所耗时间也相应地减少。此外 RAssoc 值表示子图(区域)内部相似度程度，该值越大表示子图内部相似度高，分割结果好。显然本文算法的分割结果比利用文献[4]算法的分割结果更优。由此验证了上述裸眼分析得到的结果。



(a) 原图像



(b) 文献[4]算法分割结果



(c)本文算法分割结果

图 1 本文算法与文献[4]算法图像分割结果比较  
(下转第 73 页)

表 2 算法结果比较

算法	迭代次数	所耗时间(秒)	RAssoc值
本文算法	3	1.983	14.7457
文献[4]算法	7	2.403	14.7250

本文提出了一种新的模糊核聚类算法(WFKCM),并将其引入谱聚类算法,应用于图像分割产生了较好的聚类效果。针对谱聚类权矩阵的谱难以计算的实际问题,提出图像灰度特征作为谱聚类算法的分类样本,使得数值特征样本数不会随着图像大小的扩大而增加。

### 参考文献

1 伍忠东,高新波,谢维信.基于核方法的分类型属性数据集模糊聚类算法.华南理工大学学报,2004,32(9):

23-28.

- 2 伍忠东,高新波,谢维信.模式识别.基于核方法的模糊聚类算法.西安电子科技大学学报,2004,31(4):533-537.
- 3 薛耿剑,王毅,赵海涛,魏梦琦,郝重阳.一种改进的模糊核聚类算法.中国医学影像技术,2005,21(10):1609-1611.
- 4 Ng AY, Jordan MI, Weiss Y. On spectral clustering: Analysis and an algorithm. Proceedings of Advances in Neural Information Processing Systems. Cambridge, MA:MIT Press, 2002:121-526.
- 5 Shi J, Malik J. Normalized cuts and image segmentation. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000,22(8):888-905.