# 利用 Voronoi 图改进离散数据重构曲面算法①

## An Improved Surface Reconstruction Algorithm from Scattered Points-Based Voronoi Diagrams

求　伟　(武警杭州指挥学院 浙江 杭州 310023)
郭伟青　(浙江工业大学之江学院 浙江 杭州 310024)
李伟良　(武警杭州指挥学院 浙江 杭州 310023)

**摘　要：** 本文利用 Delaunay 三角剖分和 Voronoi 图的性质，实现了一种对散乱点重构闭合曲面的方法。该方法在搜索策略上进行了改进：首先对输入点进行三角剖分,产生相互独立的四面体,构建一个凸包；然后利用 Delaunay 三角剖分产生 Voronoi 图；最后根据 Voronoi 图的性质，选择包含在形体内部的四面体，提取出边界三角形，完成散乱点边界重构。计算复杂度和 Delaunay 四面体数量成正比，在自动形状重构时形状边界提取过程的计算复杂度为 O(n)，算法适用于各种涉及图形重构的工程应用。

**关键词：** 离散点　重构曲面　Delaunay 三角剖分　Voronoi 图　边界搜索

## 1　引言

逆向工程许多应用中都有散乱点重构曲面的问题，重构三维闭合形状算法可以分成两类：逼近和插值。Hoppe 提出了一种利用曲面法矢和最小二乘法的逼近算法[1]，该方法需要决定邻接点的数量参数 k。Curless 和 Levoy 利用加权平均值方法取代最小二乘法[2]，处理大数据量输入点，只考虑形状的边界元素，信息丢失不可避免，同时有些信息没有利用起来。Edelsbrunner 介绍了一种基于曲面插值的“α-shape”方法[3]，主要缺点是需要定义外接球半径参数α。Amenta 提出的 crust 算法[4]，对输入点进行 Delaunay 三角剖分产生 Voronoi 图，边界元素可以简单地通过选择四面体 Delaunay 三角剖分来提取，不需要距离参数，但是不能解决尖锐边问题。Boissonnat 提出了一种雕刻算法，他的方法对输入点构造一个凸包，通过雕刻凸包，从外部开始处理直到所有输入点都位于形状的边界上，通过这种方法产生分段线性模型，但是这个方法需要花费大量的计算时间。其它还有一些相关的曲面重构方法[5-7]。本文在搜索策略上进行了改进：首先给出一些定义和性质；利用 Delaunay 三角剖分和 Voronoi 图重构闭合曲面；按不同情况从输入点中提取边界；最后给出执行结果。

## 2　基于 Voronoi 图雕刻算法

### 2.1 Delaunay 三角剖分和 Voronoi 图定义及性质

给定一组二维点 P,当且仅当以 pi 和 pj 为直径的圆内不存在其它点，则连接点 pi 和 pj，这些边叫作 Delaunay 边[8]。所有这样 Delaunay 边的集合形成了 Delaunay 图，在图中只显示三角形。如果有四点共圆，一般选择某条边进行处理，把它们移去，产生一个三角剖分。每个 Delaunay 三角形有一个外接圆，内部不包含任何点，如图 1 所示，三角形 abc 外接圆内没有其它点是 Delaunay 三角形，三角形 def 外接圆内有其它点，不是 Delaunay 三角形，需要进一步处理。Delaunay 三角剖分是形成输入点的内部凸包的一组较好的三角形，在二维中，相当于一些互相独立的三角形联合，加入一个新输入点后，采用圆准则，

① 基金项目:浙江省教育厅科研项目(20070313)
收稿时间:2008-07-10

能增加凸包构造，图 2 是一个二维空间中 Delaunay 三角剖分的例子。

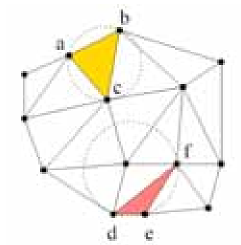


图 1 ⊿abc 是 Delaunay 三角形，⊿def 不是 Delaunay 三角形

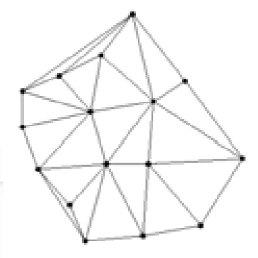

图 2 二维 Delaunay 三角剖分

Delaunay 三角剖分一样可以进行推广到三维 Delaunay 四面体。如果存在一个球体经过一组满足条件的点，里面不包含其它点，那么一个四面体，三角形或边是 Delaunay 的。没有五个点在共一个球面，如果存在一个 Delaunay 四面体剖分球面上有五个或更多点的情况，可以根据需要移去一些四面体，面或边。

pi 点的 Voronoi 区域定义为到 pi 的距离比到任何其它点都近的点的集合，形式上表示为。所有取样点的 Voronoi 单元相交就构成了 Voronoi 图。单元的边叫作 Voronoi 边，边的端点叫作 Voronoi 点。Voronoi 边上的一个点与两个输入点有关，每个 Voronoi 边上的点到这两个输入点是等距的。一个 Voronoi 端点是 Voronoi 边的交点，与三个或更多个输入点有关，每个 Voronoi 点到相关的三个输入点是等距的。二维的 Voronoi 区域相应地可推广到三维立体的 Voronoi 区域。给定一组三维点，点 pi 的 Voronoi 区域定义为所有到 pi 点的距离比到任何其它点都近的点的集合。所有输入点的 Voronoi 单元相交就构成了 Voronoi 图。三维的 Voronoi 图的一些几何元素如 Voronoi 平面，Voronoi 边和 Voronoi 端点。一个 Voronoi 平面是一个三维几何元素，是个边界平面限制它相关的 Voronoi 单元。Voronoi 平面上的一个点与两个输入点有关，每个 Voronoi 平面上的点到这两个输入点是等距的。三维的一条 Voronoi 边是两个 Voronoi 平面相交的线段。Voronoi 边上的点与三个输入点有关，每个 Voronoi 边上的点到这三个点是等距的。一个 Voronoi 点是三维的，是 Voronoi 边交点，它与四个或更多个输入点有关，每个端点到这些输入点都是等距的。图 3 是二维 Voronoi 图和三维单个 Voronoi 单元的 Voronoi 图。

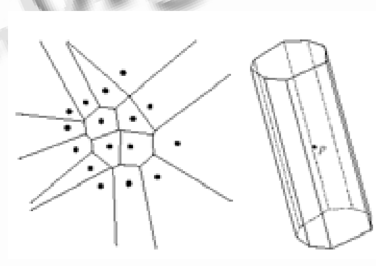

图 3 二维 Voronoi 图和三维 voronoi 单元

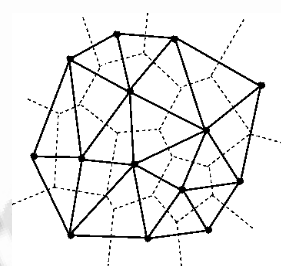

图 4 二维 Delaunay 三角剖分与 Voronoi 图的关系

一个 Delaunay 三角剖分与 Voronoi 图的关系如图 4 所示，一个 Delaunay 线段被 Voronoi 线段垂直平分。Voronoi 边的两个端点限定了两个共边的关联 Delaunay 三角形⊿ADT 外接圆的中心。这里再引入一个关联 Delaunay 边 LADE。

从 Delaunay 三角剖分中得到 Voronoi 点，两个 Voronoi 点决定 Voronoi 边，产生 Voronoi 图。相应的概念可以扩展到三维。反过来也可利用 Voronoi 图形成 Delaunay 三角剖分。二维空间画一条线，将具有公共域边界的 Voronoi 单元里的点相连接，如果 p 和 q 是取样点，，在 p 和 q 间有一条 Delaunay 边。三维的 Delaunay 四面体可以通过连接有公共 Voronoi 边界区域中的点形成。

### 2.2 雕刻形状

利用 Delaunay 三角剖分和 Voronoi 图的性质提取二维封闭形状的边界，然后扩展到三维。第一步对输入点使用 Delaunay 三角剖分方法构建一个凸包；第二步利用与 Delaunay 三角剖分的关系产生 Voronoi 图；第三步由外至内在凸包凹入的区域移去三角形。算法与 Boissonnat 方法类似，但本算法边界提取过程中，对每条 Delaunay 边只进行一次搜索，形状边界元素搜索策略是一个非递增的单向过程。流程表述如下：

把所有 LUVE 边入栈；
当栈非空时循环处理
{
取一条 LUVE 边出栈；
如果 LUVE 与它的 LADE 相交：
保存该 LADE 到内部成员栈，
否则
把与该 LUVE 相关联的另一条 LVE 边推入栈
}

在处理过程中，如图 5 所示，首先从 Voronoi 边中选择有极大值端点的 Voronoi 边 LUVE，然后对 LUVE 中每条边作标记，检测是否与相关联的 LADE 边相交。如果相交，可以确定这条 LADE 是一个边界元素，这个⊿ADT 在形状边界内部，保存边界信息；否则，这条 LADE 和三角形⊿ADT 在形状边界外部，如图 6 所示，LUVE 与 LADE 边不相交，那么取与该 LUVE 相关联的另一条 LVE 边，检测 LVE 是否与相关联的另一条 LADE 边相交，重复处理检查每条与 LUVE 共 Voronoi 点的 Voronoi 边，直到如图 6 右所示出现交叉。也就是说，通过确定每个三角形是否位于形状边界内部或外部，一次完成提取边界和与之关联的三角形。

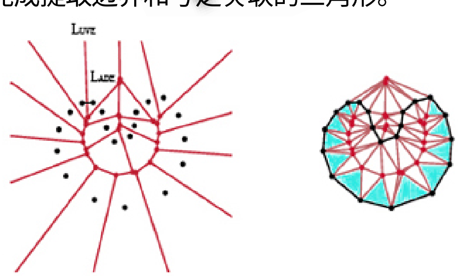

图 5　有交叉时边界提取

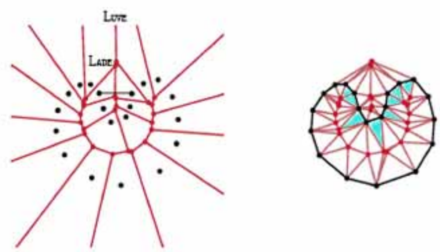

图 6　无交叉时边界提取

二维处理可以直接扩展到三维。如图 7 右所示，在三维处理 Delaunay 三角剖分中，检查四面体的 Voronoi 边和三角形的相交， 确定物体边界三角形。包括以下三个步骤：对三维输入点 Delaunay 三角剖分，构造一个由相互独立的四面体组成的凸包；利用 Delaunay 三角剖分和 Voronoi 图的关系，产生输入点的 Voronoi 图 ;使用 Voronoi 图选择包含在形状中的四面体，来提取形状上的边界三角形。三维操作的边界检测与二维操作类似。

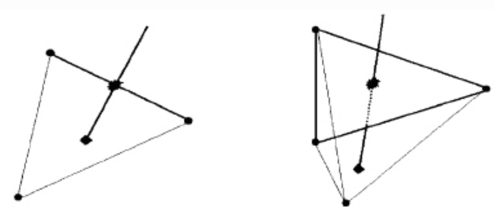

图 7　二维扩展到三维

## 3　执行结果

算法用 VC++在个人机上进行了实现，图 8 显示了用本算法进行三维形状重构的结果。输入点数量、四面体数量以及处理时间见表 1:

表 1　执行结果

| 物体实例 | 输入点数量 | 四面体数量 | 处理时间（秒） |
|---|---|---|---|
| 头部 | 2179 | 13867 | 385 |

## 4　结论

本文利用 Delaunay 三角剖分和 Voronoi 图的性质，实现了一种散乱数据点重构三维闭合图形的算法。与其它算法相比，不再需要为确定某些参数耗时。另

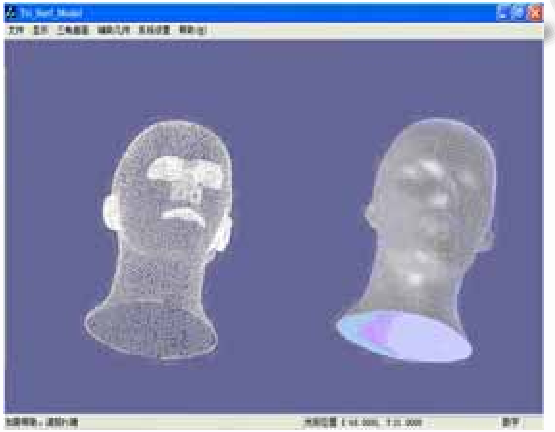

图 8 示例图

外，计算复杂度和 Delaunay 四面体数量成正比，在自动形状重构时形状边界提取过程的计算复杂度为 O(n)，比 Amentaet 方法的复杂度 O(n4/3)更有效，该算法适用于各种涉及图形重构的工程应用。

## 参考文献


1 Hoppe H, DeRose T, Duchamp T, McDonald J, Stuetzle W. Surface reconstruction from unorganized points. SIGGRAPH 92 Proceedings. 1992:71–78.

2 Curless B, Levoy M. A volumetric method for building complex models from range images. SIGGRAPH 96 Proceedings. 1996:303–312.

3 Edelsbrunner H, Mucker E. Three-dimensional alpha shapes. ACM Transactions on Graphics. 1994,13(1): 43–72.

4 Amenta N,Bern M,Kamvysselis M. A new Voronoi-based surface reconstruction algorithm, SIGGRAPH 98 Proceedings. 1998:415–422.

5 张永春,达飞鹏,宋文忠.三维散乱点集的曲面三角剖分.中国图象图形学报,2003,8(12).

6 ShiY, KarlWC. Shape reconstruction from unorganized points with a data-driven level set method. 2004.

7 Frey W H. Modeling buckled developable surfaces by triangulation. Computer-Aided Design. 2004,36: 299–313.

8 朱心雄.自由曲线曲面造型技术.北京:科学技术出版社.2000.