

# IFS 分形图拟仿射变换模型及其实现<sup>①</sup>

## Pseudo-affine Transform Model of IFS Fractal Images and Its Realization

潘陆益 (浙江商业职业技术学院 杭州 310053)

**摘要:** 迭代函数系统(IFS)是分形绘图的重要方法,分形图形通常不能用常规的仿射变换规则实现图形的平移、缩放、旋转和错切等变换。在分析 IFS 迭代模型后,提出了基于 IFS 的分形图的拟仿射变换模型,并通过 MATLAB 编程,显示了有关变换的结果。

**关键词:** 迭代函数系统 分形图 拟仿射变换 变换模型

### 1 引言

迭代函数系统 (Iteration Function System, 简称 IFS) 是分形理论的一个重要分支,用 IFS 可以形成各种千姿百态和意想不到的图形。迭代函数系统 (IFS) 最早是由 Hutchinson (1981 年) 提出来的,1985 年由美国佐治亚理工学院 M. F. Barnsley 等人发展了这一分形构形系统,并命名为迭代函数系统<sup>[1]</sup>。IFS 将待生成的图像看成是许多与整体相似或经过一定的变换与整体相似的局部小块(子图)拼贴而成,每个子图都是整体图形的一个仿射变换。因此,IFS 是以仿射变换为框架,根据几何对象的整体与局部具有自相似结构,经过迭代而形成的。但迭代形成的整体分形图形却不能简单地用一般几何图形仿射变换的规则实现图形的平移、缩放、旋转和错切等变换。这里,我们将分形图整体平移、缩放、旋转等几何变换称为拟仿射变换<sup>[2]</sup>。本文首先介绍迭代函数系统,然后提出了基于 IFS 的分形图的拟仿射变换模型,并通过 MATLAB 编程,实现分形图形的平移、缩放、旋转、错切等变换。

### 2 基于仿射变换的 IFS 迭代模型

仿射变换就是一种实现几何变换的公式,它可以按比例放大或缩小图形,使图形旋转或位移,有时甚至使图形产生畸变。定义二维欧氏空间的仿射变换为  $\omega: R^2 \rightarrow R^2$ ,  $(X, Y)$  为此二维空间中变换前图形一点的坐标,则其仿射变换映像为  $(X', Y')$ , 写成矩阵形

式为<sup>[3]</sup>:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

其中,称  $\omega$  为二维仿射变换,这是一种最广泛的线性变换。 $a, b, c, d, e$  和  $f$  等 6 个参数称为仿射变换系数,它们可以确定一个仿射变换。

事实上,任何图形都可以通过一系列仿射变换重新绘制出来,关键在于选择什么样的仿射变换。对于一个复杂的图形,可能需要多个不同的仿射变换来实现。IFS 的每个子图都是整体图形的一个仿射变换,因此,一个迭代函数系统实际上是一组仿射变换的集合,记为  $\{\omega_i, i=1, 2, \dots, n\}$ ,  $n$  为整体所分的子图个数,其中的每一个仿射变换都是这样的一个收缩映射<sup>[3,4]</sup>:

设  $(X, d)$  是一个距离空间,对于映射  $\omega: X \rightarrow X$ , 若存在一个系数  $s (0 \leq s < 1)$ , 使得对所有  $x, y \in X$  有下式成立:  $d(\omega(x), \omega(y)) \leq sd(x, y)$  则称  $\omega$  为收缩映射。 $s$  称为  $\omega$  的收缩因子。

一个迭代函数系统是完备度量空间  $(X, d)$  上的一组有限的收缩映射  $\omega_i: X \rightarrow X, i=1, 2, \dots, n$ ; 每个收缩映射  $\omega_i$  的收缩因子是  $S_i$ 。一般地用收缩仿射变换来表示这些变换,则 IFS 可表示为:

$$\begin{aligned} \omega_i \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r_i \cos \theta_i & -q_i \sin \varphi_i \\ r_i \sin \theta_i & -q_i \cos \varphi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

① 本文系学校重点科研项目 (SZYZD200703)

上式中  $r_i$ 、 $q_i$  是子图相对于原图象在  $x$  轴和  $y$  轴方向的缩放比例, 旋转系数  $\theta_i$ 、 $\varphi_i$  是子图相对于原图象分别绕  $x$  轴和  $y$  轴的旋转角度, 位移系数  $e_i$ 、 $f_i$  是子图分别沿  $x$  轴和  $y$  轴方向的平移距离。在一个仿射变换中, 6 个参数决定了分形图的形态结构特征。

仿射变换集  $\{\omega_n\}$  中, 每一个仿射变换被调用的概率不一定是等同的, 也就是说, 落入图形各部分中的点的数目不一定相同。每一个压缩映射  $\omega_i$  对应有一个概率  $P_i$ , 且  $0 < P_i < 1$ ,  $\sum_{i=1}^n P_i = 1$ , 这样, 收缩映射集  $\{\omega_n\}$  和对应的伴随概率  $\{P_n\}$  组成了 IFS 算法最关键的部分, 即 IFS 码, 记为:  $\{\omega_i, p_i, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ 。IFS 码中的仿射变换  $\{\omega_i\}$  决定了图形的结构和形状, 相应概率  $\{P_i\}$  控制各个仿射变换  $\omega_i$  在迭代过程中被选中的几率, 其效果是图形上点的分布密度。

收缩仿射变换在数学意义上具有收敛性质, 其变换结果最终将趋于稳定。对于任给的  $X_0 \in X$  进行迭代, 得  $X_1 = \omega_n(X_0)$ ,  $X_2 = \omega_n(X_1) = \omega_n(\omega_n(X_0))$  等, 根据收缩映射定理, 当迭代次数足够大时, 迭代所得的结果  $X_k$  ( $k$  为迭代次数) 的集合是不变的, 即  $\{X_k\}$  是稳定的, 分形图的形状与初始迭代点  $X_0$  的选取无关, 仅与映射  $\{\omega_i\}$  的迭代方程的系数有关, 通常取  $X_0$  为任意一个随机值。从 IFS 的迭代过程及最终形成的分形图来看, 由  $\{\omega_i\}$  构成的迭代系统其迭代过程相当于一个闭环反馈自激系统, 初始迭代点  $X_0$  仅仅是一个启动激励信号, 经过少数几次反馈后产生的一系列输出都将落在由  $\{\omega_i\}$  所控制的区域中。

为了描述这一闭环系统的迭代过程, 我们定义:

变换矩阵:  $A_i = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix}$  位移矩阵:  $E_i = \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}$  输出矩阵:  $T = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

则 IFS 的迭代模型如图 1 所示:

用数学表达式表示迭代过程为:

$$T_k = A_i * T_{k-1} + E_i \quad (k=1, 2, \dots, m \text{ 为迭代次数})$$

我们把上式称为 IFS 的迭代方程。以下我们将以此为基础讨论分形图形平移、缩放、旋转等变换规则。

### 3 分形图拟仿射变换模型

分形图的拟仿射变换包括分形图平移、缩放、旋

转、错切等几何变换, 由于分形图的特殊性, 这些几何变换不能简单地使用常规仿射变换的方法实现。实际上分形图是一组收缩仿射变换所确定的不动点集, 对这些不动点集的拟仿射变换过程就是使这些

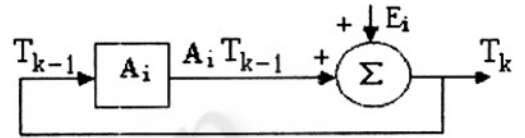


图 1 IFS 迭代模型

不动点集从一个状态变换到另一个状态的过程, 变换后分形图的结构、形状和点的分布密度仍然受 IFS 码的控制, 在新的状态下, 不动点集的迭代过程仍然是一个闭环反馈自激系统。因此, 拟仿射变换模型就是在 IFS 迭代模型之后增加一个实现状态变换的变换环节, 同时, 为确保变换之后分形图的结构、形状和点的分布密度保持不变, 使不动点集仍收敛在由  $\{\omega_i, p_i\}$  所控制的区域中, 在反馈中增加反变换环节。如图 2 所示。

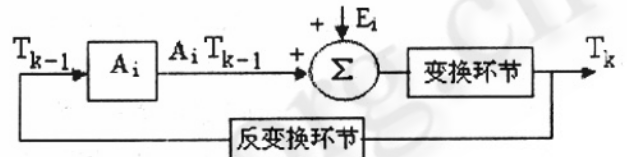


图 2 拟仿射变换迭代模型

对具体的变换类型, 变换环节和反馈环节是不同的。平移变换只改变分形图输出的位置, 即不动点集的坐标平移一个增量, 其大小和方向没有改变, 因此, 其变换环节是一个增量环节, 设增量矩阵为  $D$ , 平移变换模型如图 3 所示。

根据图 3 我们可以写出平移变换的迭代方程为:

$$T_k = A_i (T_{k-1} - D) + E_i + D = A_i * T_{k-1} - A_i * D + E_i + D \quad (k=1, 2, \dots, m \text{ 为迭代次数})$$

对于缩放、旋转、错切等变换, 可能改变分形图的大小, 也可能改变其方向, 甚至可能是畸变, 从本质上讲都是比例变换, 因此, 其变换环节是一个比例环节, 设比例矩阵为  $R$ , 如图 4 所示。

根据图 4 我们可以写出缩放、旋转、错切等变换的迭代方程为:

$$T_k = R(A_i * R^{-1} * T_{k-1} + E_i) = R * A_i * R^{-1} * T_{k-1} + R * E_i \quad (k=1,2,\dots,m \text{ 为迭代次数})$$

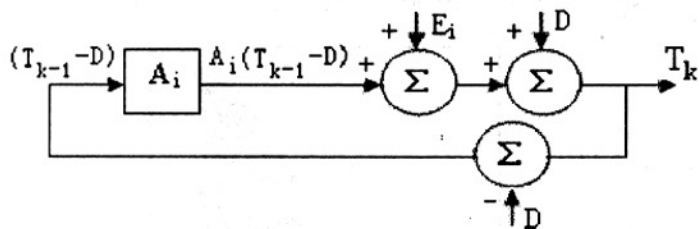


图 3 平移变换模型

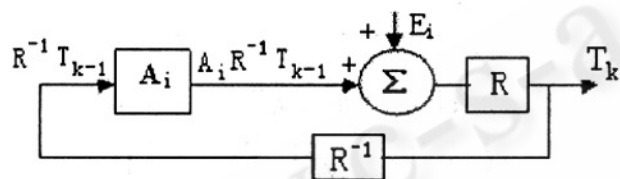


图 4 缩放、旋转、错切变换模型

## 4 分形图拟仿射变换实例

### (1) 分形图形的平移变换

分形图形的平移就是将迭代系统的原先输出增加一个平移分量, 设平移矩阵为  $D = \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \end{bmatrix}$ , 平移变换的迭代方程为:  $T_k = A_i(T_{k-1} - D) + E_i + D = A_i * T_{k-1} - A_i * D + E_i + D$

用矩阵形式表示为:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \end{bmatrix}$$

由此可见, 分形图的平移变换不能简单的套用一般几何图形仿射变换的规则。一个典型的羊齿叶分形图的 IFS 码<sup>[1]</sup>如表 1 所示:

假定把上表 IFS 码所绘的分形图在 x, y 轴方向上各移动 10 个单位, 即令  $D_x = 10, D_y = 10$ 。根据平移迭代方程, 利用 MATLAB 编程<sup>[5]</sup>, 并把分形图平移前后两图绘于同一坐标平面上, 其效果如图 5 所示。

### (2) 分形图形的缩放变换

表 1 羊齿叶分形图的 IFS 码

i	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$	$e_i$	$f_i$	$p_i$
1	0	0	0	0.16	0	0	0.01
2	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.85
3	0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
4	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07



图 5 平移变换前后

分形图形的缩放是将图形在 x, y 方向同时进行缩小或放大, 设  $K_x, K_y$  分别是 X 轴 Y 轴方向的缩放系数, 则缩放比例矩阵为:  $R = \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix}$ , 缩放变换的迭代方程为:

$$T_k = R(A_i * R^{-1} * T_{k-1} + E_i) = R * A_i * R^{-1} * T_{k-1} + R * E_i$$

用矩阵形式表示为:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/K_x & 0 \\ 0 & 1/K_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & b_i K_x / K_y \\ c_i K_y / K_x & d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_x \cdot e_i \\ K_y \cdot f_i \end{bmatrix}$$

如果 x 轴和 y 轴的比例系数相同, 设均为 k, 即  $k = k_x = k_y$ , 则上式可简化为:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K \cdot e_i \\ K \cdot f_i \end{bmatrix}$$

从上式可以看出, 如果 x 轴和 y 轴的比例系数相同, 则当每一个仿射变换  $\omega_i$  中所有的  $e_i, f_i$  参数缩放同一比例 K 时, 所构成的分形图形也随之发生相同的比例缩放变换。图 6 为 x 轴和 y 轴的比例系数同为 2/5 时的效果图。

特别地, 当  $k_x = 1, k_y = -1$  时, 图形作垂直镜像变换, 而当  $k_x = -1, k_y = 1$  时, 图形作水平镜像变换。对

羊齿叶分形图作水平镜像变换的结果如图 7 所示。



图 6 缩放 2/5 后分形图



图 7 水平镜像变换

(3) 分形图形的旋转变换

设分形图旋转矩阵为： $R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ，旋转变

换的迭代方程为：

$$T_k = R(A_i * R^{-1} * T_{k-1} + E_i) = R * A_i * R^{-1} * T_{k-1} + R * E_i$$

用矩阵形式表示为：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}$$

对上述典型的羊齿叶分形图，将其旋转 135 度，旋转前后的分形图对比如图 8 所示。

(4) 分形图形的错切变换

所谓错切变换，就是图形沿着某一坐标轴的方向产生不等量的移动，使图形发生错切变形。错切后的

图形与 X 或 Y 轴之间形成一错切角。设错切变换矩阵为： $R = \begin{bmatrix} K_x & b \\ c & K_y \end{bmatrix}$ ， $K_x$ 、 $K_y$  分别是 X 轴 Y 轴方向的缩放系数。当  $c=0$  时，图形沿 x 轴作错切变形 ( $b>0$ ，图形沿



图 8 分形图旋转

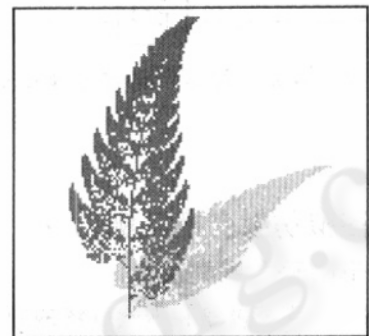


图 9 分形图错切变换

x 轴正向,  $b<0$ ，图形沿 x 轴负向)，当  $b=0$  时，图形沿 y 轴作错切变形 ( $c>0$ ，图形沿 y 轴正向,  $c<0$ ，图形沿 y 轴负向)，当  $b\neq 0$  且  $c\neq 0$  时，图形沿 x、y 两个方向作错切变形，是一种复合变换，此时图形可能会发生畸变。

错切变换的迭代方程也是： $T_k = R(A_i * R^{-1} * T_{k-1} + E_i) = R * A_i * R^{-1} * T_{k-1} + R * E_i$

当错切变换矩阵为： $R = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$  时，羊齿叶分形图错切变换的效果如图 9 所示。

5 小结

从上面的实例和分析不难看出，对于迭代函数系 (下转第 90 页)

(上接第 86 页)

统的分形图,通过上述拟仿射变换模型,可以完好地实现分形图的缩放、平移、旋转、错切等变换,综合运用这些变换就可以生成意想不到的特殊效果的图案。这种图案生成技术在装饰图案设计,如家居布艺设计、装饰壁画设计等领域有着广阔的前景。

### 参考文献

- 1 孙博文,分形算法与程序设计[M],北京:科学出版社,2004.
- 2 林贻侠、仲明瑜等,分形图的拟仿射变换及其实现[J],上海大学学报(自然科学版)1999,5(3).
- 3 陈传波、郑运平,一种确定 IFSP 中迭代次数下限的算法[J],华中科技大学学报(自然科学版),2006,34(10).
- 4 齐东旭,分形及其计算机生成[M],北京:科学出版社,1994.
- 5 求是科技, MATLAB7.0 从入门到精通[M],北京:人民邮电出版社,2006.