

智能算法在数学建模比赛中的应用^①

贾花萍

(渭南师范学院 网络安全与信息化学院, 渭南 714099)

摘要: 数学建模竞赛作为一项成功的数学教学改革实践, 有效的促进了学生数学实践能力的提高以及对数学思想的探索, 近年来, 随着计算机技术及人工智能技术的飞速发展, 人工智能算法在数学建模中得到了广泛的应用, 智能算法的提出为数学建模的发展起到了至关重要的推动作用。

关键词: 人工智能; 数学; 建模

Application of Intelligent Algorithm in Mathematical Modeling Contest

JIA Hua-Ping

(College of Network Security and Information Technology, Weinan Normal University, Weinan 714099, China)

Abstract: As a successful mathematical teaching reform practice, mathematical modeling contest has promoted the improvement of students' practical ability and the exploration of mathematics. In recent years, with the rapid development of computer technology and artificial intelligence technology, artificial intelligence algorithms have been widely used in mathematical modeling. The proposed intelligent algorithm plays an important role in promoting the development of mathematical modeling.

Key words: artificial intelligence; mathematics; modeling

20 世纪六七十年代, 数学建模竞赛进入西方国家大学, 1985 年在美国出现, 八十年代初, 我国将数学建模引入大学课堂. 全国大学生数学建模竞赛(CMCM) 开始于 1994 年, 由教育部高教司和中国工业与应用数学学会共同主办, 每年一届. 十几年来这项竞赛的规模以平均年增长 25% 以上的速度发展. 历经二十多年的发展, 我国绝大部分高校都开设了各种形式的数学建模课程, 培养学生利用数学方法分析、解决实际问题的能力.

数学模型主要是对实际问题利用数学符号, 式子, 程序, 图形等进行刻画, 为解决现实问题提供新的方法与思路. 这种应用知识从实际课题中抽象、提炼出数学模型的过程就称为数学建模 (Mathematical Modeling)^[1]. 数学建模是一门应用数学, 把数学理论回归现实, 它能提高你的逻辑思维和开放性思维能力.

数学建模^[2]在各个领域发挥的作用越来越大. 数学建模涉及到各学科、各领域. 近年来, 随着计算机技术及人工智能技术的飞速发展, 计算机方法在数学建模中得到了广泛的应用, 智能算法的提出为数学建模的发展起到了至关重要的推动作用. 在数学建模中应用较多的智能算法如: 神经网络方法, 模拟退火算法, 遗传算法, 灰色系统等. 这些方法有共同的特点: 自学习、自组织、自适应、简单、通用、鲁棒性强、适应并行处理. 在并行搜索、联想记忆、模式识别、知识自动获取等方面有广泛的应用.

1 神经网络方法在数学建模中的应用

神经网络(Artificial Neural Networks, ANN)是对人脑或自然神经网络若干基本特性的抽象和模拟. 神经网络以对大脑的生理研究成果为基础的, 其

① 基金项目: 陕西省自然科学基金基础研究计划项目(2014JM1026);渭南师范学院重点教改项目(JG201511);渭南师范学院校级特色学科建设项目(14TSXK02)

收稿时间:2015-12-08;收到修改稿时间:2016-01-11 [doi:10.15888/j.cnki.csa.005272]

目的在于模拟大脑的某些机理与机制, 实现某个方面的功能. 最典型的 BP 算法在数学建模中主要应用于: 函数逼近, 模式识别, 分类, 数据压缩问题.

1.1 分类和聚类

人工神经网络方法在数学建模中应用的比较多的 是其分类和聚类功能. 数学建模中常用到的神经网络 有两种: BP 神经网络和自组织神经网络, 其中 BP 神经网络是基于误差反传算法的前馈神经网络, 主要用来 实现非线性映射; 自组织神经网络, 主要用来聚类和 模式识别. 典型的题目有: DNA 序列分类题(2000 年 A 题), 癌症判断题(2001 年), 乳房癌的诊断题(2001 年 C 题)

聚类: 聚类是指根据“物以类聚”原理, 将本身没有类别的样本聚集成不同的组. 每个样本对应的类别 事先是不知道的. 如给定样本集 k , 再给定分类的要求; 希望网络能将集中的样本按要求自动分成若干个 类. 具有这种能力的网络就称为具有聚类能力.

分类与聚类略有不同, 分类是按照某种标准给对 象事先定义好类别, 再根据类别来进行归类. 每个样 本对应的类别事先是知道的. 如有一样本集 k , 它分成 m 个互不相交的类: R_1, R_2, \dots, R_m . 若当约定当 x^i 属 于 R_i 时令其输出 y 的第 i 个分量为 1, 其余分量为 0, 用式子表示为

$$y_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in R_i \\ 0 & other \end{cases}$$

若给定的网络能完成上述功能, 则称对应的网络 有分类功能力.

1.2 优化计算

优化计算就是不断进行迭代寻优的过程. 一般情 况下, 神经网络的权值和阈值中存放着优化条件, 当 系统状态稳定的时候, 神经网络的输出就是最优化解. 典型应用如 BP 算法就是用优化中的梯度下降法将样 本的输入输出问题转化为非线性优化问题. 如文献[3] 中 Hopfield 神经网络的非线性梯度下降优化算法即是 优化计算方法的展现.

1.3 预测

用神经网络进行预测, 首先要收集训练样本, 根 据具体对象选择合适的神经网络进行预测, 主要包括 模型类型(连接方式、学习算法等)、网络规模(神经网络 层数、隐含节点个数、输入输出个数等). 训练神经

网络, 根据历史数据调整神经网络的连接权值和阈值, 使得神经网络模仿历史数据中的因果关系. 训练好的 神经网络才有预测能力. 神经网络用于数学建模中的 预测问题, 如图 1 所示. 典型的数学建模题目有: 长江 水质的评价和预测(2005 年 A 题), 中国人口增长预测 (2007 年 A 题), 地震预测题(2011 年), 新生报到人数预 测(2015 年北京理工大学数学建模竞赛校内试题).

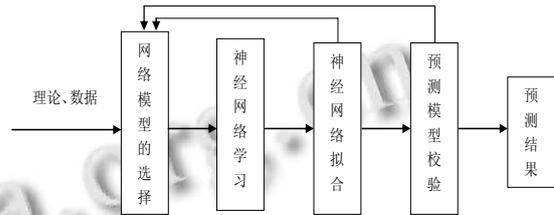


图 1 神经网络用于数学建模中的预测问题

1.4 神经网络算法的应用举例

1.4.1 神经网络算法在数学建模中用于预测举例雨量 预报方法的评价(2005 数学建模竞赛题目 C 题)

BP 网络可看作是一个从输入到输出的非线性映 射, 对网络权值 (w_{ij}, T_{li}) 的修正与阈值 θ 的修正, 使 误差函数 e 沿负梯度方向下降, BP 网络三层节点表示 为: 输入节点 x_j ; 隐节点 y_i ; 输出节点 O_l , BP 模型的 计算公式:

隐节点的计算输出: $y_i = \sum_j w_{ij} x_j - \theta_i$

输出节点的计算输出: $O_l = f(\sum_i T_{li} y_i - \theta_l)$ 其中 $f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$.

输出节点的误差为: $e = \frac{1}{2} \sum_l (t_l - O_l)^2 = \frac{1}{2} \sum_l \left(t_l - f(\sum_i T_{li} y_i - \theta_l) \right)^2$

其中 t_l 为期望输出, O_l 为实际输出. BP 网络已经比较 成熟, 利用 Matlab 中工具箱, 输入误差限、特征点的 坐标及其函数值, 调用相关函数, 就可以对网络进行 训练. 取紧集为 $\Omega = [118, 123] \times [29, 34]$, 在其内对 每一个时段的预测值分别进行训练, 然后对观测站每 个时间段的降雨量进行预测, 得到如图 2 所示的预测 值函数图像:

1.4.2 神经网络算法在数学建模中用于分类举例 DNA 序列分类题(2000 年 A 题)

选用三层 BP 神经网络, 输入层节点为每个序列 中单字符出现的频率, 所以, 输入层节点为 4. 输出层

节点数目为 1, 序列分类结果为 0 则为 A 类, 序列分类结果为 1 则为 B 类. 隐含层节点数目根据经验公式得出. 各层激发函数为双曲线正切函数. 先对 20 个已分好类别的序列样本进行训练, 训练中的误差曲线如图 3 所示, 经过 54 次训练, 误差达到要求用训练好的权值和阈值对 20 个未标明类别序列进行分类, 误差 10^{-5} , 可得到分类结果, 分类结果如下表所示, 同理对 182 个 DNA 序列进行分类.

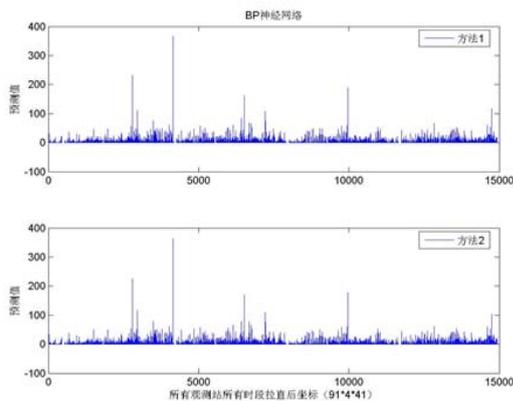


图 2 BP 算法对所有观测站全部时段预测值

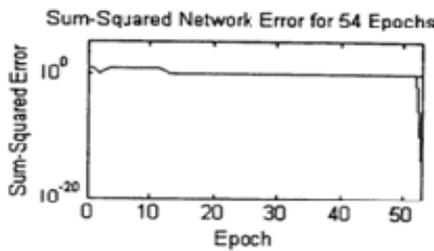


图 3 训练误差曲线图

表 1 分类结果

A	22, 23, 25, 27, 29, 30, 32, 34, 35, 36, 37, 39
B	21, 24, 26, 28, 31, 33, 38, 40

2 遗传算法在数学建模中的应用

遗传算法(Genetic Algorithm, GA)是建立在自然选择和自然遗传学机理上的迭代自适应性搜索算法^[4], 由美国 Michigan 大学的 J.Holland 教授于 1975 年首先提出, 在其博士论文中首次提出“遗传算法”一词. 03 年 B 题的最好算法是遗传算法.

2.1 多目标优化问题

2.1.1 基于排序的多目标遗传算法

Pareto 最优性理论: 多目标优化问题的解通常是

多个满意解的集合, 称为 Pareto 最优集, 解集中的决策向量称为非劣的.

依据“Pareto 最优个体”的概念对所有个体进行排序, 依据这个排列次序来进行进化过程中的选择运算, 从而使排在前面的 Pareto 最优个体将有更多的机会遗传到下一代群体. 其优点是: 能够并行地处理一组可能的解; 不局限于 Pareto 前沿的形状和连续性, 易于处理不连续的、凹形的 Pareto 前沿. 目前基于 Pareto 的遗传算法占据主要地位.

2.1.2 向量评价遗传算法(非 Pareto 法)

向量评价遗传算法(VEGA)是 Schaffer 提出的处理多目标优化问题的一种非 Pareto 类遗传算法^[5,6]. 在 VEGA 算法的每一代中, 子种群的产生根据每一个目标函数分别进行选择.

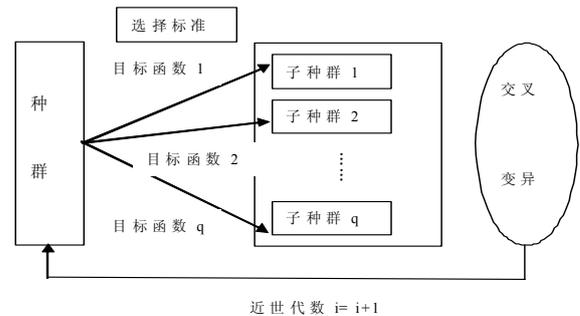


图 4 向量评价遗传算法中子种群的产生

多目标优化问题典型的数学建模题目有: 一类投资组合问题(98 年 A 题), 公交车调度问题(01 年 B 题), 公交车问题(01 年 B 题).

2.2 组合优化问题

在给有限集的所有具备某些条件的子集中, 按某种目标找出一个最优子集的一类数学规划. 又称组合规划. 组合最优化发展的初期, 研究一些比较实用的问题, 如广播网的设计、开关电路设计、航船运输路线的计划、工作指派、货物装箱方案等. 自从拟阵概念进入图论领域之后, 对拟阵中的一些理论问题的研究成为组合规划研究的新课题, 并得到应用. 典型的数学建模题目有: 足球队排名(93 年 B 题), 灾情巡视的最佳路线(98 年 B 题), 钢管订购和运输(00 年 B 题), 露天矿生产的车辆安排(03 年 B 题), DVD 在线租赁(05 年 B 题), 出版社书号问题(06 年 A 题)等.

2.3 模式识别

模式识别(Pattern Recognition), 就是通过计算机

用数学技术方法来研究模式的自动处理和判读. 指对表征事物或现象的各种形式的信息进行处理和分析, 以对事物或现象进行描述、辨认、分类和解释的过程, 是信息科学和人工智能的重要组成部分^[7]. 随着计算机技术的发展, 人类有可能研究复杂的信息处理过程. 人类对光学信息(通过视觉器官来获得)和声学信息(通过听觉器官来获得)的识别. 这是模式识别的两个重要方面.

在模式识别中可用遗传算法进行特征提取, 从可能的 m 个特征中依据某个评价标准选出 d 个特征($m > d$) 如图 5 所示:

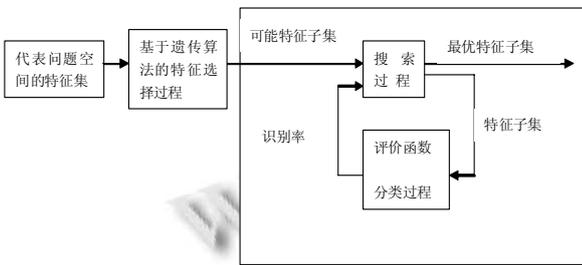


图 5 遗传算法在模式识别中进行特征提取

典型的数学建模题目有: 00 DNA 序列分类(00 年 A 题)等问题.

2.4 求解线性约束优化问题的遗传算法

遗传算法主要是用来寻优, 它具有很多优点: 它能有效地避免局部最优现象, 有及其顽强的鲁棒性, 并且在寻优过程中, 基本不需要任何搜索空间的知识和其他辅助信息等等. 利用遗传算法, 可以解决很多标准优化算法解决不了的优化问题, 其中包括目标函数不连续、不可微、高度非线性或随机的优化问题. 遗传算法在数学建模中主要解决的问题有组合优化问题中的 TSP 和背包问题、聚类问题、规划问题、信号处理问题、分配问题等.

2.5 遗传算法方法在数学建模中的应用举例

交叉口信号灯和人行横道的协调配置问题. (2008 年数学建模竞赛试题)

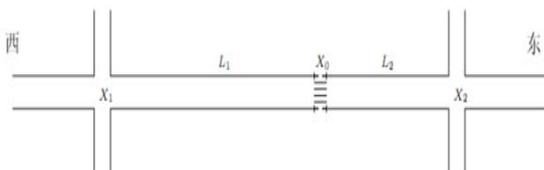


图 6 交叉口信号灯和人行横道图

X_1, X_2 处是信号灯的交叉点, 信号灯的周期为 T , L_1, L_2 为交叉口到 X_u 的距离.

1) 构造个体产生初始种群: 用随机函数 $\text{round}(\text{rand}(\text{size}, 2 * \text{Codel}))$, 随机生成 12 位编码.

2) 计算适应度: 要求人行横道的可安全通行时间不少于 h_0 , 车辆在 X_1, X_2 的平均等待时间尽可能短. 即

$$\min T_{\text{avg}} = \frac{\sum_{i=1}^n T_{1i} + \sum_{i=1}^n T_{2i}}{2n}$$

其中, T_{1i} 为第 i 辆车从西向东的车辆等待的时间, T_{2i} 第 i 辆车从东向西的车辆等待的时间, T_{avg} 车辆平均等待时间.

3) 选择操作: 采用轮盘赌方法, 得到的个体进入下一步交叉、变异. 交叉概率采用自适应概率 $P_c =$ 率:

$$\begin{cases} P_{\text{avg}} - \frac{(P_{\text{avg}} - P_{\text{max}})(f - f_{\text{avg}})}{f_{\text{max}} - f_{\text{avg}}}, f \geq f_{\text{avg}} \\ P_{\text{avg}}, f < f_{\text{avg}} \end{cases}$$

其中, P_c 为种群中 i_1 和 i_2 的交叉概率, P_{avg} 为种群中规定的交叉概率, P_{max} 为种群中适应度大于平均值的个体所采用的精英交叉概率, f_{avg} 为种群中平均适应度值, f_{max} 为种群中最大适应度值.

4) 交叉操作: 对二进制编码进行操作叫做交叉.

5) 变异操作 $P_m =$

$$\begin{cases} P_{\text{avg}} - \frac{(P_{\text{avg}} - P_{\text{mmax}})(f_{\text{max}} - f_m)}{f_{\text{max}} - f_{\text{avg}}}, f_m \geq f_{\text{avg}} \\ P_{\text{avg}}, f_m < f_{\text{avg}} \end{cases}$$

其中, P_m 为种群中个体的变异概率, P_{avg} 为种群中规定的基础变异概率, P_{mmax} 为种群中适应度大于平均值的个体所采用的精英变异概率, f_m 是个体适应度的值, f_{avg} 为种群中平均适应度值, f_{mmax} 为种群中最大适应度值.

利用遗传算法搜索到一个区间(578,862), 车辆平均等待的最短时间为 12 秒, 得出最佳相位差 t , 在相同最短的平均等待时间下, 人行横道可安全通行的时间越大越好, 得到 $L_1=720\text{m}$, $L_2=630\text{m}$, 最佳相位差为 6 秒, 最短平均等待时间为 12 秒, 人行横道可安全通行时间为 40 秒.

3 模拟退火算法及其在数学建模中的应用

3.1 模拟退火算法

模拟退火算法(Simulated Annealing, SA)是一种通

用概率算法,用来在一个大的搜索空间内找寻命题的最优解.其最初的思想由 Metropolis 在 1953 年提出, Kirkpatrick 在 1983 年成功地将其应用在组合最优化问题中.该算法可以克服优化过程陷入局部极小,克服初值依赖性,解决 NP 复杂性问题.它与以往的近似算法相比,具有描述简单、使用灵活、运用广泛、运行效率高等优点,而且特别适合同行计算.

用固体退火模拟组合优化问题,将内能 E 模拟为目标函数值 f , 温度 T 演化成控制参数 t , 即得到解组合优化问题的模拟退火算法:由初始解 i 和控制参数初值 t 开始,对当前解重复“产生新解→计算目标函数差→接受或舍弃”的迭代,并逐步衰减 t 值,算法终止时的当前解即为所得近似最优解,这是基于蒙特卡罗迭代求解法的一种启发式随机搜索过程.退火过程由冷却进度表(Cooling Schedule)控制,包括控制参数的初值 t 及其衰减因子 Δt 、每个 t 值时的迭代次数 L 和停止条件 S .

3.2 模拟退火算法在数学建模中的应用举例

采用模拟退火算法解决组合、优化问题.如 TSP(Traveling Salesman Problem)问题.在数学建模竞赛中如 97 年 A 题,2012 年试题都用到了模拟退火算法.

如 30 城市的 TSP 问题:

41 94; 37 84; 54 67; 25 62; 7 64; 2 99; 68 58; 71 44;
54 62; 83 69; 64 60; 18 54; 22 60; 83 46; 91 38; 25 38;
24 42; 58 69; 71 71; 74 78; 87 76; 18 40; 13 40; 82 7; 62
32; 58 35; 45 21; 41 26; 44 35; 4 50

(1) 初始温度的计算:

```
for i=1: 100
```

```
route=randperm(citynum);
```

```
fval0(i)=CalDist(dislist, route);
```

```
end
```

```
t0=-((max(fav10)-min(fav10))/log(0.9));
```

(2) 状态产生函数的设计

互换操作,随机交换两个城市的顺序;

逆序操作,两个随机位置的城市逆序;

插入操作,随机选择某点插入某随机位置.

(3) 参数设定

截止温度 $tf=0.01$;

退温系数 $\alpha=0.90$;

内循环次数 $L=200*citynum$;

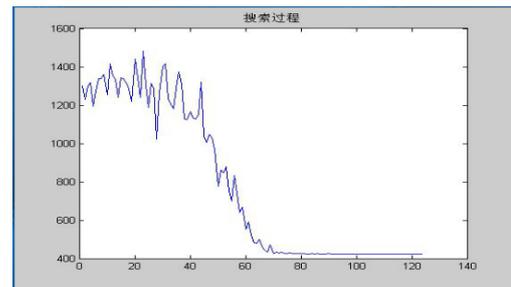


图7 30城市的TSP问题运行结果

4 灰色系统在数学建模竞赛中的应用

4.1 灰色系统理论

灰色系统理论是研究灰色系统分析、建模、预测、决策和控制的理论.把一般系统论、信息论及控制论的理论和方法延伸到社会、经济和生态等抽象系统,并结合数学方法,发展出一套解决信息不完全系统(灰色系统)的理论和方法.它研究的是“部分信息明确,部分信息未知”的“小样本,贫信息”不确定性问题,并依据信息覆盖,通过序列算子的作用探索事物运动的现实规律,特点是“少数据建模”,着重研究“外延明确,内涵不明确”的对象.其优点是不需要大量的样本,样本不需要有规律的分布,计算工作量小,定性分析结果与定量分析结果不会不一致,预测精度高.

4.2 灰色系统理论的应用

灰色系统用于预测近期、短期和中长期预测;也在工业、农业、商业、环境、社会、军事等领域中都有广泛的应用.特别是依据目前已有的数据对未来的发展趋势做出预测分析.在数学建模中,灰色模型主要用于预测.如进行中国人口增长预测.如用灰关联分析的方法分析影响某城市大气污染的各主要因素和污染水平的相关性.

4.3 灰色系统在数学建模竞赛中的应用举例

中国人口增长预测(2007 高教社杯全国大学生数学建模竞赛 A 题).

影响人口变化的不确定性因素很多,用灰色系统预测人口变化,可以得到比较精确的结果.

(1) 建立灰色预测模型 $GM(1, 1)$

时间序列 $x^{(0)}$ 有 n 个观察值: 其中,

$$x^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$$

$$x^{(1)} = \sum_i^k [x^{(0)}(i)] \quad (k=0,1,\dots)$$

$GM(1, 1)$ 模型相应的微分方程为: $\hat{\alpha} = [a, b]^T$, 用最小

二乘法求解得 $\hat{\alpha} = (B^T B)^{-1} B^T Y_n = [a, b]^T$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(x^{(1)}(1) + x^{(1)}(2))1 \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(2) + x^{(1)}(3))1 \\ \vdots \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(n-1) + x^{(1)}(n))1 \end{bmatrix}$$

取 $x^{(1)}(0) = x^{(0)}(1)$ 即可得到预测方程: 对该

$$x^{(0)}(k+1) = x^{(0)}(k+1) - x^{(0)}(k) = (1 - e^{-a})(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a})e^{-ak}$$

($k=0,1,2,\dots,n$)

$$x^{(1)}(k+1) = [x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}]e^{-ak} + \frac{b}{a}, k=0,1,2,\dots,n$$

式还原得到灰色预测模型为:

(2)通过预测, 得到实际值与预测值如表 2 所示:

表 2 实际值与预测值比较

年份	实际值	预测值	相对误差
2001	0.0059342	0.0059342	0
2002	0.0062436	0.0061952	0.775%
2003	0.0060979	0.0061899	1.509%
2004	0.0062232	0.0061846	0.620%
2005	0.0061843	0.0061793	0.081%

(3)利用此模型对中短期内的死亡率进行预测, 具体结果如下表 3.

表 3 死亡率预测

年份	2006	2007	2008	2009
死亡率	0.0061741	0.0061688	0.0061635	0.0061583

5 小结

由于不同的智能算法有不同的优缺点, 因此, 在实际的数学建模过程中, 可以把某几种智能算法综合进行应用, 这样, 能够有效地求解, 增加模型的可靠性. 随着人工智能的不断发展, 越来越多的问题需要综合不同的方法来进行解决, 智能算法的综合也在数学建模的过程中发挥着越来越重要的作用.

参考文献

- [1] [数学建模]-大赛中国:大学生最新赛事资讯.2013.1
- [2] 胡斌.浅析大学生实习制度.社科纵横,2009,1(24):191-192.
- [3] 周志华,曹存根.神经网络及其应用.北京:清华大学出版社,2004.
- [4] 彭松,方祖祥.BP 神经网络学习算法的联合优化.电路与系统学报,2000,5(3):26-30.
- [5] Goldberg DE. Genetic Algorithms in Search Optimization and Machine Learning. MA: Addison-Wesley, 1989: 197.
- [6] DebK. Multi-objective Optimization Using Evolutionary Algorithms.Chichester: Wiley, 2001.
- [7] 史海成,王春艳,张媛媛.浅谈模式识别.今日科苑,2007,(22).