

# 新小波阈值函数在医学图像去噪中的应用<sup>①</sup>

王 蓓, 张根耀, 李 智

(延安大学 数学与计算机科学学院, 延安 716000)

**摘 要:** 为了提高小波阈值去噪算法中的软阈值和硬阈值以及已有改进阈值函数存在的不足, 提出了新的分层阈值函数的方法. 该算法首先对噪声图像进行分解, 从而得出小波系数. 然后用改进的阈值函数对高频部分系数进行分层阈值处理. 最后根据所得估计的小波系数在小波基的条件下, 对图像进行重构, 得到去噪后图像. 该阈值函数具有优良的数学特性, 通过对医学图像仿真实验结果表明, 该算法去噪的效果无论是在视觉效果上, 还是在均方差和信噪比性能分析上均优于常用的阈值函数, 所以该算法在解决实际去噪问题中值得推广与应用.

**关键词:** 小波变换; 小波阈值去噪; 阈值函数; 均方差; 信噪比

## Application of the New Threshold of Wavelet Threshold Denoising to Medical Image

WANG Bei, ZHANG Gen-Yao, LI Zhi

(School of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an 716000, China)

**Abstract:** In order to improve some shortcoming in the soft threshold and hard threshold and low threshold functions have improved of wavelet threshold denoising, the authors propose a new hierarchical denoising threshold. Firstly, the method decomposes the noise image. Thus it is concluded that wavelet coefficients. Secondly, the wavelet coefficient by using an improved threshold function was carried out on the high-frequency part of the threshold processing. Finally, according to the estimation in the wavelet base conditions, and to rebuild image, this method gets the denoised image. The method has excellent mathematical characteristics, through the medical image simulation results indicate that the de-noising method effect both in the visual effects. Or in the MSE and SNR performance analysis is better than above mentioned denoising methods. So the algorithm in solving the problem of actual denoising is worthy of popularization and application.

**Key words:** wavelet transform; wavelet shrinkage; threshold function; MSE; SNR

医学图像在传输与生成的过程中, 往往会受到各种噪声的干扰, 如: 高斯白噪声、泊松噪声、泊松噪声等, 这样会使得医学图像的质量下降, 医学上的诊断主要是依据医学影像所提供的正常或者异常信息来做出判断和诊断出结论的, 因此, 需要尽可能减少噪声的影响对医学分析诊断系统来说是非常有必要的, 噪声还会影响对其图像后续的处理(如医学图像特征提取和目标识别等). 在现有的去噪方法中由于小波变换是一种新型图像处理方法, 它具有空(频)局部化、多分

辨率、去相关性和选基灵活的特性, 使其得到了广泛的应用<sup>[1,2]</sup>.

目前常用的小波去噪方法分为三类: 模极大值去噪、相关性去噪法、阈值去噪法<sup>[3]</sup>. 其中, 小波阈值去噪具有去噪效果好、计算量小、灵活等特点, 在图像去噪算法中得到了很好的应用. 小波阈值去噪提出到现在, 已经有许多国内外学者对此进行了研究<sup>[4-15]</sup>, 上述阈值改进的方法多属于全局性阈值, 采用统一阈值进行去噪, 这样并没有顾及噪声在各个频带分量不

<sup>①</sup> 基金项目: 国家自然科学基金(61379026); 陕西省教育厅教改项目(2013JK1124); 2012 级延安大学研究生创新计划

收稿时间: 2013-11-26; 收到修改稿时间: 2014-01-13

同的特点,而且把小波系数小于阈值时直接置零,导致部分图像信息丢失等<sup>[7]</sup>.这样去噪并不能达到好的效果.本文对医学图像与噪声特性进行了分析,提出了新阈值函数,该方法利用噪声在小波各个频带能量分布不同,提出了分层阈值进行处理,通过对医学图像仿真实验,说明该算法是可行的.

## 1 小波阈值去噪

### 1.1 基本思想

对图像进行小波分解后,分为低频部分和高频部分.图像中的噪声主要处于高频部分,利用这个特点,通过对高频部分进行相应地阈值化处理,然后利用小波对图像进行重构,从而达到去除噪声的目的<sup>[8]</sup>.

假设图像为:

$$f(j,k) = f_0(j,k) + n(j,k) \quad (1)$$

式中,  $f_0(j,k)$  为原始图像;  $n(j,k)$  为标准高斯白噪声图像,服从  $N(0, \sigma^2)$  分布.

### 1.2 常见的阈值函数

小波阈值去噪法的另一种称呼是阈值函数,即也就是利用阈值函数来获得阈值,目前该方法应用非常的广泛,它是对大于或者小于阈值小波系数模的不同的估计与处理方法.目前常用的阈值去噪方法有:硬阈值去噪、软阈值去噪、Garrote 阈值去噪和 Semisoft 阈值去噪,其中硬、软阈值函数表达式分别为:

1) 硬阈值去噪函数:

$$\hat{w}_{j,k}^H = \begin{cases} w_{j,k}, & |w_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (2)$$

硬阈值方法虽然解决了  $|w_{j,k} - \hat{w}_{j,k}^H|$  的误差问题,

但存在间断点  $\pm\lambda$ , 对图像重建的话会产生一些附加震荡,而且比较容易容易出现 Pseudo-Gibbs 现象等视觉失真<sup>[9]</sup>.

2) 软阈值去噪函数:

$$\hat{w}_{j,k}^S = \begin{cases} \text{sgn}(w_{j,k})(|w_{j,k}| - \lambda), & |w_{j,k}| \geq \lambda \\ 0, & |w_{j,k}| < \lambda \end{cases} \quad (3)$$

软阈值方法在  $\pm\lambda$  处连续性好,但  $|w_{j,k} - \hat{w}_{j,k}^S|$

存在恒定的误差,这样会使图像的高频信息产生丢失等失真的现象<sup>[10]</sup>.

## 2 改进的小波阈值去噪

### 2.1 阈值函数

本文提出如下改进的阈值函数:

$$\hat{w}_{j,k} = \begin{cases} w_{j,k} - \frac{\lambda^2}{2w_{j,k} \times e^{|w_{j,k}| - \lambda}}, & |w_{j,k}| > \lambda \\ \frac{w_{j,k}^3}{2\lambda^2}, & |w_{j,k}| \leq \lambda \end{cases} \quad (4)$$

给式(5)添加三个调节因子后的阈值函数为:

$$\hat{w}_{j,k} = \begin{cases} w_{j,k} - \frac{\lambda^m \times k}{2w_{j,k}^{m-1} \times e^{|w_{j,k}|^{m-1} - \lambda}} + (k-1)\lambda, & w_{j,k} > \lambda \\ \frac{|w_{j,k}|^n \times k}{2\lambda^{n-1}} \times \text{sgn}(w_{j,k}), & |w_{j,k}| \leq \lambda \\ w_{j,k} - \frac{(-\lambda)^m \times k}{2w_{j,k}^{m-1} \times e^{|w_{j,k}|^{m-1} - \lambda}} - (k-1)\lambda, & w_{j,k} < -\lambda \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $n, m, k \in Z$

从数学的角度对(4)式进行分析如下:

①当  $|w_{j,k}| \rightarrow \lambda^+$  时, 式(4)的第 1 个等式符合式(6):

$$\lim_{|w_{j,k}| \rightarrow \lambda^+} (w_{j,k} - \frac{\lambda^2}{2w_{j,k} \times e^{|w_{j,k}| - \lambda}}) = \frac{\lambda}{2} \quad (6)$$

②当  $|w_{j,k}| \rightarrow \lambda^-$  时, 式(4)的第 2 个等式符合式(7):

$$\lim_{|w_{j,k}| \rightarrow \lambda^-} (\frac{|w_{j,k}|^3}{2\lambda^2}) = \frac{\lambda}{2} \quad (7)$$

从式(6)□(7)可知, 该阈值函数在 2 个阈值点  $\pm\lambda$  处均是连续的, 且高阶可导. 并且式(4)中的第 2 个等式不同常见的阈值函数直接置零, 而是慢慢地向零趋近.

参数  $n$  调节阈值函数的形状; 参数  $m$  调节小波系数的变化; 参数  $k$  决定阈值函数的渐近线, 当  $k=1$  时阈值函数趋近于硬阈值函数, 当  $k=0$  时趋近于软阈值函数. 所以调节参数  $k$ , 新阈值函数可以在软硬阈值函数任意处.

图 1 的横坐标为原始小波系数用 (Wavelet Coefficient, WC)来表示, 纵坐标为阈值化处理后的的小波估计系数用(Coefficient after Threshold Processing, WCTP)表示,  $m = v = 2; k = 1 \lambda = 0.5; WC \in [-1, 1]$  时的阈值函数曲线图。

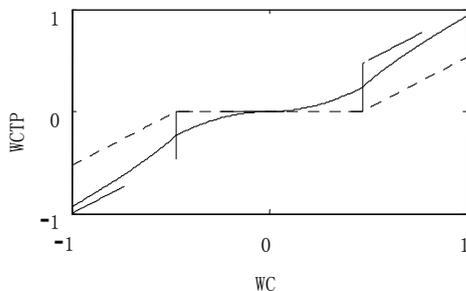


图 1 阈值函数对比图

从图 1 可以看出, 改进的阈值函数是一条平滑曲线, 并在硬、软阈值函数之间. 通过调整参数  $n, m, k$ , 可以保证在软、硬阈值之间灵活的调整, 可以得到光滑曲线。

## 2.2 阈值选取

在图像阈值去噪过程中, 门限阈值的选取非常重要, Donoho 提出了统一阈值方法<sup>[7]</sup>  $\lambda = \delta \sqrt{2 \log(M \times N)}$ , 但这种方法在实际应用中并不理想, 会产生过扼杀现象<sup>[11]</sup>. 通过分析发现, 利用小波对图像进行分解过程中, 会随着分解层数的增加, 噪声的能量就会越来越小, 而图像信息能量就越来越大, 针对小波分解的低频系数与高频系数特点, 本文提出了如下分层阈值估计:

$$\lambda_j = \frac{\delta \sqrt{2 \log(M \times N)}}{\log(1 + \alpha \times j)} \quad (8)$$

式中,  $j$  为分解尺度;  $M \times N$  为图像大小;  $\delta = \frac{\text{median}(|w_{j,k}|)}{0.6745}$ ;  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

适当的调整  $\alpha$  来控制阈值的变化, 当计算到高频带阈值时,  $\alpha$  取较小的值, 使阈值略大; 当计算到低频段,  $\alpha$  取较大的值, 使阈值略小, 通过对阈值参数  $\alpha$  调整  $\alpha$  从微观上提高了阈值估计的精确度。

## 3 实验结果及分析

### 3.1 仿真实验

实验是在 MATLAB2012(b)环境下进行编程实现的, 为了证明改进阈值函数在医学图像去噪的有效性, 选

用医学 CT 图像, 是由延安大学附属医院提供的人体胃 CT 图片, 如图 2(a)所示, 图像的大小分别为  $256 \times 256$ , 对其加 0.01 的高斯白噪声, 如图 2(b)所示. 本文基于提升图像的对称性, 视觉好, 更适合于图像处理, 因而选择 coif4 基函数<sup>[16]</sup>, 进行四层分解, 分解后, 根据式(8)算出门限阈值, 利用相应阈值进行处理, 最后进行图像重构, 得到去噪后的图像。

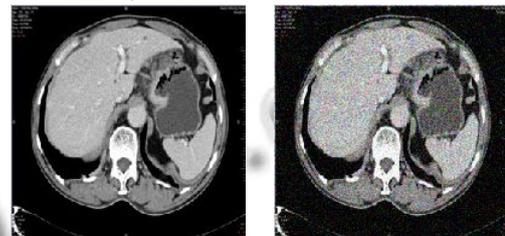


图 2 原图与噪声图

首先, 利用经典的 Donoho 提出的硬阈值、软阈值方法对图 2(b)进行处理, 处理后的如图 3(a)、图 3(b)所示, 在图 3(a)中可以看出此图和原始的图像差异较大, 而且图像过于平滑; 在图 3(b)中有几处地方出现图像失真, 这正是由于硬阈值存在连续性问题所造成的。

其次, 利用改进的方法进行处理, Garrote 阈值去噪结果如图 3(c)所示, 此函数去噪的效果相比硬软阈值有所改善, 但是图像和原图像存在偏差; Semisoft 阈值去噪结果如图 3(d)所示, 图像还是存在些失真的现象; 在图 3(e)、图 3(f)、图 3(g)、图 3(h)中这四个去噪方法比硬阈值、软硬值、Garrote 阈值、Semisoft 阈值去噪的效果好些, 但是这两个阈值函数函数把小于阈值的小波系数置零, 这样图像的一些细节没有得到好的保护。

最后, 利用本文提出的含参数的阈值函数对图 2(b)进行处理, 先用统一阈值处理如图 3(i), 其中取参数  $m=v=2, k=1$ , 然后利用(9)式计算出相应  $\lambda$  的值, 分层处理的效果如图 3(j)所示, 与其他的几种阈值去噪函数相比, 此函数的去噪结合分层阈值效果明显好了许多, 比采用统一阈值效果好, 不仅克服了去噪后出现的震荡失真的现象, 而且与原图像的偏差也小。

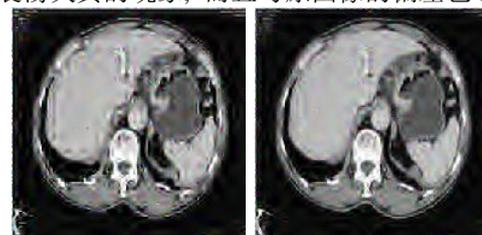
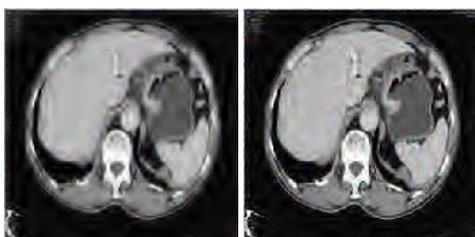
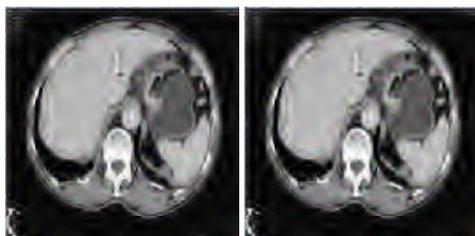


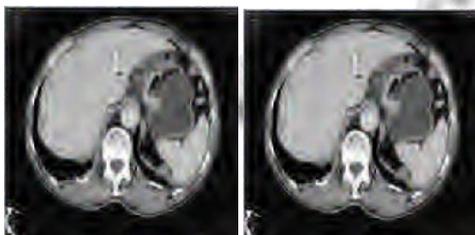
图 3 软阈值去噪 (a) 硬阈值去噪 (b)



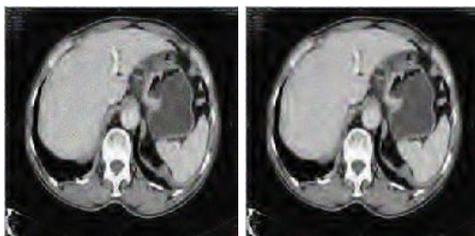
(c)Garrote 阈值去噪 (d)Semisoft 阈值去噪



(e)文献[1] 阈值去噪 (f)文献[7] 阈值去噪



(g)文献[9]阈值去噪 (h)文献[12]阈值去噪



(i)本文算法统一阈值去噪(j)本文算法分层阈值去噪

图3 不同的阈值函数去噪效果图

### 3.2 去噪性能评价

为了进一步衡量本文提出新阈值函数的性能,用均方差(MSE)与峰值信噪比(PSNR)对去噪后效果分析说明. MSE 的值越小表示图像的质量越好;PSNR 的值越大图像的质量越好.

MSE 定义为<sup>[11]</sup>:

$$MSE = \frac{1}{M \times N} \left[ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \left( g(i, j) - g(\hat{i}, j) \right)^2 \right] \quad (9)$$

PSNR 定义为:

$$PSNR = 10 \times \lg \left( \frac{255^2}{MSE} \right) \quad (10)$$

其中,  $M \times N$  为图像大小,  $g(i, j)$  是无噪图像,  $g(\hat{i}, j)$  为恢复得到的图像

通过 MATLAB2012(b)环境下进行编程后,计算出不同的阈值函数去噪的方差与峰值信噪比如表 1 所示.

表 1 降噪后图像的 PSNR 和 MSE 对比

降噪方法	PSNR/dB	MSE
噪声图像	21.1222	502.1832
Donoho 软阈值函数	21.2493	487.6933
Donoho 硬阈值函数	23.2150	310.1558
Garrote 阈值函数	22.2179	390.2047
Semisoft 阈值函数	23.7509	274.1540
文献 1 阈值函数	23.0129	269.1203
文献 7 阈值函数	22.0867	402.1744
文献 9 阈值函数	21.8903	420.7739
文献 12 阈值函数	23.9305	254.0429
本文算法统一去噪	24.5117	230.0947
本文算法分层去噪	25.1263	230.2863

### 4 本文小结

本文是在分析了已有阈值的算法优缺点后提出了对阈值函数与阈值的改进. 这一阈值函数含有三个调节阈值因子, 分别是  $m;v;k$  通过改变这三个参数, 然后对阈值进行改进, 利用分层估计出门限值, 经过对人体胃 CT 图像的仿真实验后, 该阈值函数与阈值能够较好地去除图像噪声, 且可以保护图像的细节信息, 灵活性强, 效果好, 适合医学图像去噪处理, 具有较好的应用价值.

#### 参考文献:

- 1 张艳,程小平.针对医学图像的小波阈值去噪方法.西南师范大学学报,2011,36(3):245-249.
- 2 李旭超,朱善安.小波域图像降噪概述.中国图象图形学报,2006,11(9):1201-1208.
- 3 吴美璇.基于小波的图像域值去噪方法[学位论文].重庆:重庆大学,2012.
- 4 Donoho DL, Johnstone IM. De-noising by Soft-thresholding. IEEE Trans. on IT, 1995, 41(3): 613-627.
- 5 Bruce AG, Gao HY. Waveshrink with firm shrinkage. Statistica Sinica, 1997, 7(4): 855-874.

- 6 Gao H. Wavelet shrinkage de-noising using the nonnegative garrote. *Comput. Graph. Stat.* 7, 1998: 469–488.
- 7 周西峰,朱文文,郭前岗.基于渐近半软阈值函数的超声信号去噪方法. *探测与控制学报*,2011,33(2):35–39.
- 8 杨立.基于改进的小波阈值函数图像去噪. *重庆理工大学学报*,2013,27(2): 93–96.
- 9 张莲,秦华锋,余成波.基于小波阈值算法的研究. *计算机工程与应用*,2008,44(9):172–173.
- 10 张双庆,赵不贿,郁光珍.基于分频带最优阈值函数的电力信号去噪. *计算机仿真*,2012,29(2):310–313.
- 11 李庆华,等.基于自适应小波阈值的心电图去噪算法. *计算机仿真*,2013,30(10):368–371.
- 12 杨金云,李浩.基于一种新阈值函数的小波医学图像去噪. *微计算机信息*,2009,25(7):277–279.
- 13 付伟,许山川.一种改进小波阈值去噪算法. *传感技术学报*,2006,19(2):534–540.
- 14 张维强,宋国乡.基于一种新的阈值函数的小波域信号去噪. *西安电子科技大学学报*,2004,31(2):296–303.
- 15 腾军,朱焰煌,周峰.适应分解层数的小波域中值滤波振动信号降噪算法. *振动与冲击*,2009,28(12):59–63.
- 16 郑钧,候锐峰.小波去噪中小波基的选择. *沈阳大学学报*,2009,21(2):108–111.