

# 改进粒子滤波算法及其应用仿真<sup>①</sup>

张 军<sup>1</sup>, 所玉君<sup>1</sup>, 董小丰<sup>2</sup>, 张玉朋<sup>3</sup>

<sup>1</sup>(中国航天科工集团 第八三五七研究所, 天津 300308)

<sup>2</sup>(空军驻天津地区军事代表室, 天津 300308)

<sup>3</sup>(河北工业大学 控制学院, 天津 300130)

**摘 要:** 针对目标跟踪中粒子滤波算法的估计精度不高、粒子退化问题, 文中提出了一种 GH-RPF 算法. 在粒子滤波的基础上, 应用高斯-厄米特滤波来产生重要密度函数, 同时对重采样采用正则变换以改善采样粒子的多样性. 将该算法应用于非线性、非高斯的目标跟踪中, 仿真结果表明, 与标准粒子滤波及 EKPF 相比, 该算法的滤波精度更高, 具有更高的跟踪性能.

**关键词:** 粒子退化; 粒子滤波; 正则变换; 跟踪

## Improved Particle Filter Algorithm and Application Simulation

ZHANG Jun<sup>1</sup>, SUO Yu-Jun<sup>1</sup>, DONG Xiao-Feng<sup>2</sup>, ZHANG Yu-Peng<sup>3</sup>

<sup>1</sup>(The 8357th Research Institute of China Aerospace Science and Industry Corp, Tianjin 300308, China )

<sup>2</sup>(Military Delegation Office for Tianjin Region of PLA's Airforce, Tianjin 300308, China )

<sup>3</sup>(School of Control Science and Engineering, Hebei University of Technology, Tianjin 300130, China)

**Abstract:** In view of the low precision of particle filter algorithm and particle degradation in target tracking, a GH-RPF algorithm is put forward. Based on particle filter, Gauss-Hermite filter is applied to generate the importance density function, and meanwhile canonical transformation is adopted to re-sampling in order to improve the diversity of particles. If the algorithm is applied to nonlinear and non-Gaussian target tracking, it can be seen from the simulation result that the filtering accuracy is higher and tracking performance is better compared to the standard particle filter algorithm as well as EKPF.

**Key words:** particle degradation; particle filter; canonical transformation; tracking

## 1 引言

早在 1953 年, 由 Rosenbluth 等人提出粒子滤波算法<sup>[1]</sup>. 该算法在状态处理非线性噪声非高斯滤波问题时, 通过蒙特卡罗方法解决难度的高维积分求得递推贝叶斯估计. 由于粒子滤波对状态的先验概率和后验概率进行描述利用粒子概率而不是函数形式, 理论上可用于任意非线性非高斯随机系统的状态估计. 被广泛应用于语音信号增强、目标定位、国防军事、目标跟踪、机器人导航、计算机视觉、及故障检测等多个领域<sup>[2,3]</sup>.

在实际应用中时粒子滤波的粒子退化问题逐渐显现出来. 粒子退化是指: 随着迭代次数的增加, 权重

系数会随之加重, 多数粒子权值趋于 0, 少数粒子权值趋向 1, 使得大量计算浪费在不起任何作用的粒子更新上. Doucet<sup>[4]</sup>从理论上证明了粒子退化现象的必然性. 目前国内外学者提出多种改进的粒子滤波算法. 文献 [5] 针对粒子滤波重采样出现的样本匮乏问题, 提出重采样后对粒子进行马尔可夫链移动处理滤波算法. 以及由我国的李良群提出的迭代扩展卡尔曼粒子滤波器 (Iterated EKPF)<sup>[6]</sup>. 各种算法仍未能较好的解决重采样出现的样本枯竭及粒子匮乏时导致的滤波发散等问题. 针对上述问题, 本文提出了一种 GH-RPF 算法. 首先利用高斯-厄米特积分产生重要性函数, 其次重采样时增加正则变换步骤改善粒子多样性. 与标准粒子滤

① 收稿时间:2013-05-05;收到修改稿时间:2013-06-07

波、EKPF 相比,不但将最近的量测信息计入了先验概率密度,而且增加了采样粒子的多样性,从而提高了跟踪的精度滤波的性能。

## 2 粒子滤波算法

粒子滤波,是一种基于非参数化的蒙特卡罗仿真的近似贝叶斯滤波算法。核心思想是:首先依据系统状态向量的经验条件分布,在状态空间抽样产生一组随机样本集合,这些样本集合称为粒子;然后根据观测值不断调整粒子的权重大小和样本位置;最后通过调整后的粒子信息修正最初的经验条件分布,估计出系统状态和参数<sup>[7]</sup>。下面对粒子滤波进行简单的介绍:

$$\text{状态方程: } x_k = f_k(x_{k-1}, u_{k-1}) \quad (1)$$

$$\text{观测方程: } y_k = h_k(x_k, v_k) \quad (2)$$

其中  $u_{k-1}$  是  $k-1$  时刻的状态噪声,  $x_{k-1}$  和  $x_k$  分别是  $k-1$  和  $k$  时刻的状态值,  $v_k$  是  $k$  时刻的观测噪声,  $y_k$  为  $k$  时刻的观测值。  $f_k$  和  $h_k$  分别是  $k$  时刻的状态模型和观测模型。

整个模型的主要思路是通过状态方程实现粒子和状态的预测,并通过观测方程实现对粒子权重的更新,获得后验概率密度,实现状态的贝叶斯估计。其具体的实现如下描述所示:

1) 粒子初始化。由先验概率  $p(x_0)$  产生粒子群  $\{x_0^i\}_{i=1}^N$ , 并将所有粒子权值置为  $1/N$ ;

2) 状态更新。在  $k$  时刻,更新粒子权值:

$$w_k^i = w_{k-1}^i p(z_k | x_k^i) = w_{k-1}^i p_{z_k}(z_k - h(x_k^i)) \quad i=1,2,\dots,N \quad (3)$$

并且归一化权值

$$w_k^i = w_k^i / \sum_{i=1}^N w_k^i \quad (4)$$

从而可得  $k$  时刻未知参数  $x$  的最小均方估计为

$$\hat{x}_k \approx \sum_{i=1}^N w_k^i x_k^i \quad (5)$$

3) 重采样。得到新的粒子集合

$$\{x_{0k}^i, i=0,1,2,\dots,N\}$$

4) 预测。利用状态方程  $f_k$  预测位置参数  $x_{k+1}^i$ 。

5) 时刻  $k=k+1$ , 转到第(2)步。

## 3 改进的GH-RPF算法

### 3.1 GH 滤波递推公式

GH 滤波假设系统的后验概率密度可以用高斯分布来近似,根据量测的状态变量数据,利用状态方程和量

测方程得到后验概率估计,然后利用高精度的高斯积分公式就可以得到高斯-厄米特滤波的积分公式<sup>[8]</sup>。

(1) 系统状态预测及方差预测。在  $k-1$  时刻,设系统状态及其方差的估计分别为  $x_{k-1|k-1}$ 、 $p_{k-1|k-1}$ , 由高斯点变换公式

$$x_i = (\sqrt{p_{k-1|k-1}})^T q_i + x_{k-1|k-1} \quad (6)$$

与系统的状态方程,系统状态及其方差的一步预测分别为:

$$x_{k|k-1} = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) \quad (7)$$

$$p_{k|k-1} = Q + \sum_{i=1}^n (f(x_i) - x_{k|k-1})(f(x_i) - x_{k|k-1})^T w_i \quad (8)$$

(2) 系统状态更新及方差更新。在已有的系统状态及其方差预测的基础上,有新的高斯点变换

$$x_i = (\sqrt{p_{k|k-1}})^T q_i + x_{k|k-1} \quad (9)$$

与量测模型可得到系统的状态及其方差的更新为

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + k_k(z_k - h(x_{k|k-1})) \quad (10)$$

$$p_{k|k} = p_{k|k-1} - k_k p_{zz}^T \quad (11)$$

其中,

$$z_k = \sum_{i=1}^n h(x_i) w_i \quad (12)$$

$$p_{zx} = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{k|k-1})(h(x_i) - z_k)^T w_i \quad (13)$$

$$p_{zz} = \sum_{i=1}^n (h(x_i) - z_k)(h(x_i) - z_k)^T w_i \quad (14)$$

$$k_k = p_{zx}(R - p_{zz})^{-1} \quad (15)$$

### 3.2 正则化粒子滤波

重采样虽然能减少退化问题,但会造成粒子多样性的丧失<sup>[9]</sup>。这是因为重采样时,样本从离散分布抽取的而不是连续分布。因此,可以考虑根据后验概率密度的离散分布重建它的连续分布,然后从近似连续的后验概率密度中采样获得重采样粒子。对粒子滤波的重采样进行如下处理:

$$p(x_k | z_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^N w_k^i K_h(x_k - x_k^i) \quad (16)$$

式中,  $K_h(x) = (1/h^{n_x})K(x/h)$  是重新调整过的核密度  $K(\bullet)$ ,  $h > 0$  是核的带宽,  $n_x$  是状态向量  $x$  的位数,  $w_k^i$  ( $i=1,2,\dots,N$ ) 是归一化后的权重。核密度是如下一个对称的概率密度函数:

$$\int x K(x) dx = 0, \int \|x\|^2 K(x) dx < \infty \quad (17)$$

选择适当的核函数和带宽使得真实的后验概率密度和正则经验表示的积分均方误差最小, 该值被定义如下:

$$MISE(\hat{P}) = E(\int [\hat{p}(x_k | z_{1:k}) - p(x_k | z_{1:k})]^2 dx_k) \quad (18)$$

式中,  $\hat{p}(x_k | z_{1:k})$  表示对  $p(x_k | z_{1:k})$  的近似. 如果样本的经验方差矩阵为  $S$  不是单位矩阵, 则需要一个线性变换来进行白化.

$$S = DD^T \quad (19)$$

则有

$$D\varepsilon = x \quad (20)$$

其中,  $\varepsilon$  为白化样本,  $x$  为原始样本. 这样, 对于均值为  $\bar{x}$ , 方差为  $S$ 、最优带宽为  $h$  的核函数  $K_h(x - \bar{x})$ , 其样本为

$$x = \bar{x} + hD\varepsilon \quad (21)$$

对粒子滤波的重采样正则化处理能有效缓解粒子匮乏.

### 3.3 改进算法

根据以上所述原理在经典粒子滤波的基础上, 选用 GH 产生的重要密度函数, 对重采样的过程中使用正则变换形成 GH-RPF 算法. 算法步骤如下:

(1) 初始化. 对  $k-1$  时刻的样本集进行 GH 滤波, 得到每一个粒子及其方差的估计值  $x_{k|k}^i$ 、 $p_{k|k}^i$ . 重要密度函数用以  $x_{k|k}^i$  为均值、 $p_{k|k}^i$  为方差的一簇高斯分布构成. 用它产生预测样本集为  $\{\hat{x}_k^i, i=1,2,\dots,N\}$ ,  $\hat{x}_k^i \sim q(x_k | x_{k-1}^i, z_k)$ .

(2) 更新. 在  $k$  时刻, 每一个粒子的重要性权值:

$$w_k^i = w_{k-1}^i p(z_k | \hat{x}_k^i) = w_{k-1}^i p_{ek} \left( z_k - h \left( \hat{x}_k^i \right) \right) \quad i=1,2,\dots,N \quad (22)$$

并且归一化权值

$$w_k^i = w_k^i / \sum_{i=1}^N w_k^i \quad (23)$$

从而可得  $k$  时刻未知参数  $x$  的最小均方估计为

$$x_k^* \approx \sum_{i=1}^N w_k^i \hat{x}_k^i \quad (24)$$

(3) 重采样. 得到新的粒子集合

$$\left\{ \hat{x}_{0:k}^i, i=0,1,2,\dots,N \right\}. \text{ 计算 } \left\{ \hat{x}_{0:k}^i, w_k^i \right\} \text{ 的经验方差矩阵}$$

$S_k$ , 计算  $D_k$  使之满足  $D_k D_k^T = S_k$ , 进行重采样, 选择最

佳的核采样

$$\hat{x}_k^{i*} = \hat{x}_k^i + hD\varepsilon \quad (25)$$

(4) 预测. 利用状态方程  $f_k$  预测位置参数  $\hat{x}_{k+1}^i$ .

(5) 时刻  $k=k+1$ , 转到第(2)步.

## 4 仿真结果与分析

将 GH-RPF 算法进行仿真实验, 并与经典粒子滤波、EKPF 进行对比. 采用下述经典单变量非线性模型来验证改进算法的有效性. 系统的离散状态方程和量测方程分别为

$$x_k = 0.5x_{k-1} + 25x_{k-1} / (1 + x_{k-1}^2) + 8\cos(1.2x_{k-1}) + u_{k-1} \quad (26)$$

$$y_k = x_k^2 / 20 + v_k \quad (27)$$

其中: 状态噪声  $u_{k-1} \in N(0, Q)$ , 观测噪声  $v_k \in N(0, R)$ .

初始值  $x_0$  取 0.5, PF 算法取粒子数 1000, 改进 PF 算法取粒子数 500, 过程噪声  $Q=10$ , 量测噪声  $R=1$  时间步长均为 50, 即  $T=50$ .

在上述条件下, 分别用 EKPF、PF、GH-RPF 算法对目标状态进行滤波估计. 仿真结果如图 1、2 所示. 图 1 为各种算法的状态估计曲线. 其中, 五角星、加号、星号、正方形所在点表示各个状态点, 黑线表示状态的真实值, 红色线表示经典粒子滤波的状态估计曲线, 蓝色表示扩展卡尔曼粒子滤波的状态估计曲线, 绿色线表示改进后滤波的状态曲线. 从而说明, EKPF 跟踪效果明显强于标准粒子滤波, 改进算法的滤波效果也优于 EKPF.

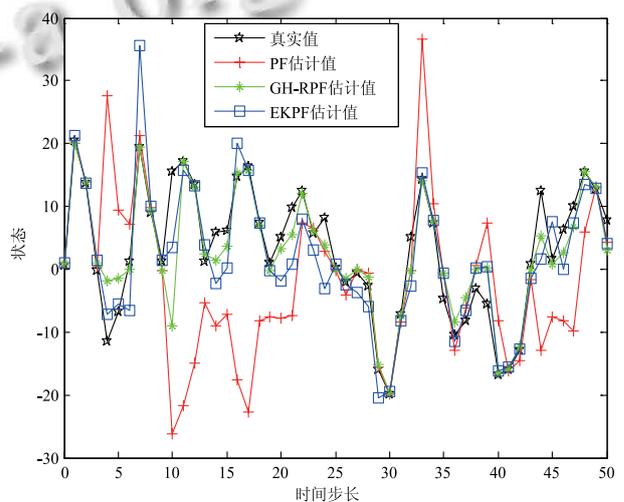


图 1 不同算法状态估计

图 2 为各算法的均方根误差曲线图. 因为均方根

误差能更有效地表征滤波精度, 所以本文进一步采用均方根误差来比较滤波算法的性能. 运行程序后, 不同滤波算法的均方根误差如图 2 所示. 得出 PF 的估计误差均方值为 15.8243, GH-RPF 的估计误差均方值为 5.1308, EKPF 的估计误差均方值为 5.4151. 可以明显的看出 GH-RPF 的均方差小于 UPF, 远小于经典粒子滤波算. 这是因为 GH-RPF 引入高斯-厄米特产生的重要密度函数和正则变换, 在缓解了粒子退化的同时增加了粒子多样性. 所以, 改进后的算法具有更好的滤波精度和更好的跟踪稳定性.

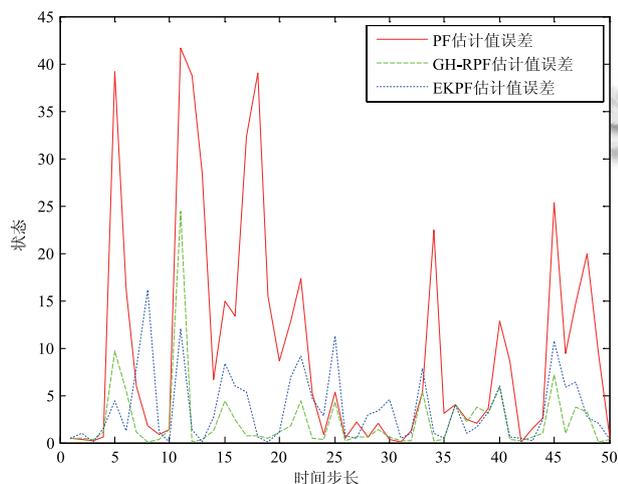


图 2 不同算法的均方根误差估计

表 1 为各算法时间对比. 由表可以看出, 虽然改进算法提高了跟踪精度和滤波效果, 但是运行时间是标准粒子滤波算法的 3 倍. 当遇到实时性比较高的场合时, 改进算法适用性大大折扣.

表 1 各算法运行时间

滤波算法	运行时间
PF	0.8768
EKPF	1.3054
GH-RPF	2.3976

## 5 结论

近年来, 从重要性函数选择、粒子多样性丧失、改善算法实时性等角度考虑, 国内外学者开展了广泛的研究. 本文针对经典滤波的重要性选择及样本枯竭

问, 提出了一种新的滤波方法 GH-RPF. 该算法有效地解决克服了粒子退化问题, 增加了采样粒子的多样性. 仿真实验证明了该算法具有很好的跟踪精度和滤波效果. 此算法从在的不足就是计算量增大, 运行时间延长. 鉴于计算机处理能力的不断提高, 有限计算量的增加不是问题.

## 参考文献

- 1 Meropolis N, Rosenbluth AW, Rosenbluth MN. Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, 1953, 21(6): 1087-1092.
- 2 周尚波, 何革, 柳玉炯. 一种改进的粒子滤波目标跟踪算法. *计算机应用研究*, 2010, 27(7): 2757-2759.
- 3 Valyrakis A, Tsakonas EE, Sidiropoulos ND. Stochastic modeling and particle filtering algorithms for tracking a frequency-hopped signal. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2009, 57(8): 3108-3118.
- 4 Doucet A, Godsill S, Andriotti C. On sequential monte carlo sampling method for Bayesian filtering. *Statistics and Computing*, 2000, 10(1): 197-208.
- 5 Gilks WR, Berzuini C. Following a moving target-monte carlo inference for dynamic Bayesian models. *American Statistical Society*, 2001, 63: 127-146.
- 6 Li LQ, Ji HB, Luo JH. The iterated extended kalman particle filter. *Proc. of International Symposium on Communications and Information Technologies*. Beijing, China. 2005. 1172-1175.
- 7 Deng XL, Xie JY, Guo WZ. Bayesian target tracking based on particle filter. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2005, 16(3): 545-549.
- 8 Jayesh H. Kotecha, Petar M. Djuric. Gaussian sum particle filtering. *IEEE Transactions on signal processing*, Oct. 2003, 51(10): 2602-2611.
- 9 Hong S, Bolic M, Djuric PM. An efficient fixed-point implementation of residual resampling scheme for high-speed particle filters. *IEEE Signal Processing Letters*, 2004, 11(5): 482-485.