# 利用长轴估计的椭圆检测方法

Ellipse Detection with Major Axis Estimation

祝建中 (杭州师范大学 信息科学与工程学院 浙江 杭州 310036)

- **摘 要:** 提出了一种利用长轴估计进行椭圆检测的方法。根据对称图形边界对偶点的性质分析了椭圆轴端点的 特征,对 ADM 边缘检测算子的改进获得了更精细的边点切线信息,利用轴端点特征及边点切线信息 检查侯选长轴端点的合理性,长轴选定后,用一维累积数组对椭圆短轴进行累积。在合成图像和实际 图像上的实验结果表明提出的算法正确有效。
- 关键词: 椭圆检测 Hough 变换 边点 对偶点 长轴估计

## 1 引言

现实世界中许多圆形或椭圆形的物体在通过投影 产生的图像中以椭圆形状呈现,高效的椭圆检测算法 在图像分析、模式识别、计算机视觉等领域有重要的 应用价值。

Yuen 等人提出了基于标准 Hough 变换(SHT) 的椭圆检测方法<sup>[1]</sup>,该方法对椭圆部分缺损和噪声 不敏感,无须对椭圆个数有先验知识,具有较高的 检测精度和鲁棒性。但一个椭圆有中心位置、长短 轴长度、长轴方向 5 个待定参数,采用 SHT 需要在 5 维参数空间中累积,其计算量和存储空间是巨大 的。为此,二十多年来研究人员不断地从多种角度 提出改进方案。利用随机 Hough 变换(RHT)检测椭 圆的方法<sup>[2]</sup>,在图像空间中的随机地选取不在一条 直线上的几个点映射到参数空间的一个点,有效地 降低了 SHT 巨大的时空开销。最近几年,研究人员 对椭圆检测的研究进一步深入。基于圆弧的椭圆验 证方法<sup>[3]</sup>极大地减少了虚假椭圆的输出。基于边段 分析的方法<sup>[4,5]</sup>,有效地克服了基于边点分析方法 计算量大缺点。

本文提出的改进算法,利用对椭圆长轴位置的正确估计,将采用 SHT 时所需的 5 维累积参数空间降低 到 1 维,有效地降低了计算和存储开销,实现了椭圆 的快速检测。

## 2 椭圆的参数关系及轴端点性质

## 2.1 椭圆的参数关系

如图 1 所示,对任意一个椭圆,设其中心为 (x<sub>0</sub>,y<sub>0</sub>),长半轴为 a,短半轴为 b,长轴与 x 轴的夹 角为α,则该椭圆由五元组(x<sub>0</sub>,y<sub>0</sub>,a,b,α)确定。



若椭圆长轴的两个端点 P<sub>1</sub>(x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>)和 P<sub>2</sub>(x<sub>2</sub>, y<sub>2</sub>) 选定,则五元组(x<sub>0</sub>,y<sub>0</sub>,a,b, *α*)中的四个参数 x<sub>0</sub>,y<sub>0</sub>,a, *α* 也随之确定:

$$\begin{cases} x_0 = (x_1 + x_2)/2 \\ y_0 = (y_1 + y_2)/2 \end{cases}$$
(1)

$$a = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{2}$$
(2)

$$\alpha = \arctan(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}) \tag{3}$$

Research and Development 研究开发 79

① 收稿时间:2009-05-12

这样,需要通过 Hough 变换累积确定的参数仅 剩下 b 一个。

因长度和角度属于平移和旋转变换的不变量,可 将图1的一般椭圆通过平移和旋转变换到图2所示的 标准形式,再利用椭圆标准方程来分析长度和角度之 间的关系。



图 2 标准椭圆及参数关系

设 **P(x,y)**为椭圆上**(**除轴端点外**)**参加累积的任意 一点,由式(1)可得:

$$b^{2} = \frac{a^{2}d^{2}\sin^{2}\beta}{a^{2} - d^{2}\cos^{2}\beta}$$
(5)

其中,

$$\sin^2 \beta = h^2 / d^2$$
  
而 d 可由两点间距离公式直接求得。记

$$A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, B = -1, C = y_1 - Ax_1,$$

则根据点 P 到长轴所在直线的距离公式可求出 h:

$$h = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

#### 2.2 椭圆的轴端点性质

根据文献[6]的定义,图形边界上外法线方向相反的两个点称为图形边界对偶点,简称对偶点。

如图 3 所示,设 D1 和 D2 为椭圆上的对偶点, I 为它们的连线,则下列性质 1 和性质 2 成立。

性质1 连线1经过椭圆中心。

证明 文献[6]已经证明,对偶点具有平移、缩放 和旋转不变性,因此可在椭圆标准方程下进行论证。

将方程(4)改写为隐函数形式:

 $f(x, y) = b^2 x^2 + a^2 y^2 - (ab)^2 = 0$ 则椭圆边界上任意一点 P(x,y)的法向量为( $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ ) =

 $(2b^{2}x, 2a^{2}y)$ , 从而该点的切向量为 $(-2a^{2}y, 2b^{2}x)$ 。

80 研究开发 Research and Development



图 3 椭圆边界对偶点

据此,记 D1 和 D2 的切向量分别为:

$$\vec{D}_1 = (-2a^2y_1, 2b^2x_1)$$

$$D_2 = (-2a^2y_2, 2b^2x_2)$$
  
因为  $D_1$ 和  $D_2$  是对偶点,它们的切向量平行,故

$$\vec{\exists} \vec{D}_{1} \vec{D}_{2} = \left| \vec{D}_{1} \right| \left| \vec{D}_{2} \right|, \quad \square 4a^{4} y_{1} y_{2} + 4b^{4} x_{1} x_{2} = \sqrt{4a^{4} y_{1}^{2} + 4b^{4} x_{1}^{2}} \sqrt{4a^{4} y_{2}^{2} + 4b^{4} x_{2}^{2}}$$

经化简得

/

$$\frac{y_1 x_2}{x_1 y_2} + \frac{x_1 y_2}{y_1 x_2} = 2$$
  
 $\Rightarrow \frac{y_1 x_2}{x_1 y_2} = a , \quad \square a + \frac{1}{a} = 2$  有唯一解 a=1, 得

 $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ ,即 D<sub>1</sub>和 D<sub>2</sub>各自与椭圆中心的连线有相同

的斜率(与 | 重合),因此椭圆中心在 D<sub>1</sub> 和 D<sub>2</sub>的连线 | 上。 证毕。

性质 2 D<sub>1</sub>和 D<sub>2</sub>的切线与 I 垂直当且仅当 D<sub>1</sub>和 D<sub>2</sub> 是椭圆长轴(短轴)的两端点。

证明 若 I 是椭圆短轴,显然 D1 和 D2 的切线与 I 垂直。否则,根据性质 1, I 经过椭圆中心,其方程

为
$$y = \frac{y_1}{x_1}x$$
,改写为隐式表示:  
$$f(x,y) = \frac{y_1}{x_1}x - y = 0$$

则一的切向量为

$$\vec{l} = (-\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x}) = (-1, \frac{y_1}{x_1})$$
$$\vec{D}_1 = 2(a^2 + b^2)y_1$$

显然,要使 D1 的切线与 I 垂直当且仅当 y1 为 0, 即 I 为长轴。证毕。

## 3 边点及梯度的提取

单像素宽度的边缘、较高精度的边点梯度,对有 效应用性质 2 限制长轴端点的候选范围极其重要。 ADM 边缘检测算法<sup>[7]</sup>具有快速生成单像素宽度边缘 的优点,但其生成的边点梯度方向仅 4 个,不能满足 性质 2 的应用需求,为此我们对 ADM 算法进行相应 的改进。



图 4 边点检测及方向模板

改进算法沿用 ADM 算法的处理过程,但在计算 被检测图像中各像素的绝对差分和方向时,采用了图 4 所示的含有 8 个方向的模板,对图像中的每个像素 p,按主对角、水平、次对角、垂直方向依次计算其各 方向上的差分:

 $d_1(p) = PDU1 + PDU2 - (PDL1 + PDL2)$ 

 $d_2(p) = HL1 + HL2 - (HR1 + HR2)$ 

 $d_{3}(p) = NDU1 + NDU2 - (NDL1 + NDL2)$ 

 $d_4(p) = VU1 + VU2 - (VL1 + VL2)$ 

然后,按下列公式计算像素 p 的绝对差分 s(p)和 方向 dir(p):

$$\begin{split} s(p) &= \max_{1 \le i \le 4} \{ \left| d_i(p) \right| \} = \left| d_{i_0}(p) \right| \\ dir(p) &= \begin{cases} i_0, & \text{ Tr} d_{i_0}(p) > 0 \\ i_0 + 4, & \text{ Tr} \end{bmatrix} \end{split}$$

接着按下列方法确定图像的边缘点及其梯度。设 T 为事先设定的边缘强度阈值,记像素 p(i,j)处沿方向 dir(p)上的两个邻居为 p1 和 p2(例如,若 dir(p)等 于 1 或 5,则 p1= p(i-1,j-1)、p2= p(i+1,j+1)), 沿用 ADM 算法的单宽度边缘点检测条件:

c(p)=s(p)≥s(p1)且 s(p)>s(p2)且 s(p)>T

则 **p(i,j)**处的边缘强度为 **e(p)**和梯度方向 **d(p)**按 下列规则确定:

if (c(p)为真)

{ p 是边缘点; e(p)= s(p);d(p)=dir(p); }

else

{ p 不是边缘点; e(p)=0;d(p)=0; } 由此生成的边图 E 和梯度方向图 D。

## 4 基于轴估计的椭圆检测算法

#### 4.1 算法设计

步骤 1. 对被检测图像进行平滑去噪等预处理后, 应用上述改进边缘检测算法生成边图 E 和梯度方向图 D。

步骤 2. 将 E 中的点按其所属梯度方向分成 8 个 子集 Ei(i=1,2,3,4,5,6,7,8),其中 Ei 中的边点 p 都满 足 dir(p)=i。

步骤 3. 因 Ei(i=1,2,3,4)与 Ej(j=i+4)中的点梯 度方向相反,称为对偶子集。依次对这 4 组对偶子集 执行步骤 4-步骤 8。

步骤 4. 在 Ei 中新取一个点 P1 作为长轴第一个候选端点,在 Ej 中新取一个点 P2 作为长轴第二个侯选端点。所有这样的P1、P2 组合,执行步骤 5-步骤 8。

步骤 5. 若 P1P2 连线 I 的长度大于事先确定的长 轴长度下限并满足性质 2,则进入步骤 6,否则返回 步骤 4。

步骤 6. 根据公式(1)~(3)算得椭圆除短轴长度以 外的 4 参数。

步骤 7. 对 E 中异于 P1、P2 且落在以 P1、P2 的 连线为直径的圆内的所有边点,运用公式(5)对短轴进 行累积。若累积结果超过事先设定的阈值,则输出该椭 圆的 5 个参数,并从 E的 8 子集中删除该椭圆上的点。

步骤 8. 返回步骤 4, 直至遍历完成。

#### 4.2 算法实现说明

根据数字图像的离散性特点,在应用性质2时, "梯度"和"垂直"都是离散意义下的"数字梯度" 和"数字垂直"。因此,在算法实现时,对"平行"或 "垂直"的判定应该在一定角度误差范围内进行。

#### 5 实验结果及分析

图 5(a)是用 SmartDraw 生成的简单合成图像, 图 6(a)是带背景的实际图像。表 1 以椭圆 5 参数的形

Research and Development 研究开发 81

式列出了本文算法检测结果,而图 5 和图 6 中的(b)图 是表 1 数据的图形表示(小十字标记检测到椭圆中心和 长轴端点),以直观反映误差程度。可见,本文设计的 算法对合成图像和实际图像都能得到满意的检测结果。



图 5 合成图像



图 6 实际图像 表 1 图 5 和图 6 的检测结果数据

罔佛	相同	Zą	yo	a	Ъ	α	
<b>E</b> 5	大 大	126	163	107	59	0.265	
	<b>#</b>	1 <b>89</b>	91.5	76	36	-0.781	
	ተ	<b>59.5</b>	60.5	39.5	20	0.013	
<b>E</b> 6	前轮	251	1 <b>76</b>	30.6	20	1.373	
	后轮	50.5	182	24.6	14	1.469	
	表 2	检测计	速度比	.较 <b>(</b> 单1	立:秒)		
	国律	a)		4	4		
	图 5	11.5	51	4.203	2.89	1	
	<b>6</b>	19.826		9.125	4.95	4.953	

表2给出了边点梯度信息精确程度及性质2的应用对检测算法的速度影响。t1 对应采用 ADM 边缘检测算子并应用性质2; t2 对应采用本文改进的边缘检测算子但未应用性质2; t3 对应既用本文改进的边缘检测算子又应用性质2。

事实上,采用 ADM 算子,边图 E 只能划分成 4 个子集  $E_i(i=1,2,3,4)$ ,每个子集中边点的个数记为  $n_{io}$ 根据性质 2,长轴两个的端点切向平行故应该属于同 一个  $E_i$ ,所以共有  $n_i(n_i-1)$ 种取法。本文改进后的边 缘检测算子,根据边点差分值的正负将边点方向增加 到 8 个,边图 E 也对应地划分成 8 个子集  $E_k(k=1,2,3,4)$ 与  $E_j(j=k+4)$ ,且有。再由性质 2,长 轴两端点切向平行但方向相反,故应各自在对偶子集  $E_k$ 和  $E_j(j=k+4)$ 中选取,因而共有  $n_kn_j \approx n_i/4$ 种取法,即  $t_1 \approx 4t_{3o}$ 

## 6 结论

通过长轴估计使椭圆检测的参数空间累积从 5 维 降到了 1 维,性质 2 的应用降低了长轴端点选择的组 合数,改进边缘检测算子解决了性质 2 在离散图像上 的有效应用问题。对于长轴信息相对完整的图像,本 文提出的算法具有较满意的椭圆检测效果。

#### 参考文献

- Yuen HK, Illingwoth J, Kitter J. Detecting partially occluded ellipses using the Hough transform. Image Vision and Computing, 1989,7(1):31 – 37.
- 2 Xu L, Oja E, Kultanen P. A new curve detection method: randomized Hough trans form(RHT). Pattern Recognition Letters, 1990,11(5):331 – 338.
- 3 Qiao Yu, Ong SH. Arc-based evaluation and detection of ellipse. Pattern Recognition, 2007,40(7):1990 – 2003.
- 4 Kwangsoo Hahn, Sungcheol Jung, Youngjoon Han, Hernsoo Hahn. A new algorithm for ellipse detection by curve segments. Pattern Recognition Letters, 2008,29(13):1836 – 1841.
- 5 Chunguang Cao, Timothy S. Newman, Glynn A. Germany. New shape-based auroral oval segmentation driven by LLS-RHT. Pattern Recognition, 2009,42(5): 607 618.
- 6 侯宇.基于 Hough 变换的图象检测对偶点法.中国图 像图形学报, 2001,6(8):746-749.
- 7 Alzahrani FM, Chen T. A real-time edge detector: Algorithm and VLSI architecture. Real-Time Imaging, 1997,3(5):363 – 378.