

改进空间型值点参数优化 NURBS 曲线曲面插值^①

Optimize Interpolation for NURBS Curve and Surface by Improved Space Parameter Values

郭伟青 (浙江工业大学之江学院 浙江 杭州 310024)

求 伟 盛 晨 (武警杭州指挥学院 浙江 杭州 310023)

摘要: 为了产生更光滑和光顺的物体形状, 本文对插值参数化过程进行了改进。首先利用有理 B 样条基函数的性质, 从 NURBS 曲线曲面插值的型值点参数方面介绍了传统方法, 通过参数的改进, 生成比传统方法更好的图形效果。在 NURBS 用于计算机辅助设计和制造的研究方面, 拓宽了思路。

关键词: NURBS 曲线曲面 插值 参数值 控制顶点 节点矢量

1 引言

在许多应用领域几何造型技术已经成为一项重要的工具, 例如在工业设计和制造、电子工业、生物医学等方面, 实物模型广泛被计算机模型所代替^[1]。计算机造型使得成本降低, 分析简单, 而且变化更加方便, 发展图形学技术的同时也加强了对数学理论方面的研究。非均匀有理 B 样条(Non-uniform rational B-splines NURBS)曲线和曲面使通用的自由造型技术表达更为容易, 利用 NURBS 的特性能设计出符合要求的几何图形, 正是因为它的这些性质, NURBS 在计算机辅助设计和制造中成为标准的设计工具^[2,3]。在工程设计中曲线曲面插值是一个最基本的操作, 用户指定一组数据点, 这些数据是期望得到的图形轮廓上的一些空间型值点, 系统能够产生的图形不仅仅经过给定的点, 而且要尽可能逼近原始图形轮廓。在设计过程中, 要多方面进行优化, 本文从空间型值点参数对生成图形的影响出发, 讨论了插值参数的改进。

2 NURBS 插值计算

为生成满足条件的图形, NURBS 曲线曲面插值需要进行以下几步的计算^[4]:

(1) 确定型值点参数 $t_0, \dots, t_n, g_0, \dots, g_m$;

(2) 选择节点矢量;

$\Lambda = \{0 = \dots = 0, u_{p,1}, \dots, u_n, 1 = \dots = 1\}$ $\Psi = \{0 = \dots = 0, v_{r,1}, \dots, v_n, 1 = \dots = 1\}$;

(3) 计算控制顶点 $P_{i,j}$;

(4) 绘制出初步的形状, 通过调整控制顶点, 得到符合要求的图形。

在曲线逼近过程中, NURBS 曲线只经过控制多边形的端点, 对于中间部分的点, 只能尽量逼近, 逼近结果的好坏, 与最初型值点 Q_k 的参数 t_k 的选择有关, 因此选择型值点的参数非常重要。为了确定型值点 Q_k 的参数 t_k , 常用的方法有以下几种^[5]:

I 均匀参数法

$$t_0 = 0, \quad t_n = 1, \quad t_i = \frac{i}{n} \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

II 累积弦长参数法

$$Q_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2}$$

$$d = \sum_{j=1}^n |Q_j - Q_{j-1}|$$

$$t_0 = 0, \quad t_n = 1, \quad t_i = t_{i-1} + \frac{|Q_i - Q_{i-1}|}{d}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

III 向心参数法

$$Q_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2}$$

$$t_0 = 0, \quad t_n = 1, \quad t_i = t_{i-1} + \frac{|Q_i - Q_{i-1}|^{1/2}}{\sum_{j=1}^n |Q_j - Q_{j-1}|^{1/2}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

① 基金项目 浙江省教育厅科研项目(20070313)

3 参数优化

按照以上方法产生的图形,虽然能够满足一般精度要求的工程,但要达到设计船体、飞机等高精度、较复杂的工程要求还是远远不够的。研究改进参数方法可以从矩阵性质出发,如果一个带状矩阵是斜对角元素优势阵,那么它的逆阵也是斜对角元素优势阵。在向心参数法的基础上,利用 NURBS 性质“在每个 NURBS 基函数对应的区域存在一个最大值”,对空间型值点参数优化,通过最大值相对应的参数值获得型值点参数,最后产生优化的图形 $t_{i,6}$ 。利用基函数最大值处的参数作为 R 的元素,就可以得到一个带状斜对角元素优势阵。例如,一个三次 NURBS 曲线的 R 矩阵中的元素采用了基函数最大值处的参数,它就类似于一个斜对角元素优势三角阵,而且,能保证获得的逆阵是斜对角元素优势阵。这样用 R 的逆阵反求出的控制顶点,能产生优化的曲线曲面。采用均匀节点矢量得到的逆阵,同样是斜对角元素优势阵。通过以上分析,利用参数优化方法计算得到的控制多边形,能够产生较好的拟合曲线曲面。具体型值点 Q_k 的参数 t_k 计算步骤如下:

第一步,利用向心参数法选择参数初值 \tilde{t}_k ,并利用

$$\tilde{u}_{p+i} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{i+p-1} \tilde{t}_k, \quad i=1,2,\dots,n-p \quad \text{或} \quad \tilde{u}_{p+i} = \frac{i}{n}, \quad i=1,2,\dots,n-p$$

计算出节点矢量;

第二步,令 R_i 为相对区间域内的最大基函数值,计算出 R_i ,并计算出相邻两个 R_{i-1} 和 R_i 的平方根 d_i ,即令 $d_i = |R_i - R_{i-1}|^{1/2}$;同时,求出平方根的和 D,

$$D = \sum_{i=1}^n d_i;$$

第三步,计算出 R_i 对应的改进参数 t_k ,不再使用第一步中的向心参数法的参数 \tilde{t}_k 。计算改进参数 t_k :

$$t_0 = 0, \quad t_n = 1, \quad t_i = t_{i-1} + \frac{d_i}{D}, \quad i=1,2,\dots,n-1;$$

确定了型值点的参数值 t_k 后,有许多方法选择节点矢量 Λ 和 Ψ ,可以用型值点参数来计算节点矢量:

$$u_{p+i} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{i+p-1} t_k, \quad i=1,2,\dots,n-p;$$

也可以采用均匀节点矢量 $u_{p+i} = \frac{i}{n}, i=1,2,\dots,n-p$,采用均匀节点矢量可以不受型值点参数的影响,减少计算量,提高效率。

4 执行结果

图 2 展示了相同条件下分别采用均匀参数法、累积弦长参数法、向心参数法和参数优化方法所产生的图形,其中,(a)(c)节点矢量采用 $u_{p+i} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{i+p-1} t_k, i=1,2,\dots,n-p$ 计算;(b)(d)节点矢量采用 $u_{p+i} = \frac{i}{n}, i=1,2,\dots,n-p$ 计算。从图中可以看出,均匀参数法插值出的曲线产生了拐点,累积弦长参数法插值出的曲线出现了打环,参数优化方法应用在比较离散的型值点上产生了相对光滑的曲线,虽然与向心参数法相比,变化不是很显著,但是它在节点矢量的选用上,采用了均匀节点矢量,使矢量不受型值点的影响,减少了计算量,而且,消除了拐点和打环现象。

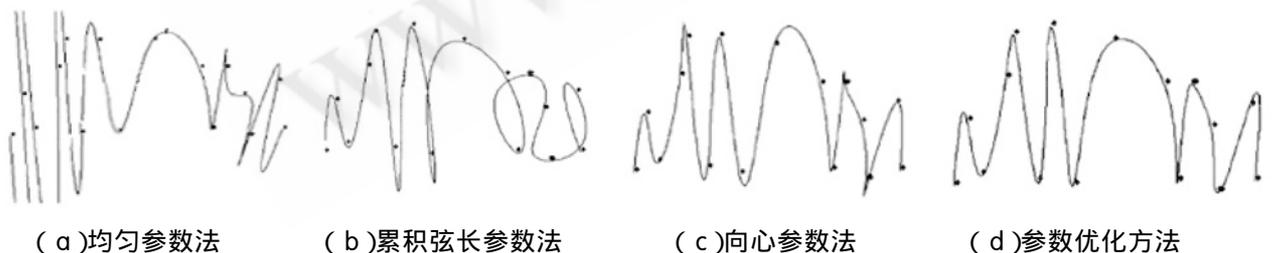


图 2 参数优化法与传统参数法生成曲线比较

图 3 展示了 3($p=2$)次、14($n=13$)个控制顶点 NURBS 曲线插值和逼近一组原始型值点,相同条件下

分别采用均匀参数法、累积弦长参数法、向心参数法和参数优化方法所产生的图形。从图中可以看出,参数

优化方法比传统的方法能够产生相对更光滑和光顺的曲线形状。表 1 是几种方法所产生曲线的精确度比较,所有的方法都能精确到十分位,参数优化方法的相

对误差要小一些。而且,它可采用均匀节点矢量,提高了计算速度。



(a)均匀参数法 (b)累积弦长参数法 (c)向心参数法 (d)参数优化方法

图 3 参数优化法与传统参数法生成曲线比较

表 1 参数优化法与传统参数法生成曲线精确度比较

方法	均匀参数法	累积弦长参数法	向心参数法	参数优化法
相对误差	0.8582	0.2046	0.2217	0.1536

图 4 为采用参数优化重构的曲面。

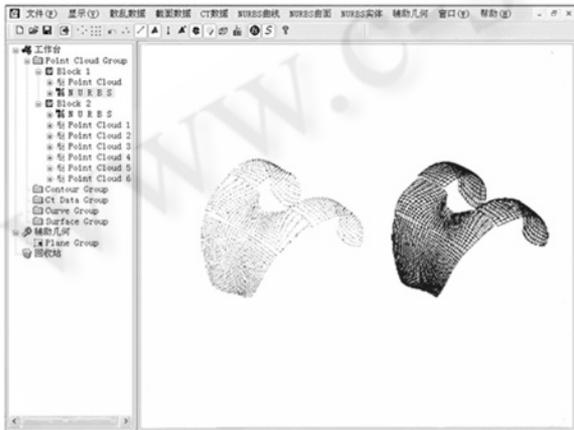


图 4 曲面重构示例

去探索。在实际的设计曲线曲面过程中,可以通过综合运用不同的方法、途径以达到理想的图形效果。

参考文献

- 1 朱心雄.自由曲线曲面造型技术.北京:科学出版社出版,2000.
- 2 Les Piegl. On NURBS: A Survey. IEEE, Computer Graphics and Applications. 1991,10(1):55-71.
- 3 Les Piegl, Wayne Tiller. Approximating Surfaces of Revolution by Nonrational B-Splines. IEEE Computer Graphics and Applications. May/June 2003, 46-52.
- 4 Erkan ? lker, Ahmet Arslan. The Calculation of Parametric NURBS Surface Interval Values Using Neural Networks. 2006,2:247-254.
- 5 Pifu Zhang, Fuhua(Frank) Cheng, Smooth Trimmed NURBS Surface Connection with Tension Control. IEEE Proceedings of the Geometric Modeling and Processing, 2004.
- 6 Ang Swee Wen, Siti Mariyam Hj, Shamsuddin, Yahya Samian. Ship Hull Fitting Using NURBS. IEEE Proceedings of the Computer Graphics, Imaging and Vision: New Trends, 2005.

5 结论

研究曲线曲面插值和逼近,是要不断提高曲线曲面逼近的质量,生成符合要求的曲线曲面。本文分析的 NURBS 参数改进插值的方法,关键在于使型值点参数取值更为合理,可以看到选择不同的参数,曲线形状逼近好坏也各有不同。本文所述方法优于传统方法之处在于:可以不受型值点分布的限制,自由选择节点矢量,在仿射变换中,数据具有不变性,允许存在重型值点现象。在 NURBS 曲线曲面的插值和逼近研究领域,为了能够产生更光滑光顺的物体形状,除了改进参数方法外,还存在很大的研究空间,仍有许多内容需要