

基于 KPCA 和投影字典对学习的人脸识别算法^①

邓道举, 李秀梅

(杭州师范大学 信息科学与工程学院, 杭州 311121)

摘要: 相比基于稀疏约束的字典学习算法和识别方法, 投影字典对学习 (projective Dictionary Pair Learning, DPL) 具有更快的学习速度和更高的识别率. 为了进一步提高 DPL 的识别能力, 本文提出了改进 DPL 算法 K-DPL, 即将核主成分分析 KPCA 与 DPL 相结合的识别方法. 在 K-DPL 算法中, 利用核方法, 将样本映射到高维空间以解决非线性问题, 再进行 DPL 训练, 得到更具判别性的字典. ORL 库上实验表明, 不同训练比下 K-DPL 相比 DPL 识别率至少提高了 1.5% 且识别速度提高了约 20 倍. 在扩展 YaleB 和 AR 库上, K-DPL 相比 DPL 识别率分别提高 0.3% 和 0.4%, 且识别速度有所提高, 表明 K-DPL 对光照和遮挡具有较好的鲁棒性.

关键词: 投影字典对学习; 核主成分分析; K-DPL

引用格式: 邓道举, 李秀梅. 基于 KPCA 和投影字典对学习的人脸识别算法. 计算机系统应用, 2018, 27(5): 145-150. <http://www.c-s-a.org.cn/1003-3254/6348.html>

Face Recognition Algorithm Based on KPCA and Projective Dictionary Pair Learning

DENG Dao-Ju, LI Xiu-Mei

(School of Information Science and Engineering, Hangzhou Normal University, Hangzhou 311121, China)

Abstract: Compared with the dictionary learning and recognition method based on sparse constraints, the projective Dictionary Pair Learning (DPL) has faster learning speed and a higher recognition rate. In order to further improve the recognition ability of DPL, this study proposes an improved DPL algorithm K-DPL, which combines Kernel Principal Component Analysis (KPCA) and DPL method. In K-DPL, by using the kernel technique, the samples are mapped to high-dimensional space to solve the nonlinear problem, and then DPL is used to get more discriminant dictionary by training the dictionary. Experiments on ORL datasets show that recognition rate is increased by at least 1.5% and the recognition speed is increased by about 20 times compared to DPL at different training ratios by using K-DPL. On the extended YaleB and AR datasets, compared with DPL, the recognition rate is increased by 0.3% and 0.4% respectively, and the recognition speed is improved by using K-DPL as well. It indicates that K-DPL has good robustness to illumination and occlusion.

Key words: projective dictionary pair learning; Kernel principal component analysis; K-DPL

当前, 稀疏表达理论在图像识别中越来越受到人们关注^[1,2]. 2009 年, Wright 等人提出了基于稀疏表达分类 SRC 的人脸识别方法^[3], 稀疏表达是利用字典中的原子线性表示信号的一种方法, 它通过稀疏编码和重构分类两步来解决识别问题. 2013 年, 张磊等人提出

了基于联合表达分类 CRC 的识别方法^[4]. 研究指出, 在 SRC 方法中对识别率的贡献起到关键性作用的并非求稀疏约束的 L1 范数最小化算法, 而是联合表达. 在保证识别率的前提下, 为了提高识别速度, 引入了正则化最小二乘法替代原 SRC 方法中的 L1 范数最小化

^① 基金项目: 国家自然科学基金 (61571174); 浙江省自然科学基金 (LY15F010010)

收稿时间: 2017-08-22; 修改时间: 2017-09-12; 采用时间: 2017-09-22; csa 在线出版时间: 2018-04-23

算法. 其中, 字典在稀疏表达和联合表达中具有重要作用, 分析字典^[5]和综合字典^[5]是最常用的字典. 分析字典能快速实现稀疏编码, 但不能有效表达复杂的局部信息. 综合字典能有效表达复杂局部信息, 实现完美重构, 但稀疏编码速度较慢.

字典学习是设计或构造字典^[6,7]的一种重要方法. 常用的字典学习算法有最优方向法、K-SVD 算法等^[8]. Yang 等人提出了 Metaface 字典学习算法 MFL^[9]和线性判别字典学习算法 FDDL^[10], MFL 和 FDDL 算法与 K-SVD 相比具有更强的表达能力. 然而, MFL 算法和 FDDL 算法利用综合字典学习速度慢, 不能实现大样本快速识别任务.

主成分分析 PCA^[11]在数据分析和模式识别中, 通过计算数据的协方差矩阵来处理数据, 而协方差矩阵属于二阶统计特性, 并未涉及到高阶统计特性, 因此做 PCA 变换后数据还会有高阶冗余信息存在. 此外, PCA 只分析了数据间相关性, 未对非相关性做分析. 因此, PCA 一般适用于线性数据和线性可分情况, 而对于非线性数据和线性不可分问题, PCA 往往满足不了解决问题的需要. 为了解决非线性问题, A Smola 等人提出了核主成分分析 KPCA 算法^[12], 运用核方法, 通过非线性映射将数据变换到某个高维特征空间后再做 PCA 分析.

本文提出了一种基于 KPCA 与 DPL 相结合的字典学习算法, 即 K-DPL 算法. 该算法利用核技术, 将数据样本映射到高维空间 (特征空间) 以解决非线性问题, 再进行 DPL 训练, 得到更具有判别性的字典以提高识别率和识别速度. 最后针对 ORL、扩展 YaleB、AR 人脸库, 对本文提出的识别方法进行性能分析与比较.

本文的其它部分安排如下: 第 1 节介绍了 KPCA 算法的主要实现过程和流形学习方法, 第 2 节介绍了传统字典学习模型与投影字典对学习 DPL 算法, 第 3 节提出了将 KPCA 与 DPL 相结合的 K-DPL 算法, 并介绍了及其实现步骤, 第 4 节设计实验进行了仿真验证, 第 5 节进行了总结.

1 KPCA 算法

1.1 KPCA 算法的主要过程

在人脸识别中, 假设: 每张人脸图像是大小为

$m \times m$ 的灰度矩阵, 样本数为 N . 将每张人脸图像按列首尾连接拉成维数为 d 的列向量, 则整个样本集 X 表示为 $X = [x_1, x_2, \dots, x_N]$, 大小为 $d \times N$, 其中第 i 张人脸图像记为 $x_i, i = 1, 2, \dots, N$.

定义一个映射 $\Phi: X^d \rightarrow F^D$, 其中, $D \gg d$, 将样本映射到维数为 D 的高维空间 F^D 中. 将人脸图像映射到该空间, 得中心化后的样本数据 $\Phi(x_1), \Phi(x_2), \dots, \Phi(x_N)$, 满足 $\sum_{i=1}^N \Phi(x_i) = 0$. 设 C 表示中心化的样本数据协方差矩阵, 那么, $C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi(x_i) \Phi(x_i)^T$, 从而得式 (1):

$$C v_k = \lambda_k v_k, \quad k = 1, 2, \dots, D \quad (1)$$

其中, λ_k, v_k 分别表示 C 的特征值和对应的特征向量, 并且可以证明: 任意一个特征向量 v_k 均可由 $\Phi(x_1), \Phi(x_2), \dots, \Phi(x_N)$ 张成的空间线性表示, 即, 存在常系数 $\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{kN}$ 满足式 (2):

$$v_k = \sum_{i=1}^N \alpha_{ki} \Phi(x_i) \quad (2)$$

将式 (1) 等号两边同时左乘 $\Phi(x_j)^T$, 将式 (2) 带入 (1) 中, 得式 (3):

$$\Phi(x_j)^T \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi(x_i) \Phi(x_i)^T = \lambda_k \Phi(x_j)^T \sum_{i=1}^N \alpha_{ki} \Phi(x_i) \quad (3)$$

将等式 (3) 两边同时进行化简, 得式 (4):

$$K \alpha_k = N \lambda_k \alpha_k = \lambda_k' \alpha_k \quad (4)$$

其中, $K = (\Phi(x_i)^T \Phi(x_j))_{N \times N}$ 表示中心化的核矩阵, 也称为核函数, $\alpha_k = (\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{kN})^T$ 表示核函数 K 的第 k 个特征向量, $\lambda_k' = N \lambda_k$ 表示 K 的特征值.

最后, 根据 K 与 C 的特征值和特征向量关系式 (5):

$$\lambda_k = \frac{\lambda_k'}{N}, \quad v_k = \Phi \alpha_k \quad (5)$$

即可求出 C 的特征值和特征向量.

1.2 核函数类型

根据核函数的性质, 可以划分为如下 4 种常用类型:

(1) 线性核函数:

$$K(x, x_i) = \mu \cdot x \cdot x_i \quad (6)$$

(2) 高斯核函数:

$$K(x, x_i) = \exp\left(-\frac{\|x - x_i\|}{\sigma^2}\right) \quad (7)$$

(3) 多项式核函数:

$$K(x, x_i) = [(x \cdot x_i) + 1]^p \quad (8)$$

(4) Sigmoid 核函数:

$$K(x, x_i) = \tanh[\gamma(x \cdot x_i) + c] \quad (9)$$

其中, $\mu, \sigma, p, \gamma, c$ 为各核函数对应的参数, 可以根据不同的问题和数据选择上述核函数并调整这些参数, 从而在模式识别等问题中达到最佳的模型. 具体核函数及参数的选择往往依据多次实验的效果来确定和调整. 针对后文提出的算法, 为了达到最佳识别表现, 实验时本文将分别选择线性核、高斯核与多项式核作为核函数.

1.3 流形学习

KPCA 是将低维空间数据映射到高维空间后进行 PCA 降维的特征提取方法. 它能够提取出一些线性不可分的信息, 便于后续的分类. 流形学习^[13,14]也是特征降维的一类方法, 它将高维的数据映射到低维, 使该低维的数据能够反映原高维数据的某些本质结构特征, 这些高维数据实际上是一种低维的流形结构嵌入在高维空间中. 它分为线性和非线性两种. 其中, 线性流形学习包括 PCA 与多维尺度变换 MDS^[15]. 与 KPCA 的作用类似, 非线性流形学习也属于非线性降维方式, 其代表性方法有局部线性嵌入 LLE^[16]、等距映射 Isomap^[17]、拉普拉斯特征映射 LE^[18]等. 上述方法在运用中已经取得了一些不错的效果. 然而, 在人脸识别中还存在许多方法不收敛、采样密度与采样方式选择以及降低维数不确定等问题, 这些问题都会对最终的识别准确性和识别速度产生较大影响.

2 投影字典对学习算法

2.1 传统字典学习模型

传统的字典学习算法是运用稀疏表达对完备字典学习一个综合字典, 而稀疏表达涉及稀疏系数或稀疏矩阵的求解. 其模型描述如下.

假设有 K 类训练样本, 每个样本的维数为 d , 整个训练样本集 $X = [X_1, \dots, X_i, \dots, X_K]$, 其中, $X_i \in R^{d \times n}$ 表示第 i 类训练样本子集, n 为每类样本数. 则大多数传统字典模型框架为:

$$\min_{D, A} \|X - DA\|_F^2 + \lambda \|A\|_d + \Psi(D, A, Y) \quad (10)$$

其中, $\lambda \geq 0$ 为标量, Y 为样本集 X 的类别标签矩阵, D 为待学习的综合字典, A 为 X 通过 D 表达的编码稀疏矩阵.

然而, 利用 L0 或 L1 范数最小化求解具有判别性的编码稀疏矩阵 A 的方法的时间代价很高, 在识别问

题中, 不能满足快速识别的要求. 针对这一问题, Gu 等人提出了一种新的字典学习模型——投影字典对学习 DPL^[19].

2.2 投影字典对学习 DPL

假设可以找到某个分析字典 $Q \in R^{m \times d}$, 使得编码 A 可通过 $A = QX$ 分析得到, 那么, X 的表达会变得非常高效. 基于这一思想, 通过同时学习分析字典 Q 和综合字典 D , 得到 DPL 的模型如下^[19]:

$$\{Q^*, D^*\} = \arg \min_{Q, D} \|X - DQX\|_F^2 + \Psi(D, Q, X, Y) \quad (11)$$

其中, $\Psi(D, Q, X, Y)$ 代表某种判定函数. 分析字典 Q 和综合字典 D 构成一个字典对, X 的分析编码是利用分析字典 Q 完成, X 的重建是利用综合字典 D 实现. 另外, $\Psi(D, Q, X, Y)$ 设计的好坏对 DPL 判别性能影响较大. 学习一个分析字典 $Q = [Q_1; \dots; Q_k; \dots; Q_K]$, $Q_k \in R^{m \times d}$, 综合字典 $D = [D_1, \dots, D_k, \dots, D_K]$, $D_k \in R^{d \times m}$, m 表示子综合字典 D_k 中原子个数, Q_k 和 D_k 构成一组第 k 类的字典对. DPL 的模型可以转化为^[19]:

$$\{Q^*, A^*, D^*\} = \arg \min_{Q, A, D} \sum_{k=1}^K \|X_i - D_k A_k\|_F^2 + \tau \|Q_k X_k - A_k\|_F^2 + \lambda \|Q_k X_k\|_F^2, \quad \text{s.t. } \|d_i\|_2 \leq 1 \quad (12)$$

其中, $\tau, \lambda (\lambda > 0)$ 为标量, X_k' 为整个训练集 X 中去除 X_k 后部分, d_i 为综合字典 D 的第 i 个原子.

3 基于 KPCA 的投影字典对学习算法 K-DPL

由 KPCA 算法的原理可知, KPCA 算法首先通过非线性映射将线性不可分的样本投影到某个高维空间, 使得样本线性可分, 然后再对该空间内的样本进行 PCA 分析. 而人脸图像的某些信息是线性不可分的, 比如某些局部纹理信息. 通常, 提取到的信息越好往往越有利于后续的分类工作. 因此, 单纯地利用 PCA 来对人脸图像分析往往未能对图像的线性不可分类的信息进行分析, 从而影响识别效果. 而 DPL 算法打破了传统字典学习算法对稀疏表达的依赖, 不仅提高了识别率, 识别速度更是大幅提升. 基于这两方面, 为了进一步提高 DPL 的识别性能, 本文提出了一种将 KPCA 与 DPL 相结合的算法, 即 K-DPL.

3.1 K-DPL 算法

算法. K-DPL 算法

输入: 对训练人脸样本进行 KPCA 特征提取, 得到降维后的 K 类训练样本 $X=[X_1, X_2, \dots, X_K]$, 选择测试人脸样本 y , 分别设定参数 λ, τ, m, γ

输出: 分析字典 Q , 综合字典 D

① 固定 Q 和 D , 更新 A :

$$A^* = \arg \min_A \sum_{k=1}^K \|X_k - D_k A_k\|_F^2 + \tau \|Q_k X_k - A_k\|_F^2 \quad (13)$$

可将上式最小二乘问题转化为下式求解:

$$A_k^* = (D_k^T D_k + \tau I)^{-1} (\tau Q_k X_k + D_k^T X_k) \quad (14)$$

② 固定 A , 更新 Q 和 D :

$$Q^* = \arg \min_Q \sum_{k=1}^K \tau \|Q_k X_k - A_k\|_F^2 + \lambda \|Q_k X_k'\|_F^2 \quad (15)$$

$$D^* = \arg \min_D \sum_{k=1}^K \|X_k - D_k A_k\|_F^2, \text{ s.t. } \|d_i\|_2 \leq 1 \quad (16)$$

Q 的解可通过下式获得:

$$Q_k^* = \tau A_k X_k^T (\tau X_k X_k^T + \lambda X_k' X_k'^T + \gamma I)^{-1} \quad (17)$$

其中, γ 为一个很小的常数.

从第 1 类到第 K 类, 利用式 (14)、(17)、(16) 分别更新 $A_k^{(i)}$ 、 $Q_k^{(i)}$ 、 $D_k^{(i)}$.

③ 判定: $\text{identity}(y) = \arg \min_i \|y - D_i Q_i\|_2$, 当相邻两次迭代结果差值小于某个阈值, 则循环结束, 输出判定结果; 反之, $t=t+1$, 返回上一步.

4 实验

本实验分为三部分: 第一部分是将 DPL 算法与 MFL、SRC、CRC、FDDL 算法进行比较, 验证 DPL 的有效性和优越性; 第二部分是将本文提出的 K-DPL 与 DPL、PCA 降维后的 DPL 进行比较, 分析 K-DPL 的识别性能; 第三部分是验证 K-DPL 对有光照变化和遮挡的人脸识别的有效性. 第一、二部分在 ORL 人脸库上测试. 第一部分实验选择每一类样本中前 5 个人脸图片作为训练样本, 后 5 个人脸图片作为测试样本. 第二部分实验分别设置训练比例为 0.1、0.3、0.5、0.7 进行实验. 第三部分在扩展 YaleB 人脸库和 AR 人脸库上测试. 实验环境为: Matlab 2015b, Intel i3-2350M 2.30 GHz, 6 G 内存.

ORL 人脸库中共有 40 个人的正面照, 每个人有 10 张大小均为 112×92 像素的灰度图片, 每张图片的主要区别在于表情和姿势的变化. ORL 人脸库的部分图像如图 1 所示.

扩展 YaleB 人脸库中共有 38 个人的正面照, 包含 9 种姿势下的 64 种不同光照变化. 扩展 YaleB 人脸库的部分图像如图 2 所示.



图 1 ORL 人脸库部分图像

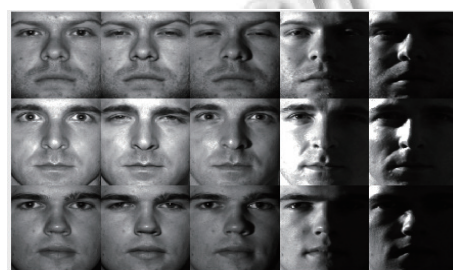


图 2 扩展 YaleB 人脸库部分图像

AR 人脸库中共有 126 个人的正面照, 总计有 4000 张. 选取其中 50 名男性, 50 名女性作为样本. 每人有 26 张大小均为 165×120 像素的灰度图片, 每张图片的主要区别在于光照变化、墨镜和围巾遮挡. AR 人脸库的部分图像如图 3 所示.



图 3 AR 人脸库部分图像

4.1 DPL 与 MFL、SRC、CRC、FDDL 算法比较

本实验首先将 ORL 人脸库中每张训练样本和测试样本照片按照像素拉成 10304×1 的向量, 然后下采样至 1024×1 的列向量, 得到处理后的训练样本和测试样本进行实验分析. 为了达到最好的识别效果, 实验参数设置为: $\tau = 0.05, \lambda = 0.003, \gamma = 0.0001, m = 5$. 迭代次数为 20 次. 为了降低识别引入的误差, 每组实验进行 5 次实验, 取其平均识别率和时间. 实验结果如表 1 所示.

表1 在 ORL 库上的识别结果比较

算法	识别率(%)	训练耗时(s)	测试耗时(s)
MFL	95.5	15.589	91.903
SRC	95	0	2.555
CRC	91.5	0	0.443
FDDL	94	192.715	291.002
DPL	95.5	11.280	0.078

由表1可知,在 ORL 库上,DPL 算法实现人脸识别相比表中其他算法的识别率具有很大竞争力,而且,相比 MFL、FDDL 等利用稀疏编码求解训练字典的算法,DPL 具有训练速度快,测试耗时短的优点。

4.2 K-DPL 算法与 DPL、P-DPL 比对

4.2.1 ORL 人脸库上的实验与分析

为了提高 DPL 算法的识别率和识别速度,验证本文提出的 K-DPL 算法的有效性和优越性,将 K-DPL 与 DPL、PCA 降维后的 DPL 进行比较,分别在训练比例为 0.1、0.3、0.5、0.7 的 ORL 人脸库上进行,表示为: ORL(1)、ORL(3)、ORL(5)、ORL(7),其中括号里的数表示训练样本数。每种训练比例下均进行 5 次实验取平均识别率和识别时间。这里 K-DPL 算法的核函数选择线性核函数,而将 PCA 降维后的 DPL 表示为 P-DPL。实验参数设置为: $\tau = 0.05$, $\lambda = 0.003$, $\gamma = 0.0001$, m 取每个库的训练样本数。ORL(1) 库上核函数选择的是线性核函数,核函数的参数 $\mu = 2$ 。其他库上核函数选择多项式核函数,核函数的参数 $\mu = 2.4$ 。迭代次数在 ORL(1)、ORL(3)、ORL(5)、ORL(7) 库上分别为 8、4、3、2。实验所得识别率如表 2 所示。

表2 不同训练比例下识别率(%)

Datasets(#Tr)	DPL	P-DPL	K-DPL
ORL(1)	64.4	65	66.1
ORL(3)	90	91.4	92.1
ORL(5)	95.5	96.5	97
ORL(7)	96.7	97.5	98.3

识别所需训练时间和测试时间分别如表 3。

表3 不同训练比例下训练时间和测试时间比较(s)

时间	Datasets(#Tr)	DPL	P-DPL	K-DPL
训练时间	ORL(1)	6.676	0.232	0.210
	ORL(3)	7.304	0.256	0.251
	ORL(5)	7.654	0.367	0.246
	ORL(7)	7.952	0.179	0.203
测试时间	ORL(1)	0.152	0.003	0.003
	ORL(3)	0.098	0.006	0.006
	ORL(5)	0.072	0.008	0.004
	ORL(7)	0.040	0.003	0.003

由表 3 可知,本文提出的 K-DPL 算法训练和测试的速度比 DPL 算法的大约快 20 倍,和 P-DPL 相当。而在不同训练比例下,K-DPL 的识别率均高于 DPL 和 P-DPL。因此,本文提出的 K-DPL 算法进一步提升了 DPL 算法的识别速度和识别率。训练字典的效果如图 4 所示。

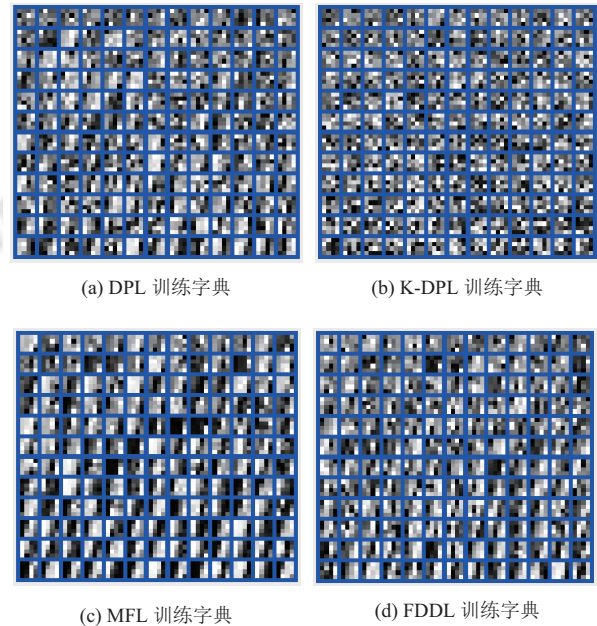


图4 训练字典的效果图

4.3 扩展 YaleB 和 AR 人脸库上的实验与分析

实验所用扩展 YaleB 人脸库大小为 504×2414 , 整个训练样本大小为 504×1216 , 整个测试样本大小为 504×1198 。这里所用扩展 YaleB 人脸库为 Jiang 博士所提供, 下载网址为: <http://www.umiacs.umd.edu/~zhuolin/projectlksvd.html>。实验中, 设置参数如下: $\tau = 0.05$, $\lambda = 0.003$, $\gamma = 0.0001$, $m = 15$ 。核函数选择的是高斯核函数, 核函数的参数设置为 $\sigma = 2$ 。迭代次数为 20。AR 人脸库上的实验, 首先将 AR 库裁剪为大小 504×2600 样本数据, 再将其分为训练和测试两部分。其中每类训练样本 20 个, 测试样本 6 个。整个训练样本大小为 504×2000 , 整个测试样本大小为 504×600 , 实验参数设置为: $\tau = 0.05$, $\lambda = 0.005$, $\gamma = 0.001$, $m = 20$ 。核函数选择的是高斯核函数, 核函数的参数设置为 $\sigma = 2$ 。迭代次数为 20。得到每种算法的最高识别率, 实验结果如表 4 和表 5 所示。

从表 4 和表 5 可见, 在扩展 YaleB 人脸库上, 本文

提出的 K-DPL 算法相比 DPL 算法提高了 0.3%，识别速度较 DPL、P-DPL 更有竞争力；而在 AR 人脸库上，K-DPL 算法相比 DPL 提高了 0.4%，识别速度介于 DPL 和 P-DPL 之间。综合来看，本文提出的 K-DPL 算法能够对有光照变化和遮挡的人脸进行有效识别，且相比 DPL 算法具有更强的识别能力。

表 4 在扩展 YaleB 库上的识别结果比较

算法	识别率(%)	训练耗时(s)	测试耗时(s)
DPL	97.5	5.240	0.249
P-DPL	97.7	4.748	0.226
K-DPL	97.8	4.272	0.204

表 5 在 AR 库上的识别结果比较

算法	识别率(%)	训练耗时(s)	测试耗时(s)
DPL	98.3	20.638	0.506
P-DPL	98.3	11.850	0.297
K-DPL	98.7	17.210	0.456

5 结论

本文比较了 DPL 算法与 MFL、SRC、CRC、FDDL 等算法的性能，并提出了一种改进投影字典对学习算法 K-DPL，将 KPCA 与 DPL 相结合，从而取得了比 DPL 算法更好的识别性能。并在 ORL 人脸库、扩展 YaleB 人脸库、AR 人脸库上验证了 K-DPL 算法的优越性。实验结果表明，K-DPL 算法在样本数据量较小的 ORL 人脸库上的识别速度提高了约 20 倍，识别率也得到较好地提高；而在对有光照变化和遮挡的人脸库上，K-DPL 相比 DPL 表现出更高的识别率，且具有更快的识别速度，对光照和遮挡具有较强的鲁棒性。

参考文献

- 杨荣根, 任明武, 杨静宇. 基于稀疏表示的人脸识别方法. 计算机科学, 2010, 37(9): 267–269, 278.
- 邓承志. 图像稀疏表示理论及其应用研究[博士学位论文]. 长沙: 华中科技大学, 2008.
- Wright J, Yang AY, Ganesh A, *et al.* Robust face recognition via sparse representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2009, 31(2): 210–227. [doi: 10.1109/TPAMI.2008.79]
- Zhang L, Yang M, Feng XC. Sparse representation or collaborative representation: Which helps face recognition? *Proceedings of 2011 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*. Barcelona, Spain. 2011. 471–478.
- 练秋生, 石保顺, 陈书贞. 字典学习模型、算法及其应用研究进展. *自动化学报*, 2015, 41(2): 240–260.
- Pham DS, Venkatesh S. Joint learning and dictionary construction for pattern recognition. *Proceedings of 2008 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. Anchorage, AK, USA. 2008. 1–8.
- Dorr BJ. Large-scale dictionary construction for foreign language tutoring and interlingual machine translation. *Machine Translation*, 1997, 12(4): 271–322. [doi: 10.1023/A:1007965530302]
- Aharon M, Elad M, Bruckstein A. rmK-SVD: An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(11): 4311–4322. [doi: 10.1109/TSP.2006.881199]
- Yang M, Zhang L, Yang J, *et al.* Metaface learning for sparse representation based face recognition. *Proceedings of the 17th International Conference on Image Processing (ICIP)*. Hong Kong, China. 2010. 1601–1604.
- Yang M, Zhang L, Feng XC, *et al.* Fisher discrimination dictionary learning for sparse representation. *Proceedings of 2011 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*. Barcelona, Spain. 2011. 543–550.
- Turk M, Pentland A. Eigenfaces for recognition. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 1991, 3(1): 71–86. [doi: 10.1162/jocn.1991.3.1.71]
- Schölkopf B, Smola A J, Müller KR, *et al.* Kernel principal component analysis. *Proceedings of the 7th International Conference on Artificial Neural Networks*. Lausanne, Switzerland. 1997. 583–588.
- 徐蓉, 姜峰, 姚鸿勋. 流形学习概述. *智能系统学报*, 2006, 1(1): 44–51.
- Ding M, Fan GL. Multilayer joint gait-pose manifolds for human gait motion modeling. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2015, 45(11): 2413–2424. [doi: 10.1109/TCYB.2014.2373393]
- Kruskal JB. Nonmetric multidimensional scaling: A numerical method. *Psychometrika*, 1964, 29(2): 115–129. [doi: 10.1007/BF02289694]
- Roweis ST, Saul LK. Nonlinear dimensionality reduction by locally linear embedding. *Science*, 2000, 290(5500): 2323–2326. [doi: 10.1126/science.290.5500.2323]
- Tenenbaum JB, de Silva V, Langford JC. A global geometric framework for nonlinear dimensionality reduction. *Science*, 2000, 290(5500): 2319–2323. [doi: 10.1126/science.290.5500.2319]
- Belkin M, Niyogi P. Laplacian eigenmaps for dimensionality reduction and data representation. *Neural Computation*, 2003, 15(6): 1373–1396. [doi: 10.1162/089976603321780317]
- Gu SH, Zhang L, Zou WM, *et al.* Projective dictionary pair learning for pattern classification. *Proceedings of the 27th International Conference on Neural Information Processing Systems*. Montreal, Canada. 2014. 793–801.