半图的计数①

王庆亮，孔祥智，袁志玲

(江南大学 理学院，无锡 214122)

摘 要: 顶点标记半图是用 n 个不同符号标记的半图 G. 通过分析得出只包含不相邻边的顶点标记半图的计数和包含两个相邻 S 边的顶点标记半图的数目的计算的多种结果. 同时也计算了包含 1 到 8 个顶点的顶点标记半图的数目.

关键词: 半图; 顶点标记半图; 顶点标记半图的计数

On Enumeration of Some Semigraphs

WANG Qing-Liang, KONG Xiang-Zhi, YUAN Zhi-Ling

(School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract: A vertex-labeled semigraph is a semigraph whose n-vertices are labeled by distinct symbols. Various results on enumeration of vertex-labeled semigraphs containing non-adjacent edges and the number of vertex-labeled semigraphs with two adjacent s-edges are obtained. Also the number of vertex-labeled semigraphs from 1 to 8 vertices is calculated.

Key words: semigraph; vertex-labeled semigraph; enumeration of vertex-labeled semigraphs

半图是 E.Sampatkumar[1]提出的由图[2]推广而来的离散结构. 半图的很多概念是图论里的概念的推广. 在半图里，每条边是 n(n≥2)元的，并且任意两条边只能有一个公共点. 因此很多化学结构和半图类似，文献[3,4,5]的作者已经深入地研究了半图，Kamath 和 S.Hebbar[6]已经给出了支配图理论，他们深入地研究了支配临界半图. Venkatakrishnan[7]等人研究了二分半图理论，他们给出了二分半图的超支配概念.

图论最重要的领域之一就是计数，它是 Arthur Cayley 开创性的工作所取得的成果. 图计数已被广泛地应用于化学、物理学、生物学、信息论等领域[8-10]. 半图作为图的推广，半图的计数在上述领域也同样有应用价值，如路径算法[11]，基因组的中关联核苷酸的个数[12]等.

1 预备知识

首先我们给出本文所需的一些基本定义. 对于未给出的定义，读者可以参考[1].

定义 1[1]. 半图 G 是一个二元组 (V, E), 其中 V 是有 n 个元素的非空集合, V 中的元素称为 G 的顶点，集合 E 的元素是若干个连续相邻顶点组成的集合，称为 G 的边. 对于任意的 $n\geq 2$, 若 G 的边有如下性质:

SG1: 任意两个边最多只有一个公共点.

SG2: 两条边 $(u_1;u_2;\ldots u_n)$ 和 $(v_1;v_2;\ldots v_m)$ 相同当且仅当满足下列条件

i) $m=n$ 且

ii) $u_i=v_i$ 或 $u_i=v_{n-i+1}$ i=1,2,3,…n.

因此边 $(u_1;u_2;\ldots u_n)$ 和 $(u_n;u_{n-1};\ldots u_1)$ 是等价的.

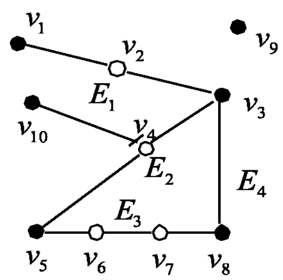

图 1 半图 G

① 基金项目:国家自然科学基金(11371174,11301227);江苏省自然科学基金(BK20130119)
收稿时间:2016-01-26;收到修改稿时间:2016-04-08 [doi: 10.15888/j.cnki.csa.005410]

© 中国科学院软件研究所 http://www.c-s-a.org.cn

设 G=(V, E)是半图且 $e=(v_1;v_2;...v_{n-1};v_n)$ 是 G 的边. 点 v_1 和 v_n 称为 e 的端点, 用实心点表示, 点 $v_2,...,v_{n-1}$ 称为 e 的中间点, 用空心圆表示. 如果 G 的一个点 v 是一个边的端点同时又是另一个边的中间点, 则称点 v 为中-端点, 用一个空心圆圈和它的切线表示.

例 1. 设 G=(V, E) 是一个半图 (图 1), $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10}\}, E=\{(v_1,v_2,v_3),(v_3,v_4,v_5),(v_5,v_6,v_7,v_8),(v_8,v_3),(v_4,v_{10})\}$, v_1,v_3,v_5,v_8,v_{10} 为端点, v_2,v_6,v_7 为中间点, v_4 为中-端点, v_5 为孤立顶点.

定义 2[1]. 如果半图 G 的两个顶点属于同一个边, 则称这两个顶点是相邻的, 如果这两个点的序号是连续的, 则称这两个点是连续相邻的. 例如在图 1 中, v_5 和 v_7 是相邻的顶点, v_6 和 v_7 是连续相邻的顶点.

定义 3[1]. 如果半图中两个边有一个公共点, 则称这两个边是相邻的. 例如图 1 中, 边 e_1 和边 e_2 是相邻的, 边 e_1 和边 e_3 是不相邻的.

定义 4[1]. 在半图中如果一个边包含 k 个顶点, 则称这个边的基数为 k.

定义 5[1]. 如果半图 G 中一个边的基数 $k\geq 3$, 则称这个边是 S 边.

定义 6[1]. 如果半图 G 中的所有顶点用不同的符号标记, 例如 $v_1;v_2;...;v_{n-1};v_n$, 则称 G 为顶点标记半图.

2 主要结果与证明

接下来我们将得到包含不相邻 S 边的半图计数的各种结论.

注:在下面的定理中, 当 $r>n$ 时, $\binom{n}{r}$ 值为 0.

定理 1. 只含有一个基数为 k 的 S 边的 n 元(n 个不同符号标记)顶点标记半图的个数是 $\binom{n}{r}\frac{k!}{2}$.

证明: 考虑到 n 元半图只含有一个基数为 $k(3\leq k\leq n)$ 的 S 边, 因此还有其余顶点的话, 它们是孤立点.

因此, 可以从 n 个符号中选 k 个来标记 S 边的 k 个顶点, 剩下的 n-k 个符号用来标记其余顶点. 这样有 $\binom{n}{k}$ 个选法.

由于半图里的边是对称的, 选出的 k 个符号可以给出 $\frac{k!}{2}$ 个不同标记 S 边的方法. 在半图里, 标记孤立点的符号的排列是没有区别的.

因此, 只含一个基数为 $k(3\leq k\leq n)$ 的 S 边的顶点标记半图的个数是 $\binom{n}{r}\frac{k!}{2}$.

定理 2. 只含有一个基数为 k=n-1 的 S 边, 其余边的基数为 2 的 n 元顶点标记半图的个数是

$$\binom{n}{n-1}\frac{(n-1)!}{2}2^{n-1}=\binom{n}{k}\frac{k!}{2}2^k k=n-1\geq 3。$$

证明: 考虑到 n 元半图 G 只含有一个基数为 k=n-1 的 S 边, 其余边(如果有的话)的基数为 2.

于是有 $\binom{n}{k}$ 种方式从 n 个符号里挑出 k 个符号标记 S 边的 k 个顶点, 最后一个顶点用剩下的符号标记.

由于半图里的边是对称的, 根据选出的 k 个符号的排列可以得到 $\frac{k!}{2}$ 个不同的标记 S 边的方法.

显然, 在半图中, 我们最多可以在 S 边的 k 个顶点和剩下的 1 个顶点之间添加 l=k(1)=k 个基数为 2 的边.

如果半图包含 q(q=0,1,2,3,…l)个基数是 2 的边, 于是这 q 个边可以和 S 边的任意 q 个顶点相邻, 这样有 $\binom{k}{q}$ 种选法.

因此, 包含 q 个基数为 2 的边和一个 S 边的半图的个数是 $\binom{n}{k}\frac{k!}{2}\binom{k}{q}$.

因此, 包含一个基数为 k=n-1 的 S 边并且其余边基数为 2 的 n 元顶点标记半图的个数为

$$\binom{n}{k}\frac{k!}{2}\binom{k}{0}+\binom{n}{k}\frac{k!}{2}\binom{k}{1}+\cdots+\binom{n}{k}\frac{k!}{2}\binom{k}{k}$$
$$=\binom{n}{k}\frac{k!}{2}\left\{\binom{k}{0}+\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\cdots\binom{k}{k}\right\}$$
$$=\binom{n}{k}\frac{k!}{2}2^k$$

定理 3. 包含一个基数为 $3\leq k<n-1$ 的 S 边并且其余边(如果有的话)基数为 2 的 n 元顶点标记半图的个数为

$$\binom{n}{k}\frac{k!}{2}2^{\binom{n-k}{2}+k(n-k)}$$

© 中国科学院软件研究所 http://www.c-s-a.org.cn

证明: 考虑到 n 元半图 G 只包含一个基数为 $3\le k<n-1$ 的 S 边并且其余边(如果有的话)基数为 2, 显然在 S 边的 k 个顶点和剩下的(n-k)个顶点之间这样的半图最多可以有 k(n-k)个基数为 2 的边, 在(n-k)个顶点中基数为 2 的边有$\begin{pmatrix} n-k \\ 2 \end{pmatrix}$个. 因此, 基数为 2 的边最多有$l=\begin{pmatrix} n-k \\ 2 \end{pmatrix}+k(n-k)$。

因此, 包含 q 个基数为 2 的边的半图 G 可以有$\begin{pmatrix} l \\ q \end{pmatrix}$个不同的方法.

现在可以用$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$种方式从 n 个符号里选 k 个符号标记 S 边的 k 个顶点并且剩下的符号用来标记其余(n-k)个顶点. 由于半图的边是对称的, 通过选好的这 k 个符号的排列可以给出$\frac{k!}{2}$个不同的标记 S 边的方式, 因此这些 S 边也是不同的. 于是包含一个基数为 $k<n-1$ 的 S 边和 q 个基数为 2 的边的 n 元顶点标记半图的个数是$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\frac{k!}{2}\begin{pmatrix} l \\ q \end{pmatrix}$。

因此包含一个基数为 k=n-1 的 S 边并且其余 q 个边(q=0,1,2,3,…l)基数为 2 的 n 元顶点标记半图的个数为

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\frac{k!}{2}\begin{pmatrix} l \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\frac{k!}{2}\begin{pmatrix} l \\ 1 \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\frac{k!}{2}\begin{pmatrix} l \\ l \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\frac{k!}{2}\left\{\begin{pmatrix} l \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} l \\ 1 \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} l \\ l \end{pmatrix}\right\}\\
&=\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\frac{k!}{2}2^{l}\\
&=\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\frac{k!}{2}2^{k(n-k)+\begin{pmatrix} n-k \\ 2 \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

定理 4. 包含两个基数为 $k_1,k_2\ (6\le k_1+k_2\le n,\ k_1,k_2\ge 3)$ 的不相邻 S 边并且其余边(如果有的话)基数为 2 的 n 元顶点标记半图的个数是

$$\begin{pmatrix} n \\ k_1 \end{pmatrix}\frac{k_1!}{2}\begin{pmatrix} n-k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}\frac{k_2!}{2}2^{\begin{pmatrix} n-k_1-k_2 \\ 2 \end{pmatrix}+(n-k_1-k_2)(k_1+k_2)+k_1k_2}$$

证明: 考虑到包含两个基数为 $k_1,k_2(6\le k_1+k_2\le n,\ k_1,k_2\ge 3)$ 的不相邻 S 边 e_1,e_2 并且其余边(如果有的话)基数为 2. 显然这样的半图

i) 在两个 S 边的 k_1+k_2 个顶点和剩下的 $n-k_1-k_2$ 个顶点之间可以有 $(n-k_1-k_2)(k_1+k_2)$ 个基数为 2 的边,

ii) 在 $n-k_1-k_2$ 个顶点间有$\begin{pmatrix} n-k_1-k_2 \\ 2 \end{pmatrix}$个基数为 2 的边,

iii) 在 S 边 e_1,e_2 之间有 k_1k_2 个边,

因此基数为 2 的边的数目是

$$l=\begin{pmatrix} n-k_1-k_2 \\ 2 \end{pmatrix}+(n-k_1-k_2)(k_1+k_2)+k_1k_2,$$

于是包含 q 个基数为 2 的边的半图有$\begin{pmatrix} l \\ q \end{pmatrix}$个.

现在有$\begin{pmatrix} n \\ k_1 \end{pmatrix}$种方法从 n 个符号里拿出 k_1 个来标记 S 边 e_1 的 k_1 个顶点, 有$\begin{pmatrix} n-k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$种方法从 $n-k_1$ 个符号里拿出 k_2 个来标记 S 边 e_2 的 k_2 个顶点,其余的 $n-k_1-k_2$ 顶点用余下的符号标记. 由于半图的边是对称的, 选出的 k_1 和 k_2 个符号的排列可以给出$\frac{k_1!}{2}$和$\frac{k_2!}{2}$种不同标记 S 边 e_1,e_2 的方式, 且这些 S 边不同.

因此包含有两个基数为 k_1,k_2 的 S 边和 q 个基数为 2 的边的 n 元顶点标记半图的个数是$\begin{pmatrix} n \\ k_1 \end{pmatrix}\frac{k_1!}{2}\begin{pmatrix} n-k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}\frac{k_2!}{2}\begin{pmatrix} l \\ q \end{pmatrix}$.

因此包含有两个基数为 k_1,k_2 的 S 边和 q=0,1,2,3,…l 个基数为 2 的边的 n 元顶点标记半图的总数是

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} n \\ k_1 \end{pmatrix}\frac{k_1!}{2}\begin{pmatrix} n-k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}\frac{k_2!}{2}\begin{pmatrix} l \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} n \\ k_1 \end{pmatrix}\frac{k_1!}{2}\begin{pmatrix} n-k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}\frac{k_2!}{2}\begin{pmatrix} l \\ 1 \end{pmatrix}\\
&+\cdots+\begin{pmatrix} n \\ k_1 \end{pmatrix}\frac{k_1!}{2}\begin{pmatrix} n-k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}\frac{k_2!}{2}\begin{pmatrix} l \\ l \end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix} n \\ k_1 \end{pmatrix}\frac{k_1!}{2}\begin{pmatrix} n-k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}\frac{k_2!}{2}\left\{\begin{pmatrix} l \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} l \\ 1 \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} l \\ l \end{pmatrix}\right\}\\
&=\begin{pmatrix} n \\ k_1 \end{pmatrix}\frac{k_1!}{2}\begin{pmatrix} n-k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}\frac{k_2!}{2}2^{l}\\
&=\begin{pmatrix} n \\ k_1 \end{pmatrix}\frac{k_1!}{2}\begin{pmatrix} n-k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}\frac{k_2!}{2}2^{\begin{pmatrix} n-k_1-k_2 \\ 2 \end{pmatrix}+(n-k_1-k_2)(k_1+k_2)+k_1k_2}
\end{aligned}$$

定理 5. 设半图 G 是一个包含基数为 $k_1,k_2,k_3,...,k_i(3\le k_1,k_1,k_1,...,k_i\le n$且$k_1$+$k_2$+$k_3$+

© 中国科学院软件研究所 http://www.c-s-a.org.cn

$\ldots+k_i=s\le n)$ 的不相邻 S 边并且其余边(如果有的话)基数为 2, 这样的顶点标记半图的数目是

$$\binom{n}{k_1}\frac{k_1!}{2}\binom{n-k_1}{k_2}\frac{k_2!}{2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3}\frac{k_3!}{2}\cdots$$

$$\binom{n-k_1-k_2\cdots-k_{i-1}}{k_i}\frac{k_i!}{2}2^{\binom{n-s}{2}+s(\mathrm{n-s})+\sum_{l=1}^{i-1}\sum_{m=l+1}^{i}k_1k_m}$$

证明: 证明和定理 4 相似.

现在我们陈述包含两个相邻 S 边半图的计数的定理.

定理 6. 设 G 是一个包含两个基数为 k_1 和 $k_2(5\le k_1+k_2-1\le n,\ k_1,k_2\ge 3)$ 的相邻 S 边且其余边(如果有的话)基数为 2 的半图, 则这样的顶点标记半图的个数是

① $$\binom{k_1}{2}\binom{k_2}{2}\binom{n}{k_1+k_2-1}\frac{k_1+k_2-1}{2}\cdot 2^{\binom{n-k_1-k_2+1}{2}+(n-k_1-k_2+1)(k_1+k_2-1)(k_1-1)(k_2-1)}\quad k_1\ne k_2\text{时},$$

② $$\frac{1}{2}\binom{k}{2}\left(\binom{k}{2}+1\right)\binom{n}{2k-1}\frac{(2k-1)!}{2}\cdot 2^{\binom{n-2k+1}{2}+(n-2k+1)(2k-1)+(k+1)^2}\quad k_1=k_2=k\text{时}。$$

利用上面的结论, 可以得到包含至少一个 S 边的顶点标记半图的个数, 表 1 列出了 3 到 8 个顶点的顶点标记半图的情况.

表 1　3 到 8 个顶点的顶点标记半图的个数

顶点个数	半图中的 S 边个数	边/S 边的基数	半图个数	n 元半图总数
3	1	3	3	3
4	1	4	12	108
		3	96	
5	1	5	60	4860
		4	960	
		3	3840	
6	1	6	360	1087080
		5	11520	
		4	92160	
		3	245760	
	2 个不相邻边	3, 3	92160	
	2 个相邻边	3, 3	552960	
		4, 3	92160	
7	1	7	2520	259502040
		6	161280	
		5	2580480	
		4	13762560	
		3	27525120	
	2 个不相邻边	3, 3	41287680	
		4, 3	5160960	
	2 个相邻边	3, 3	123863040	
		4, 3	41287680	
		4, 4	3870720	
8	1	8	20160	109505785536
		7	2580480	
		6	82575360	
		5	880803840	
		4	3523215360	
		3	5637144576	
	2 个不相邻边	3, 3	21139292160	
		4, 3	5284823040	
		4, 4	660602880	
		5, 3	330301440	
	2 个相邻边	3, 3	42278584320	
		4, 3	21139292160	
		4, 4	3963617280	
		5, 3	3963617280	
		5, 4	495452160	
		6, 3	123863040	

尽管半图的计数具有广阔的应用前景及众多研究课题, 但该研究尚处于起步阶段, 本文仅给出顶点标记半图计数的结果及计算出含有 1 到 8 个顶点的顶点标记半图的数目, 由于研究的复杂性, 本文我们只计算只包含不相邻边的顶点与包含两个相邻 S 边的顶点的半图的计数, 为以后的深入研究提供参考, 同时这将推动半图的应用研究.

参考文献

1 Sampathkumar E. Semigraphs and their application [Technical Report]. Department of Science & Technology, Govt. of India. DST/MS/022/94. August, 1999.

2 Harary F. Graph Theory. Narosa Publishing House, New Delhi. 1988.

3 Hampiholi PR, Kitturkar JP. Strong circuit matrix and strong path matrix semigraphs. Annals of Pure and Applied Mathematics, 2015, 10(2): 247–254.

© 中国科学院软件研究所 http://www.c-s-a.org.cn

4 Kamath SS, Hebbar SR. Strong and weak domination, full sets and domination balance in semigraphs. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 2003, (15): 112.

5 Deshpande CM, Gaidhani Y, Athawale BP. Incidence matrix of a semigraph. British Journal of Mathematics & Computer Science, 2015, 9(1): 12–20.

6 Kamath SS, Hebbar SR. Domination critical semigraphs. Electronics Notes in Discrete Mathematics, 2003, 15: 113.

7 Venkatakrishnan YB, Swaminathan V. Hyper domination in bipartite semigraphs. WSEAS Trans. on Mathematics, 2012, 11(10).

8 Akutsu T, Nagamochi H. Comparison and enumeration of chemical graphs. Computational and Structural Biotechnology Journal, 2013, 2(5): 1–9.

9 Gunpinar E, Moriguchi M, Suzuki H, Ohtake Y. Motorcycle graph enumeration from quadrilateral meshes for reverse engineering. Computer-Aided Design, 2014, 10(55): 64–80.

10 Oyamaguchi N. Enumeration of spatial 2-bouquet graphs up to flat vertex isotopy. Topology and its Applications, 2015, 12: 805–814.

11 Zhang H, Kong XZ. On k-greedy routing algorithms. Computational Geometry, 2016, 2(52): 9–17.

12 Marsh RJ, Schroll S. A circular order on edge-coloured trees and RNA m-diagrams. Advances in Applied Mathematics. 2014, 3(54): 11–26.

www.c-s-a.org.cn

www.c-s-a.org.cn

© 中国科学院软件研究所 http://www.c-s-a.org.cn