

基于改进阈值函数的小波阈值去噪算法^①

朱伟华, 安 伟, 尤丽华, 吴静静

(江南大学 机械工程学院, 无锡 214122)

摘 要: 针对传统小波软、硬阈值函数以及现有部分文献所设计的阈值函数的不足, 探索一种改进的小波阈值去噪算法. 通过构造新的阈值函数, 该函数具有更好的平滑性, 并随着小波分解尺度变化而变化, 因此有更好的适应性, 且函数中不存在不确定参数, 相应地提升了去噪稳定性. 相比传统软、硬阈值函数方法, 采用改进阈值函数去噪后信噪比(SNR)更大, 均方差(MSE)更小, 去噪效果更好. 改进阈值函数的小波去噪算法更有优越性, 具有较好的推广价值.

关键词: 小波阈值去噪; 阈值函数; 阈值; 信噪比; 均方差

Wavelet Threshold Denoising Algorithm Based on Improved Wavelet Threshold Function

ZHU Wei-Hua, AN Wei, YOU Li-Hua, WU Jing-Jing

(School of Mechanical, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

Abstract: Aiming at the insufficiency of traditional wavelet soft and hard threshold functions and some of the threshold functions in existing literatures, and to propose an improved wavelet threshold denoising algorithm. A new threshold function is presented, which has better smoothness and changes with the changes of wavelet decomposition scale, so it has good adaptability. Besides, it improves denoising stability as a result of that there is no uncertain parameters in the function. Compared with traditional soft and hard threshold functions, that uses of the improved threshold function denoising, signals' SNR and MSE are better. Wavelet threshold denoising based on improved wavelet threshold shows an excellent effect, which has good promotional value.

Key words: wavelet threshold denoising; threshold function; threshold; SNR; MSE

小波去噪作为一种有效而实用的方法, 在信号去噪及图像去噪中均取得较好的效果. 在工程应用领域^[1-2]中的应用也非常广泛. 国内外研究人员对小波去噪进行了大量的研究工作. 早期如 Weavev^[3]等, 后来 Donoho 和 Johnstone 等人提出了硬阈值和软阈值去噪算法^[4-5], 并证明其逼近原信号的最优估计^[6]. 由于这两种方法继承了小波分析的优点, 而且计算量小, 实现方法简单, 目前已得到广泛的使用. 然而, 这两种阈值函数都存在理论上的缺陷^[7-9], 进而影响了去噪的最终效果. 针对硬阈值及软阈值所存在的问题, 很多学者提出了相关改进的方法^[10-12], 这些改进阈值函数虽然具有很好的连续性, 但也存在着不确定参数, 即

去噪效果与不确定参数取值有关. 鉴于以上问题, 本文通过对传统软、硬阈值函数以及部分文献中所设计的阈值函数基础上进行钻研, 提出了一种基于改进阈值函数的小波阈值去噪算法, 并通过实验仿真证明了该方法的可行性与优越性.

1 传统小波阈值去噪原理及其不足

1.1 传统小波阈值去噪原理

以一维观测信号为例, 如

$$y(t) = x(t) + n(t) \quad (1)$$

式中, $y(t)$ 为污染后信号, $x(t)$ 为初始信号, $n(t)$ 为混入的服从 $N(0, \sigma^2)$ 的高斯白噪声. 那么传统的阈

^① 基金项目: 国家自然科学基金(61305016); 江南大学自主科研计划青年基金(JUSRP1059)

收稿时间: 2015-10-23; 收到修改稿时间: 2015-11-25 [doi:10.15888/j.cnki.csa.005197]

值去噪过程如图1所示,可分解成如下三个步骤:

- (1) 对含噪信号 $y(t)$ 采取小波分解合适的小波及分解层数, 求解出各层小波系数;
- (2) 选取适宜的非线性函数, 选择一个合适的阈

值进行阈值量化处理, 求解出的估计小波系数;

- (3) 根据阈值去噪后求解出各层系数进行小波重构, 得出最终估计信号.

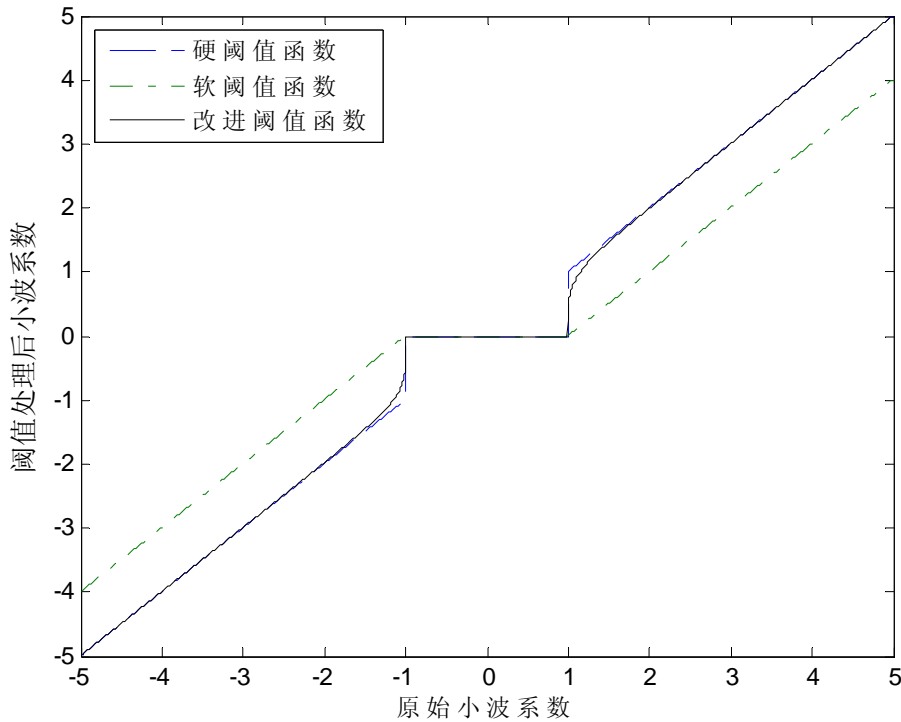


图1 改进阈值函数图

1.2 传统小波阈值去噪的不足

阈值去噪对信号进行小波分解得到最底层低频系数和各层高频系数中, 一般来说高系数是原信号, 而低系数是噪声. Donoho 所提出的传统硬、软阈值函数及常用阈值选取函数分别如下:

$$y_h(x) = \begin{cases} x & |x| \geq \lambda \\ 0 & |x| < \lambda \end{cases} \quad (2)$$

$$y_s(x) = \begin{cases} \text{sgn}(x)(|x| - \lambda) & |x| \geq \lambda \\ 0 & |x| < \lambda \end{cases} \quad (3)$$

这种方法主要存在如下的不足: 式(3)传统软阈值方法估计得出的 $y_s(x)$ 虽然连续, 但其绝对值与 $|x|$ 总存在一个常数系数之差 ($|x| \geq \lambda$ 时), 因此需要采用合理的办法把该偏差缩小, 但如式(2)硬阈值处理时总是完全去掉该偏差也未必就是最好的, 相应地会在 $\pm \lambda$ 处存在阶跃现象, 部分 x 中对应的噪声成分还有待于消除. 因此, 如果令 $|x|$ 介于 $|x| - \lambda$ 与 $|x|$ 之间,

则估计小波系数更能接近于真实的小波系数. 本文基于这一思想去设计改进的阈值函数.

2 改进的小波阈值去噪算法

2.1 改进的小波阈值函数

考虑到上述中存在的种种问题, 基于上述改进思路设计了一种改进阈值函数. 该阈值函数不但同软阈值函数一样连续, 且在 $|x|$ 增加时, $y(x)$ 与 $|x|$ 的偏差逐渐缩小. 本文提出的新阈值函数如下:

$$y_p(x) = \begin{cases} \text{sgn}(x)\sqrt{|x|^j - \lambda^j} & |x| \geq \lambda \\ 0 & |x| < \lambda \end{cases} \quad (4)$$

式中: j 为分解尺度. 图1是该改进阈值函数与传统阈值函数的图像对比 ($\lambda = 1, j = 5$ 时).

易看出当 $|x| \rightarrow \lambda$ 时, $y_p(x) \rightarrow 0$, 表明这时候函数相似与软阈值函数, 且与软阈值函数一样是连续的, 不存在阶跃现象; 并且当 $|x| \rightarrow \infty$ 时,

$y_p(x) \rightarrow x$, 这时新阈值函数又与硬阈值函数相似, 也就解决了软阈值函数设计中总存在一定偏差的缺陷. 另外可以发现改进函数会随着分解尺度 j 的变化而变化, 针对不同分解层数的适应性得到增强. 函数中也不存在不确定因子, 因此信号去噪的稳定性也得以提升.

2.2 阈值的选取

阈值的选取是小波阈值去噪的另一个重要环节. 若阈值选取过大, 则会把部分原信号误认为噪声, 导致部分有用信号被滤除; 若阈值选取过小, 则小波系数中包含了过多噪声信号, 导致信号失真. 因此阈值选取也会影响滤波的质量. Donoho 等人提出的常用阈值表达式:

$$\lambda = \sigma \sqrt{2 \ln(N)} \quad (5)$$

式中: N 为信号长度, σ 为噪声的均方根误差. 实际应用中, 由于 σ 总是未知的, 一般取 $\sigma = \text{median}(|x|) / 0.6745$ [4]. 这种方法存在以下不足: 式(5)的值总是固定的, 但噪声信号的模极大值随着分解层数增加而减小, 如对不同分解层数采用相同阈值处

理, 会在低频系数中滤除过多有用信号, 在高频信号中保留部分噪声. 因此本文的仿真实验中, 采用了如下改进阈值确定方法^[13,14]:

$$\lambda = \frac{\sigma \sqrt{2 \ln(N)}}{\ln(j+1)} \quad (6)$$

式中: j 为分解尺度. 由式(6)可以看出, 阈值随着分解尺度增加、噪声小波系数相应减小, 因此能更有效地区分噪声与原信号, 同时更大程度保留原信号, 去除噪声.

3 实验仿真及结果分析

为了验证本文改进方法的有效性和优越性, 采用提出的改进阈值去噪方法对比传统软、硬阈值去噪方法进行了大量实验. 实验仿真环境为 Matlab 2012b.

下面举两例进行说明. 这两次实验中分别使用 Matlab 生成含高斯白噪声的 Block、Bump 信号噪声, 含噪信号比[SNR]=4 dB, 信号长度为 2048 个. 两例仿真实验小波分解采用的小波基均为 sym5, 分解层数也均为 5 层. 图 2 图 3 即为实验仿真去噪效果.

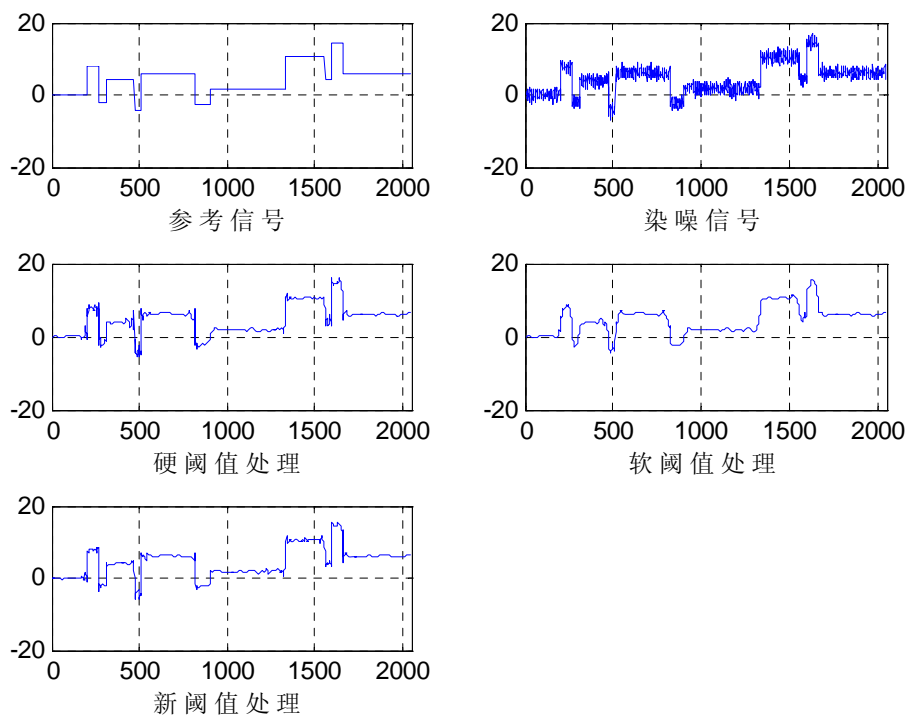


图 2 Block 信号实验图

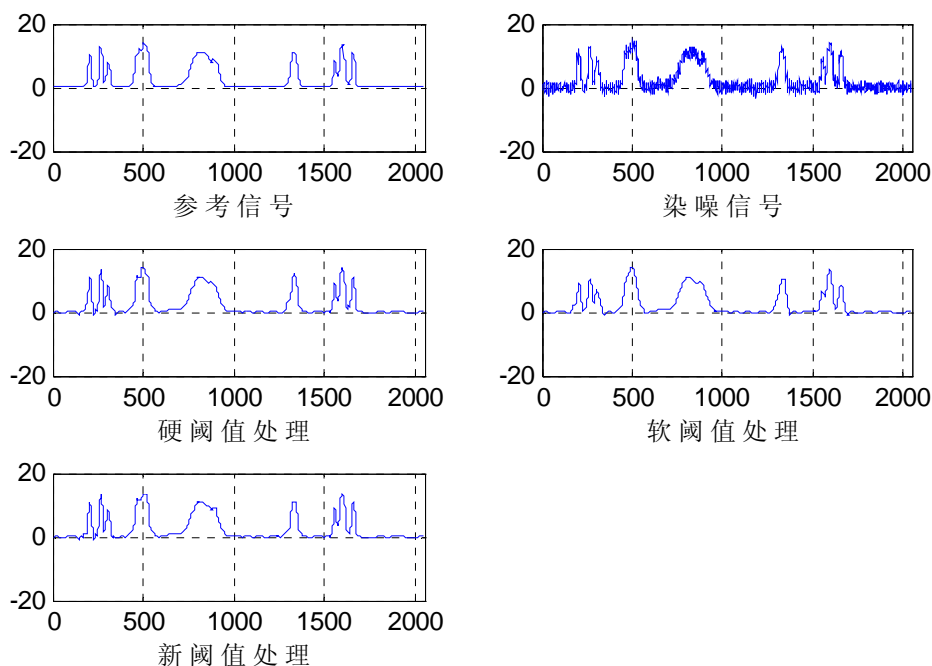


图 3 Bump 信号实验图

分别对比图 2 图 3, 从视觉效果上可以简单判断, 改进阈值去噪方法在视觉上去噪效果最优, 统筹了软、硬阈值方法的优点. 即尽可能地保留了属于原信号的成分, 难以辨别的噪声段也得以滤除. 图 3 中硬阈值法去噪后信号中明显含有一些尖峰信号, 部分噪声未被有效滤除, 软阈值法去噪后信号在奇异点变化缓慢, 部分有用信号被滤除.

图 3 中硬阈值法去噪后信号光滑程度相对较差, 软阈值法去噪后信号显得过于光滑. 为了更好地验证该方法的去噪优越性, 以信噪比(SNR)、均方差(MSE)为比较依据, 它们的定义分别如下:

$$SNR = 10 \log_{10} \left[\frac{\sum_{i=1}^N S_i^2}{\sum_{i=1}^N (S_i - S'_i)^2} \right] \quad (7)$$

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (S_i - S'_i)^2 \quad (8)$$

式中: S_i 为不含噪声的原始信号, S'_i 为处理后的信号. 去噪后信号的 SNR 越大, MSE 越小, 则去噪算法越优越.

表 1 表 2 分别是本文改进阈值去噪方法与传统方法对实验仿真信号处理后的 SNR, MSE 结果, 可以看

出改进阈值去噪方法信噪比最大而均方差最小, 证明了本文提出的改进阈值去噪方法的正确性与优越性, 符合图 3 图 4 得出的视觉预期效果.

表 1 Block 信号去噪效果

项目	硬阈值	软阈值	改进阈值
SNR/dB	20.0533	17.4660	21.4542
MSE	0.5822	0.8025	0.5070

表 2 Bump 信号的去噪效果

项目	硬阈值	软阈值	改进阈值
SNR/dB	19.5638	15.7523	22.0914
MSE	0.4917	0.7626	0.3676

4 结论

本文提出了基于改进阈值函数的小波阈值去噪算法. 该方法相对传统方法主要有以下提高: 在纠正软、硬阈值函数缺陷的基础上, 改进的阈值函数表达式随着分解尺度变化而变化, 得出更适合的小波系数, 因此能更有效地分辨原信号与噪声, 同时表达式中不含不确定参量, 稳定性得到保证; 引用了一种更合理的阈值确定方法, 去噪效果更有优越性.

通过实验仿真验证了该方法去噪后信噪比更大,

均方差更小,可以提高去噪的质量和稳定性.理论上该方法适用于一维和二维带噪信号去噪,对于实际工程中的自动控制、质量检测、设备监测及设备故障诊断等环节具有良好的应用价值.

参考文献

- 1 郁洋.基于小波去噪的自动包装机控制系统研究[学位论文].哈尔滨:哈尔滨理工大学,2015.
- 2 武秋敏,武吉梅.基于 Matlab 的切纸机小波除噪隔振研究.包装工程,2007,28(11):98-100.
- 3 Weaver JB, YanSun X. Filtering noise from images with wavelet transforms. *Magnetic Resonance in Medicine*, 1991, (24): 288-295.
- 4 Donoho DL. Denoising by soft-thresholding. *IEEE Trans. on IT*, 1995, 41(3): 613-627.
- 5 Donoho DL, Johnstone IM. Ideal spatial adaption via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 1994, 81: 425-455.
- 6 Vetterl M, Chang SG, Yu B. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression. *IEEE Signal Processing Letters*, 1998, 5(10): 265-267.
- 7 高国荣,刘艳萍,潘琼.基于小波域可导阈值函数与自适应阈值的脉冲星信号消噪.物理学报,2012,61(13):139701.
- 8 Chang FX, Hong WX, Zhang T. Research on wavelet denoising for pluse signal based on improved wavelet thresholding. *First International Conference on Pervasive Computing, Signal Processing and Applications*. 2010. 564-567.
- 9 杨恢先,王绪四,谢鹏鹤,冷爱莲,彭友.改进阈值与尺度间相关的小波红外图像去噪.自动化学报,2011,37(10):1167-1174.
- 10 左飞飞,王海彬,马捷,史龙.基于小波变换的改进去噪阈值函数.探测与控制学报,2015,37(1):80-85.
- 11 许文博,武晓春,邢建平.一种新的小波阈值去噪方法.兰州交通大学学报,2012,31(3):120-123.
- 12 曹京京,胡辽林,赵瑞.一种改进小波阈值函数的光纤光栅传感信号去噪方法.传感技术学报,2015,28(4):521-525.
- 13 赵瑞珍,宋国乡,王红.小波系数阈值估计的改进模型.西北工业大学学报,2001,19(4):625-628.
- 14 Atto AM, Pastor D, Mercier G. Wavelet shrinkage: Unification of basic thresholding functions and thresholds. *Signal, Image and Video Processing*, Springer, 2011, 5(1): 11-28.