

# 一种单个粒子自适应修正的粒子群算法<sup>①</sup>

孔艳<sup>1,2</sup>, 熊伟丽<sup>3</sup>, 高淑梅<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(江南大学 理学院, 无锡 214122)

<sup>2</sup>(江南大学 物联网工程学院, 无锡 21412)

<sup>3</sup>(江南大学 轻工过程先进控制教育部重点实验室, 无锡 214122)

**摘要:** 在各类优化问题的解决过程中, 群智能优化算法的局部搜索与全局搜索性能都起着重要的作用。在粒子群优化算法中, 惯性权值的引入对粒子群算法的收敛性与稳定性都具有一定的影响。因此, 在分析现有权值递减策略的基础上, 提出一种基于单个粒子适应值的权值修正策略, 区别对待同次迭代中适应值好与差的粒子, 通过不同的权值赋值策略, 以充分发挥各粒子的优势, 以增强全局搜索和跳出局部最优的能力。通过对标准测试函数所做的对比实验, 该策略可以使粒子在搜索初期获得更好的多样性, 使粒子具有更强的摆脱陷入局部极值点的能力; 在搜索末期可以加快粒子收敛速度以提高粒子群优化算法的快速性能。改进算法有效减少了早熟的发生, 提高了粒子的收敛性能, 取得了比较满意的仿真结果。

**关键词:** 粒子群优化算法; 惯性权值; 递减策略; 适应值

## Particle Swarm Optimization Algorithm with Self Adapting Inertia Weight

KONG Yan<sup>1,2</sup>, XIONG Wei-Li<sup>3</sup>, GAO Shu-Mei<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

<sup>2</sup>(School of Internet of Things Engineering, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

<sup>3</sup>(Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry (Ministry of Education), Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

**Abstract:** In the process of solving all kinds of optimization problems, local searching and global searching performance of swarm optimization algorithm play an important role. In particle swarm optimization (PSO) algorithm, the inertia weight has a certain effect on convergence and stability. Inspired by the effect of inertia weight on convergence of PSO, a new modified strategy for inertia weight is proposed based on fitness value. Comparative experiments of benchmark functions indicate that this new strategy could make the particles various to get the strong ability to keep from plunging local optimum and improve the astringency speed in the end of searching. Experiment results show that it is effective for prematurity and improve the ability of convergence.

**Key words:** particle swarm optimization; inertia weight; decreasing strategy; fitness

粒子群优化算法 (Particle Swarm Optimization, PSO) 是一种随机搜索策略的优化算法, 该算法模拟鸟群的飞行行为而获得多维寻优能力, 其思想来源于人工生命和进化计算理论, 最早是由美国的 Kennedy 和 Eberhart 教授提出的<sup>[1]</sup>。同传统的优化算法如遗传算法相比, 该算法具有计算简洁、易于实现、需调整的参数少等特点<sup>[2]</sup>。但是在对 PSO 算法进行研究过程

中发现其存在易于陷入局部最优及早熟收敛等现象, 其中惯性权值  $\omega$  的选取是影响该算法性能和效率的关键, 对于这些缺陷先后出现了线性递减 (LDIW)、模糊 (FIW) 和随机 (RIW) 等改进策略<sup>[3-5]</sup>。其中 FIW 需要专家知识建立模糊规则, 实现难度较大; RIW 用于求解动态系统; 而 LDIW 相对简单且收敛快, 采用最为广泛。

① 基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金 (JUSRP111A20); 江南大学预研基金 (2009LY09)

收稿时间: 2011-08-31; 收到修改稿时间: 2011-10-05

本文在 LDIW 基础上，从理论和实验两方面分析了惯性权值  $\omega$  对 PSO 收敛性的影响，提出基于单个粒子适应值  $\omega$  的改进策略。该策略通过区别对待同次迭代中适应值好与适应值差的粒子，通过不同的权值赋值策略，以充分发挥各粒子的优势，以增强全局搜索和跳出局部最优的能力。实验证明该策略有效减少了早熟的发生，提高了粒子的收敛性能，取得了满意的结果。

### 1 标准粒子群算法及其收敛性能分析

粒子群算法是一种基于迭代的优化方法，每个优化问题的解作为一个粒子，每个粒子具有一个适应度函数，且拥有一个速度决定它们飞行的方向和距离，通过迭代搜寻最优值。

假设在 D 维搜索空间中，有 m 个粒子，其中第 i 个粒子的位置是  $\bar{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iD})$ ，速度为  $\bar{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iD})$ ，记第 i 个粒子搜索到的最优位置为  $\bar{p}_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iD})$ ，整个粒子群搜索到的最优位置为  $\bar{p}_g = (p_{g1}, p_{g2}, \dots, p_{gD})$  [6]。单个粒子状态更新操作如下：

$$v_{id}(t+1) = \omega \cdot v_{id}(t) + c_1 r_1 (p_{id} - x_{id}(t)) + c_2 r_2 (p_{gd} - x_{id}(t)) \quad (1)$$

$$x_{id}(t+1) = x_{id}(t) + v_{id}(t+1) \quad (2)$$

其中  $i=1,2,\dots,m$ ； $d=1,2,\dots,D$ ； $\omega$  惯性因子；学习因子  $c_1$  和  $c_2$  是非负常数； $r_1$  和  $r_2$  是介于 [0,1] 之间的随机数；为当前迭代次数。式(1)由三部分组成，第一部分是粒子先前的速度，说明了粒子目前的状态，起到平衡全局搜索和局部搜索的作用；第二部分是认知部分，表示粒子本身的思考，使粒子有足够强的全局搜索能力，避免局部极小；第三部分为社会部分，体现粒子间的信息共享。三个部分共同决定粒子的空间搜索能力。

为便于分析，先将 PSO 简化为一维单个粒子的运动。令  $\varphi_1 = c_1 \text{rand}()$ ， $\varphi_2 = c_2 \text{rand}()$ ， $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ ， $\bar{\varphi} = 1 - \varphi$ ， $\varphi_p = \varphi_1 p_{best} + \varphi_2 g_{best}$ 。为加强针对性，令  $\varphi$ 、 $\bar{\varphi}$ 、 $\varphi_p$  为固定常数，使得  $\omega$  作为式(1)和(2)中的唯一变量，利用状态空间将其描述为：

$$Y(t+1) = AY(t) + B \quad (3)$$

$$\text{其中, } Y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \bar{\varphi} & \omega \\ -\varphi & \omega \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \varphi_p \\ \varphi_p \end{bmatrix}.$$

则矩阵 A 的特征方程为：

$$\lambda^2 - (\omega + \bar{\varphi})\lambda + \omega = 0 \quad (4)$$

解得矩阵 A 的两个特征值为：

$$e_{1,2} = \frac{\omega + \bar{\varphi} \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{其中: } \Delta = (\omega + \bar{\varphi})^2 - 4\omega \quad (5)$$

则式(3)的显式表示为：

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\varphi_p - [k_1 e_1^t (e_1 - \omega) + k_2 e_2^t (e_2 - \omega)]}{\varphi} \\ v(t) = k_1 e_1^t + k_2 e_2^t \end{cases} \quad (6)$$

由式(6)知， $x(t)$  和  $v(t)$  的收敛速率完全取决于  $\|e_{1,2}\|$ ，值越小，收敛越快。而  $\|e_{1,2}\|$  的大小是与  $\omega$  的取值成正比的，这就与 Shi 的结论相一致。

为进一步证明该结论，图 1、2 分别给出了  $\omega = 0.4$  和  $\omega = 0.9$  时，PSO 算法对 Rose 函数寻优时，粒子在搜索空间运动的过程。

Rose 函数：

$$f(x) = 100(x^2 - x)^2 + (1 - x)^2 \quad (7)$$

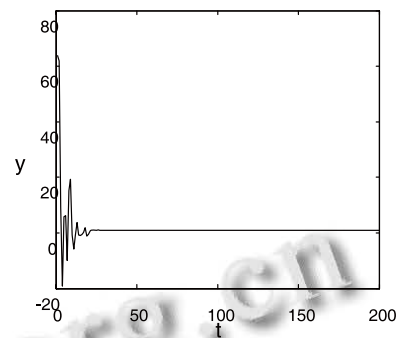


图 1  $\omega = 0.4$  时粒子运动轨迹

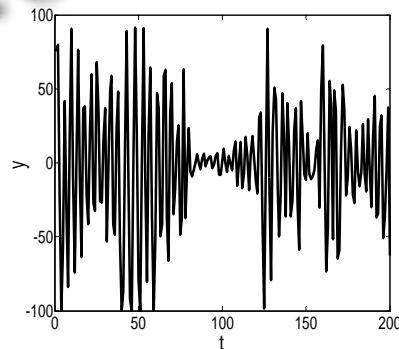


图 2  $\omega = 0.9$  时粒子运动轨迹

故不难得出，此权重取值策略也存在着以下缺陷：  
1) 迭代初期  $\omega$  较大，即意味着  $v(t)$  较大，局部搜索能力较弱，即使初始粒子已接近全局最优，也往往错过；

而在迭代后期  $\omega$  较小, 即意味着  $v(t)$  较小, 全局搜索能力变弱, 而易陷入局部最优。2) 种群在运行过程中, 最优粒子的  $x_{id}^{(t)}$  由式(1)中的首项  $\omega v_{id}^{(t)}$  所决定, 缺乏有效的学习机制, 一旦某粒子发现最优位置为局部最优而又未能尽快得以修正, 算法将出现所谓的早熟收敛。

## 2 单个粒子自适应修正粒子群算法(FPSO)

PSO 算法源自鸟群群体运动行为模拟。在鸟的实际觅食中, 每只鸟是作为独立个体而存在的, 具有很强的个体差异, 正是因为粒子间差异的存在, 使得鸟群能充分发挥出它的主观能动性, 使得其能快速而有效的找寻食物, 而 PSO 算法对这一现象的描述是缺乏的。

综上所述, 为进一步提高 PSO 算法性能, 提出一种改进的 PSO 算法, 即单个粒子自适应修正 PSO 算法。该算法通过对普通粒子个体差异的研究, 修正其各自的权重, 在增强粒子寻优多样性的同时, 对上述的缺陷(1)有一定克服; 同时算法对最优粒子的寻优方式的改变, 使算法对缺陷(2)也有了一定程度的完善。

### 2.1 普通粒子自适应改进算法

在众多文献对 PSO 算法改进的研究中, 往往认为单次迭代中的  $\omega$  是常值, 而用高度统一的权重并不能充分反映出种群的变化规律<sup>[7,8]</sup>。一方面, 各粒子统一的  $\omega$  在客观自然界并不存在; 另一方面, 它又容易使算法陷于局部最优, 进而消除种群的多样性。故用此单一变化的  $\omega$ , 缺乏对实际复杂问题的适应。

从对鸟群的分析不难得出, 对于单个粒子而言, 当在下次寻优中  $pbest_{id}^{(t+1)}$  被  $x_{id}^{(t+1)}$  所取代, 即粒子的新位置  $x_{id}^{(t+1)}$  为个体最优时, 粒子可以认为其目前的速度  $v_{id}^{(t)}$  具有较高的优越性, 则其对  $x_{id}^{(t+1)}$  影响较大, 该粒子对  $v_{id}^{(t)}$  多采取保持; 反之, 当下次寻优中  $pbest_{id}^{(t+1)}$  仍为  $pbest_{id}^{(t)}$ , 该粒子对  $v_{id}^{(t)}$  多采取修正。

各粒子惯性权重  $\omega$  将按公式(8)进行随机取值, 且其数学期望将随  $pbest_{id}^{(t)}$  是否变异, 而做出调整。

$$\omega_{id} = \lambda_{1,id} + rand_{id} / 2.0 \quad pbest_{id}^{(t+1)} = x_{id}^{(t+1)} \quad (8-1)$$

$$\omega = \lambda_{2,id} + rand_{id} / 2.0 \quad pbest_{id}^{(t+1)} = pbest_{id}^{(t)} \quad (8-2)$$

其中,  $\lambda_1$  是大于  $\lambda_2$  的常数, 且  $0 < \lambda_{1,2} < 10$ ,  $rand$  如前所定义为  $[0,1]$  间的随机数。该策略对粒子当前速度产生如下影响: 在宏观范围内, 粒子当前最优位置一旦

产生变化, 即可认为其历史速度较好, 则  $\omega$  较大, 采用公式 (8-1); 反之, 即可认为其历史速度较差, 需要学习,  $\omega$  较小, 采用公式 (8-2)。为保持种群的多样性, 算法在保持总体态势一致的同时, 对单个粒子在不同维数空间上, 增加了随机扰动机制, 这与遗传算法中的变异相一致。

### 2.2 最优粒子自适应改进算法

从公式(1)不难看出, 在 PSO 算法中, 最优粒子  $i_{best}$  的最优位置  $gbest_{id}^{(t)}$  的变异完全由  $\omega v_{id}^{(t)}$  所决定, 而在 PSO 算法迭代过程中, 其在连续的  $n$  代周期中常会缺乏变化, 速度可视为  $\omega^n v_{id}^{(t)}$ , 且随着  $n$  的增加趋于 0, 若此时的解为局部最优则 PSO 算法极易出现早熟。为降低这一现象发生的概率, 将引入一个新的变异算子取代公式(1)对最优粒子进行修正。

假设  $i_{best}$  的搜索过程为一随机现象, 研究随机现象的最基本工具是随机变量, 分布函数是随机变量最重要的概率特性, 它可以描绘随机变量的统计规律。在概率论与随机过程的理论研究和实际应用中, 许多实际现象都服从或近似服从正态分布。中心极限定理从理论上阐述了产生正态分布的条件。如果决定某一随机变量结果的是大量微小的、独立的随机因素之和, 且每一因素单独作用相对均匀的小, 没有一种因素可以起主导作用, 那么该随机变量近似于正态分布。对于  $i_{best}$  而言, 由于其缺乏固定的学习机制, 基本满足上述条件, 故不妨视其变异满足正态分布, 且满足下式:

$$p(v_{best,d}^{(t)}) = \exp[-(v_{best,d}^{(t)})^2 / 4(\sigma_d^{(t)})^2] / (\sigma_d^{(t)} \sqrt{2\pi}) \quad (9)$$

$$g_{best,d}^{(t+1)} = \begin{cases} g_{best,d}^{(t)} + v_{best}^{(t)} & f(g_{best,d}^{(t)} + v_{best}^{(t)}) \leq f(g_{best,d}^{(t)}) \\ g_{best,d}^{(t)} & f(g_{best,d}^{(t)} + v_{best}^{(t)}) > f(g_{best,d}^{(t)}) \end{cases} \quad (10)$$

$$\sigma_d^{(t)} = k \cdot g_{best,d}^{(t)} \quad (11)$$

其中,  $p(v_{best,d}^{(t)})$  为  $i_{best}$  变异的正态分布概率, 方差  $\sigma_d^{(t)}$  体现了种群的聚散程度,  $\sigma_d^{(t)}$  愈小, 则分布曲线愈尖锐,  $i_{best}$  更适合于局部搜索, 反之  $i_{best}$  更适合于全局搜索。

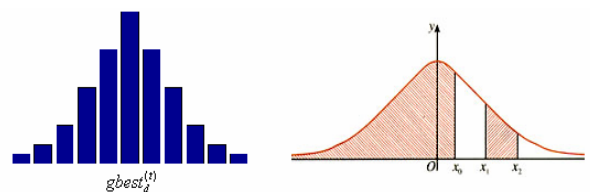


图 3 种群分布的统计直方图 图 4 正态分布曲线

为简化对正态分布函数的计算，直接采用正态分布表(表 1)，反映粒子  $(gbest_d^{(i)} - a\sigma_d^{(i)}, gbest_d^{(i)} + a\sigma_d^{(i)})$  在各区间出现的概率，将其分布概率直接代入运算。

表 1 正态分布表

$a$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\Phi$	0.1586	0.3108	0.4514	0.5762	0.6827
$\Phi'$	0.1586	0.1522	0.1406	0.1348	0.1065

$a$	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$\Phi$	0.7698	0.8384	0.8904	0.9282	0.9545
$\Phi'$	0.0871	0.0686	0.0520	0.0378	0.0263

### 3 仿真实验

本文通过两个经典的函数优化问题来测试文中改进策略对 PSO 性能上的改善。测试函数的具体数学描述如下：

Sphere 函数：

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (12)$$

Rosenbrock 函数：

$$f(x) = \sum_{i=1}^n [100 \cdot (x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2] \quad (13)$$

式中：算法的其它参数设置如表 2 所示。第一代种群采用随机初始化的方法，各函数直接将函数表达式作为适应度函数，结束条件为最大迭代次数。

表 2 函数搜索范围

函数	范围	初始边界	Vmax	达标值
Sphere	-100,100	50,100	100	1.00E-01
Rosenbrock	-100,100	15,30	100	1.00E+03

现对每个基准函数分别设置维度为 10、20 和 30；相应的迭代次数为 1000、1500 和 2000；相应的粒子数为 20、40 和 80。分别运用  $\omega = 0.7$  时的 SPSO、以及  $\omega_{start} = 0.9$ 、 $\omega_{end} = 0.4$  的 LPSO 和 FPSO 对其测试。图 5、6 为对最后一种情况的比对。

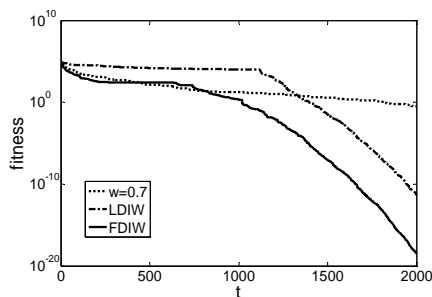


图 5 Sphere 函数

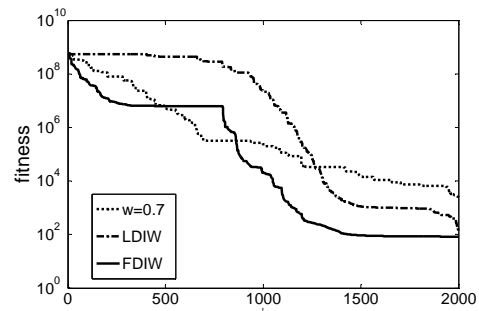


图 6 Rosenbrock 函数

由仿真优化曲线可以看出，在运行初始阶段，FPSO 和 SPSO 的收敛速度要优于 LPSO，主要是因为 SPSO 中  $\omega$  较小，而在 FPSO 中由适应值决定的较优粒子  $\omega$  亦较小，所以这两种方案初始时寻优能力要强于 LPSO；同时，SPSO 到达一定代数后趋于稳定，可能是因为搜索前期  $\omega$  相对较小缺乏一定的全局搜索，而后期  $\omega$  又相对较大难以收敛的缘故。而 FPSO 由于其在迭代初期大部分粒子  $\omega$  较大仍以全局搜索为主，且  $\omega$  逐渐递减；在后期又对部分粒子加入扰动，使得在整体以局部搜索为主时，仍有少部分进行全局搜索，故其可以在比 LPSO 迭代次数少的情况下取得高精度的解。但稍显不足的，在部分函数中 FPSO 和 LPSO 的最终收敛精度趋同，这一方面可能是由于算法本身在多次迭代后具有一定收敛性，另一方面可能是  $\omega_{start}$  和  $\omega_{end}$  的取值并非 FPSO 的最佳架构，因为 FPSO 算法其在迭代过程中均有反向粒子存在，故在 FPSO 中  $\omega_{start}$  到  $\omega_{end}$  可取更大的范围。现取  $\omega_{start} = 1.0$  和  $\omega_{end} = 0.3$ 。表 3 和 4 是 SPSO、LPSO 和 FPSO 三种算法对于上述基本函数不同种群、不同维数、不同迭代次数的寻优精度及收敛率。从表中数据可见，当 FPSO 中  $\omega$  具有更大范围时，在迭代次数相同的情况下，往往可以获得更好的取值精度。

表 3 Sphere 函数

M	D	$G_{max}$	SPSO		LPSO		FPSO	
20	10	1000	1e-08	84%	1e-21	90%	1e-24	88%
	20	1500	1e-01	28%	1e-10	24%	1e-14	30%
	30	2000	NON	NON	NON	NON	1e-07	14%
40	10	1000	1e-10	100%	1e-25	100%	1e-29	100%
	20	1500	1e-02	62%	1e-15	52%	1e-22	58%
	30	2000	NON	NON	1e-10	12%	1e-16	14%

80	10	1000	1e-12	100%	1e-29	100%	1e-36	100%
	20	1500	1e-03	90%	1e-18	78%	1e-27	76%
	30	2000	1e-01	16%	1e-13	28%	1e-22	28%

表 4 Rosenbrock 函数

M	D	$G_{max}$	SPSO		LPSO		FPSO	
20	10	1000	9.63	80%	9.45	90%	7.77	94%
	20	1500	414.77	50%	53.68	72%	36.56	80%
	30	2000	NON	NON	257.75	60%	137.3	76%
40	10	1000	9.50	86%	8.18	94%	6.24	98%
	20	1500	217.43	66%	42.43	74%	25.23	84%
	30	2000	NON	NON	144.96	60%	86.94	78%
80	10	1000	7.28	98%	7.77	96%	5.29	98%
	20	1500	208.25	72%	32.73	84%	17.89	90%
	30	2000	NON	NON	37.80	80%	54.43	86%

#### 4 结论

本文着重研究了惯性权值因子取值大小对粒子群优化算法收敛性所带来的影响,并在此基础上分析了现有的权值递减策略的优缺点,并提出一种基于各粒子适应值的递减策略,使得 PSO 算法在寻优能力和精度要求上都有不同程度的提高。但和取何值时, PSO 算法的性能会最优,及其在全局和局部间达到最佳平衡,还需要大量实验来验证。同时 PSO 算法本身缺乏

理论上的依据,具有一定的盲动性和随机性,如何解决这一不足也是下一步需要着重研究的问题。

#### 参考文献

- 1 Kennedy J, Eberhart R. Particle Swarm Optimization. IEEE on Networks, 1995: 1942-1948.
- 2 Eberhart R, Shi Y. Particle Swarm optimization: development, applications and resource. IEEE conf. on evolutionary Computation, 2001:81-86.
- 3 Shi Y, Eberhart RC. Empirical study of particle swarm optimization. International Conference on Evolutionary Computation. Washington, USA: IEEE, 1999: 1945-1950.
- 4 Shi Y, Eberhart R. Fuzzy adaptive particle swarm optimization. The IEEE Congress on Evolutionary Computation. San Francisco, USA: IEEE, 2003: 101-106.
- 5 Shi Y, Eberhart RC. Tracking and optimizing dynamic systems with particle swarms. The IEEE Congress on Evolutionary Computation. San Francisco, USA: IEEE, 2001: 94-100.
- 6 任小波,杨忠秀.一种动态扩散粒子群算法.计算机应用, 2010,30(1):159-161.
- 7 沈学利,张红岩,张纪锁.一种新的改进粒子群优化算法.计算机仿真,2011,28(3):246-249.
- 8 黄轩,张军,詹志辉.基于随机惯量权重的快速粒子群优化算法.计算机工程与设计,2009,30(3):647-650.

(上接第 85 页)

- Communications, 2008,7(6):2004-2008.
- 5 Ku ML, Huang CC. A refined channel estimation method for STBC/OFDM systems in high-mobility wireless channels. IEEE Trans. on Wireless Communications, 2008,7(11): 4312-4320.
  - 6 Zhang J, Huang LQ. An improved DFT-based channel estimation algorithm for MIMO-OFDM systems. 2011 International Conference on Consumer Electronics, Communications and Networks. Xianning, China, 2011:

- 3929-3932.
- 7 Diallo M, Boher L, Rabineau R, Cariou L, Helard M. Transform domain channel estimation with null subcarriers for MIMO-OFDM systems. 2008 IEEE International Symposium on Wireless Communication Systems. Reykjavik, Iceland, 2008:209-213.
  - 8 袁清升,何晨,李国松,卜智勇.OFDM 系统中信道有效阶数的估计.电子学报,2005,33(12A):2352-2356.