

基于 GIS 光滑粒子流体动力学改进方法仿真^①



王建华, 冉煜琨

(成都理工大学工程技术学院, 乐山 614000)

通讯作者: 冉煜琨, E-mail: cc999687vip@sina.com

摘要: 为了对沿海城市发生海啸进行有效分析和研究, 基于光滑粒子流体动力学 (SPH) 3D 粒子法, 提出一种沿海城市爆发海啸的分析工具. 首先, 通过地理信息系统 (GIS) 得到的 3D 位置信息 (SHP) 和数字高程模型 (DEM) 来展示地形、海拔和建筑物的外部形态; 然后, 将地表轮廓定义为 STL 数据, 将 STL 数据转换为粒子数据; 最后, 缓解 SPH 方法中的不可压缩条件, 并利用虚拟标记处理边界问题. 3D 仿真表明, 海啸粒子没有渗透入建筑物, 在建筑物和地面之间没有间隙, 验证了所提方法的有效性和良好效果.

关键词: 海啸; 光滑粒子流体动力学; 地理信息系统; 3D 粒子法; 虚拟标记

引用格式: 王建华, 冉煜琨. 基于 GIS 光滑粒子流体动力学改进方法仿真. 计算机系统应用, 2021, 30(4): 181-186. <http://www.c-s-a.org.cn/1003-3254/7854.html>

Simulation on Improved Method of GIS Smoothed Particle Hydrodynamics

WANG Jian-Hua, RAN Yu-Kun

(The Engineering & Technical College of Chengdu University of Technology, Leshan 614000, China)

Abstract: This study proposes a tool for analyzing the tsunami outbreaks in coastal cities based on a 3D particle method of Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH). Firstly, we obtain the 3D location information (SHP) and Digital Elevation Model (DEM) through the Geographic Information System (GIS), thus display the topography, altitude, and the outside appearance of the buildings. Then, the STL data defined by the surface profile are converted to particle data. Finally, the incompressible condition in the SPH method is alleviated, and the boundary problem is solved by virtual marking. The 3D simulations show that the tsunami particles do not penetrate into the buildings, and there is no gap between the buildings and the ground, which verifies the good results of the proposed method.

Key words: tsunami; Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH); Geographic Information System (GIS); 3D particle method; virtual marking

1 引言

我国有着辽阔的海岸线和大量岛屿, 虽然我国很多沿海城市没有处在板块交界处, 发生海啸的可能性不像邻国日本那样多. 但近几年, 较多的海底大地震给我国台湾岛和福建沿海城市造成海啸的可能性变大. 针对可能发生海啸的安全隐患问题, 利用一定的分析评估方法是防灾减灾的重要手段之一.

目前在实践层面上, 广泛使用的海啸分析是基于浅水长波理论^[1]的数值分析, 该理论中假设水粒子的垂直加速度非常小, 取垂直方向上流速的均值. 这种分析方法对二维现象进行了模拟, 可用于理解从地震中心至沿海城市广阔区域上的海啸传播. 然而, 该方法难以确定 3D 属性在其中占主导地位的局部水流的自由表面形状^[2]. 一般情况下, 海啸预测的内容是海啸到达

① 基金项目: 数学地质四川省重点实验室开放基金重点项目 (scsxdz2019zd01)

Foundation item: Key Projects of Sichuan Key Laboratory Open Fund for Mathematical Geology (scsxdz2019zd01)

收稿时间: 2020-07-31; 修改时间: 2020-08-25; 采用时间: 2020-09-08; csa 在线出版时间: 2021-03-30

地面后, 随时间发展, 海水覆盖的区域变化情况. 此外, 由于水波的三维性会造成的影响, 建筑物附近的水流预测也是预测内容之一, 但前者通常为预测的主要内容.

GIS 数据以其在时空数据的存储表达分析等方面的优势, 使得在多种 3D 仿真和可视化领域得到广泛关注, 如溃坝洪水演进^[3]、洪水淹没分析^[4]等. 传统 GIS 方法大多采用数字高程模型 (Digital Elevation Model, DEM)^[5], 利用有源淹没或者无源淹没进行分析, 其缺点是忽略了物理学和动力学的因素, 时效性和可靠性较弱.

在 3D 流动分析中, 当水波发生显著变化时, 网格的数值分析方法^[6]也经常使用, 如有限差分法和有限元法^[7]等. 在众多理论分析方法中, 光滑粒子流体动力学 (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH)^[8]逐渐得到认可. SPH 是一种无网格的拉格朗日粒子法, 其基本思想是将连续的流体用相互作用的粒子组来描述, 各粒子上承载各种物理量, 包括质量、速度、加速度等. 通过求解粒子组的动力学方程和跟踪每个粒子的运动轨迹, 求得整个系统的力学特征^[8]. SPH 在海啸 3D 仿真^[9]、洪水灾难评估^[3,10]等方面得到了应用, 验证了 SPH 具有一定的可行性和准确性. 也有研究者将 SPH 扩展到不可压缩的光滑粒子流体动力学 (Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics, ISPH)^[11].

本文在 SPH 方法的基础上, 对边界问题和缓解不可压缩问题进行描述和解决, 建立能够对海啸爆发进行有效分析的工具. 提出了一系列的预处理程序和地理分析模型. 该模型能够通过从一个地理信息系统 (GIS) 中, 得到的 3D 位置信息 (SHP) 和数字高程模型 (DEM) 来展示地形、海拔和建筑物的外部形态.

2 提出的分析方法

2.1 SPH 方法的基本方程

SPH 方法的基本概念是将位于空间点 \mathbf{x} 和时间 t 的函数 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 作为一个积分表达式进行逼近, 其定义如下:

$$\phi(\mathbf{x}, t) \approx \int_V W(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, h) \phi(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} \quad (1)$$

式中, W 为核函数, 即一种加权函数. 在 SPH 方法中, 一般将光滑长度在 h 内, 具有非零正值, 且满足统一条件的紧支撑函数作为一个近似. 基于离散化, 使用分布在空间中的粒子 \mathbf{x}_i 对式 (1) 进行逼近, 并在长度 h 内使用其附近的粒子值获得加权总和:

$$\langle \phi_i \rangle (\approx \phi(\mathbf{x}_i, t)) := \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (r_{ij}, h) \phi(\mathbf{x}_j, t) \quad (2)$$

式中, 下标 i 和 j 表示粒子数量, ρ_j 和 m_j 分别表示与粒子数量 j 相关的平均密度和代表性质量. $r_{ij}(=|\mathbf{r}_{ij}|)$ 表示粒子距离, $\mathbf{r}_{ij}(= \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ 表示粒子相对位置向量. 符号 $\langle \cdot \rangle$ 为 SPH 方法邻近粒子数值的近似值.

2.2 流体分析的控制方程

为求解不可压缩的流体问题, 应该在满足质量守恒和动量守恒定律的前提下, 得出两个自变量, 即流速 \mathbf{u} 和压力 p . 控制方程的拉格朗日形式定义如下:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \quad (4)$$

式中, ν 为动力粘性系数, \mathbf{g} 为重力加速度.

假设水的密度是恒定的, 基于这一假设, 可以将质量守恒定律 (式 (3)) 改写为:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5)$$

将式 (4) 和式 (5) 应用到粒子 i , 得到:

$$\frac{D\mathbf{u}_i}{Dt} \approx -\frac{1}{\rho_i} \langle \nabla p_i \rangle + \nu \langle \nabla^2 \mathbf{u}_i \rangle + \mathbf{g}_i \quad (6)$$

$$\langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle \approx 0 \quad (7)$$

2.3 SPH 方法中缓解不可压缩条件

ISPH 方法^[11], 使用投影法对运动方程的速度场和压力场进行分离, 以达到对压力场的隐式计算, 和速度场的显式计算. 另外, 使用投影法, 通过定义一个暂定状态, 可以对速度场和压力场进行分离.

下面将投影法应用到 SPH 方法中, 从 n 至 $n+1$ 对变量进行更新. 首先, 对式 (4) 中的时间导数项进行前向差分近似, 并将中间速度 \mathbf{u} 定义在一个中间状态, 以对速度进行分离:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} + \frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} \quad (8)$$

在分离后的加速度分量之间, 计算中间速度 \mathbf{u} 如下:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_i^n}{Dt} &= \nu \langle \nabla^2 \mathbf{u}_i^n \rangle + \mathbf{g}_i \\ \rightarrow (\text{predictor}) \mathbf{u}_i^* &= \mathbf{u}_i^n + \Delta t (\nu \langle \nabla^2 \mathbf{u}_i^n \rangle + \mathbf{g}_i) \end{aligned} \quad (9)$$

这里假定式 (9) 右边的第一项和第二项分别对应于式 (4) 的压力梯度项和其他项. 然后, 对从中间状态至下一个时间步的速度进行更新:

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \langle \nabla p_i^{n+1} \rangle$$

$$\rightarrow (\text{corrector}) \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* + \Delta \mathbf{u}^* \quad (10)$$

$$\Delta \mathbf{u}^* = -\Delta t \left(\frac{1}{\rho} \langle \nabla p_i^{n+1} \rangle \right) \quad (11)$$

如上所述, 通过实施两个单独过程, 以对速度的状态进行更新. 而压力是通过求解压力 Poisson 公式获得:

$$\langle \nabla^2 p_i^{n+1} \rangle = -\frac{\rho^0}{\Delta t} \langle \nabla \cdot \Delta \mathbf{u}_i^* \rangle = \frac{\rho^0}{\Delta t} \langle \nabla \cdot \mathbf{u}_i^* \rangle \quad (12)$$

为了缓解不可压缩条件, 作如下定义:

$$\langle \nabla^2 p_i^{n+1} \rangle \approx \frac{\rho^0}{\Delta t} \langle \nabla \cdot \mathbf{u}_i^* \rangle + \alpha \frac{\rho_i^0 - \langle \rho_i^n \rangle}{\Delta t^2} \quad (13)$$

在 SPH 方法中, 从粒子的分布中对密度进行数值计算. 在分析过程过程中很难始终满足恒定密度条件, 因为仅在邻近粒子为固定数量且粒子保持完全的均匀分布时, 密度才是恒定的. 因此, 有必要采用一个折中方案, 即: 密度长期没有变化, 但允许密度在瞬间存在一定程度的误差.

式 (13) 给出的压力 Poisson 方程完全服从无散度条件下的模型 (松弛参数为零). 此外, 当瞬间密度与初始密度吻合 (或密度小到可以忽略不计), 则压力 Poisson 方程和模型可被视为相同, 因为压力 Poisson 方程源项的第 2 项可以忽略不计. 根据该公式, 通过密度差项逐步消去分析过程中产生的累积误差, 使得即使长期计算, 密度也几乎保持恒定, 从而得到了较好的体积守恒方案.

2.4 利用虚拟标记进行边界处理

在粒子法的边界处理中, 一般会假设一个分析模型, 该模型的墙壁边界基本符合物理边界. 然而, 对于曲线或梯度边界, 很难得到粒子在边界内部的均匀分布. 因此, 在粒子模型的实际开发中, 粒子通常被放置在格子 (将 CAD 数据划分为网格结构) 的中心点或交点处. 通过这一简单预处理, 实现了粒子在一个区域的均匀分布; 然而, 粒子在边界的分布呈阶梯状, 这样的分布不同于实际物理边界中的平滑分布. 由此导致边界附近的流动不自然.

针对该问题, 本文处理的方法是: 将虚拟标记与墙壁粒子对称地放置在墙壁边界上. 虽然虚拟标记与 SPH 方法的计算没有直接关系, 但其测量点被用于对墙壁粒子施加适当的边界条件. 这里, 为满足边界表面

上的滑移条件, 假设墙壁粒子的速度为 \mathbf{v}_w , 则该速度与虚拟标记流动速度 \mathbf{v}_v 的对称性映像为:

$$\mathbf{v}_w = \mathbf{M} \mathbf{v}_v \quad (14)$$

式中, \mathbf{M} 为二阶张量, 其利用一个内向法线向量 $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ 和 Kronecker δ 执行镜像运算:

$$M_{ij} = \delta_{ij} - 2n_i n_j \quad (15)$$

为满足非滑移条件, 计算与虚拟标记流速 \mathbf{v}_v 满足点对称关系的墙壁边界流速 \mathbf{v}'_w , 并将其应用到墙壁粒子. 其中, \mathbf{v}'_w 使用点对称张量 R 计算如下:

$$\mathbf{v}'_w = R \mathbf{v}_v, R_{ij} = -\delta_{ij} \quad (16)$$

接下来, 确定虚拟标记的压力, 使之满足墙壁表面不均匀压力的 Neumann 条件^[12] 即可:

$$\partial p / \partial \mathbf{n} = \rho (\nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n} \quad (17)$$

式中, \mathbf{n} 为墙壁的内向法线向量.

3 分析模型的开发

在对海啸爆发进行建模时需要考虑作为主要障碍物的建筑物. 众所周知, 3D 分析的准确度很大程度上取决于分析模型的可靠性. 为了尽可能地将模型海拔高度和建筑物形态与实际的地理位置相匹配, 本文建立了一个利用 GIS 数据进行粒子分析模型的程序. 根据海拔上的 DEM 数据和建筑物上的 SHP 数据, 开发出粒子分析模型. DEM 数据是通过航测得到的高程数据, 并以等间隔的网格形式保存. DEM 数据剔除建筑物高度数据, 给出了地表高程. 由此, DEM 数据一般用作高程数据, 而 SHP 数据 (GIS 地理空间数据文件的一种格式) 一般用于定义建筑物的几何形状. 在 SHP 数据中, 每个建筑物的轮廓被定义为 2D 数据, 其中还包括了建筑物的高度信息. 当使用通用 3D CAD 数据定义地表和建筑物的轮廓时, 可以使用粒子分析的通用预处理程序 (例如 Meshman 服务) 将该 3D CAD 数据转换为粒子模型数据. 图 1 给出了本文粒子模型的开发流程.

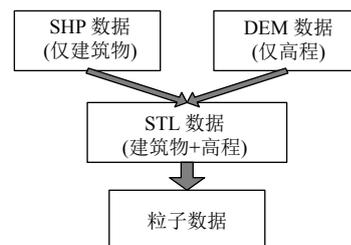


图 1 粒子模型的开发流程

下面将解释使用上述两类 GIS 数据, 将地表轮廓定义为 STL 数据 (类似于三角面片的一种 3D CAD 格式), 以及 STL 数据转换为粒子数据的一系列程序. 遵循的基本流程是: 从 DEM 数据中估计出每个建筑物位置的高程数据, 并使用 SHP 数据基于建筑物的平面轮廓对建筑物的高度进行扫描, 从而将高程数据转换为 3D CAD 数据. 由于地表通常包含斜坡; 因此, 在一个建筑物的底部和地表之间可能会产生间隙. 如果在粒子模型中不进行任何修正, 则粒子可能会进入该间隙. 因此, 当制备建筑物的 CAD 数据时, 将建筑物的底部降低一个恒定的量 (5 m), 如图 2 所示.

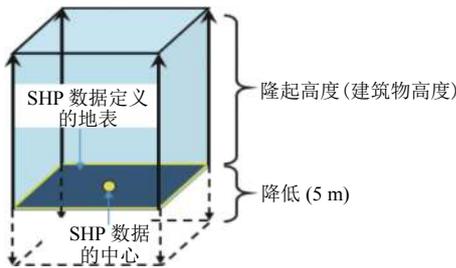


图 2 降低 STL 数据的建筑物底部

本文使用的粒子分析预处理程序能够为 CAD 数据中定义的多个表面, 独立地生成粒子. 并在粒子的位置与另一个粒子的位置发生重叠时, 按照优先次序移除重复粒子, 开发出具有均匀粒子分布的分析模型. 由此, 将定义地表的 STL 数据和定义建筑物的数据, 分别存储在单独的文件中. 接着, 如图 3 所示对建筑物和地面粒子进行制备, 通过将地面粒子设为高优先级以使得建筑物粒子和地面粒子在与地表相对应的区域中发生重叠时, 自动移除建筑物粒子.

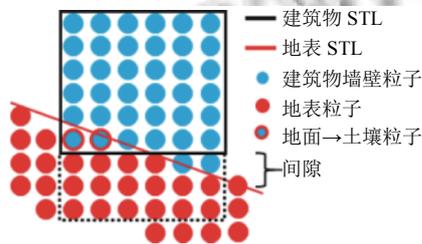


图 3 地面粒子

4 分析与评价

下面将基于前文解释的方法, 开发一个分析模型, 并使用 SPH 方法对一个沿海城市海啸爆发进行分析.

4.1 分析条件

直径为 2 米粒子的分析模型如图 4 所示. 在该分析中, 假设海啸的波形会急剧上升. 通过放置在目标区域下的水流对河流进行模拟. 假设河流的平均海拔低于海平面 4 m, 该河底部上为高度 8 m 的水体.

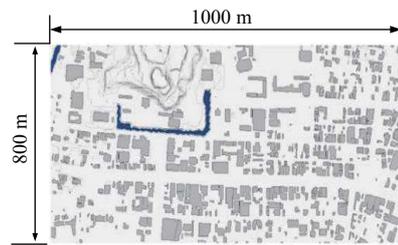


图 4 分析模型的示意图

基于长波理论, 该河的流速公式为 $c = \sqrt{gh}$, 波速为 9 m/s. 本文采用了滑移边界条件. 对粒子直径分别为 1 m、2 m 和 4 m 的 3 个案例进行了仿真, 并比较得出的结果. 时间增量被固定为 0.005 s, 时间步的总数为 30 000. 数值分析的其他条件如表 1 所示.

表 1 分析条件

粒子直径(m)	粒子数量	分析节点	分析时间
1	27 750 000	512	16 h
2	5 220 000	256	4 h
4	1 140 000	256	40 min

4.2 结果评价

在海啸流入开始后 60 s (时间步为 12 000) 时, 3 个案例的结果如图 5(a) 所示. 海啸粒子没有渗透入建筑物, 这说明了已成功开发出分析模型, 在建筑物和地面之间没有间隙. 在对 3 个案例的分析结果进行比较时, 本文发现被淹没的陆地面积随空间分辨率的增大而增加. 在对粒子直径 1 m 和 2 m, 以及 2 m 和 4 m 案例被淹没面积之间的差异进行比较时, 前者间的差异要小于后者间的差异, 这意味着数值分析的结果随空间分辨率的增加而收敛. 图 5(b) 给出了图 5(a) 中框内区域的放大视图, 该区域中差别较为明显. 图 5(b) 中定义的点 A、B、C 处测量到水位升高情况. 在不同分辨率模型之间的比较中, 海啸到达时间和水位升高历史表现出相似趋势.

由图 5, 在使用直径为 1 m 的粒子与使用直径为 2 m 的粒子案例中观察到了相同的趋势; 然而, 使用直径为 2 m 粒子的案例中观察到的趋势, 则未出现在粒子直径

为 4 m 的案例中. 即使使用 Meshman 从相同的 STL 数据中生成粒子, 但在不同分辨率下, 地形表示和建筑物形状均会发生变化. 特别是当使用低分辨率时, 其未能展示建筑物之间的小路, 从而导致海啸爆发中出现阻塞物. 举例来说, 单车道的平均道路宽度为 3.5 m, 而使用直径为 4 m 的粒子时, 分析模型不会展示出此类道路. 此外, 低分辨率将导致地面梯度的再现性较低, 从而使分析准确度较低.

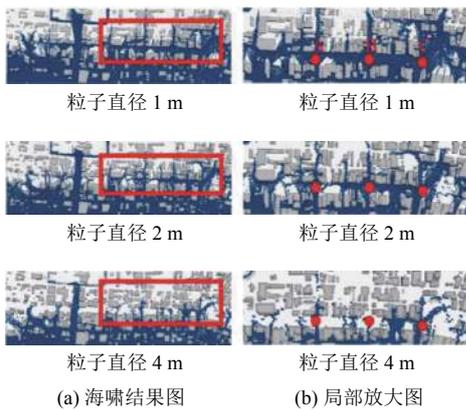


图 5 海啸爆发分析示意图

图 5 中没有展现的是, 在使用直径 1 m 的粒子时, 整个东侧的海拔大约比西部海拔低 1 m. 然而, 在使用直径为 2 m 或 4 m 的粒子时, 均未观察到这一趋势. 因此, 使用 1 m 粒子时, 可能会造成高程重现性的下降. 综上, 应该采用粒子直径为 2 m 的空间分辨率对沿海城市地区的海啸爆发进行建模, 该分辨率能够重现主要道路, 从而实现较高的准确度. 图 6 给出了海啸开始流入后 150 s (时间步 30 000 处) 时的被淹没区域.



图 6 海啸流入 150 s 后被淹没的区域

4.3 照片级的可视化

在传统的可视化方法中, 粒子一般被表示为原始形状. 使用这一可视化方法, 可以对计数的类型进行切换, 但照片缺乏真实感.

本文使用建筑领域可视化软件 Lumion 开发了 3D 动画. Lumion 提供了使用视差效果进行 3D 动画创建的功能, 支持创造带有真实感的 3D 动画, 还可以导入通用 CAD 数据, 可加入与景物、日照条件和阴影相关的数据. 因此, 只有通过分析模型中虚拟城市的 CAD 数据和海啸的 CAD 数据, 才能实现 3D 可视化. 此外, 在对海啸的表面进行定义后, 将建筑物的真实图像加入建筑数据, 并将水流纹理加入海啸数据中, 以产生真实感, 进行可视化的一系列程序如图 7 所示. 可视化的示例如图 8 所示.

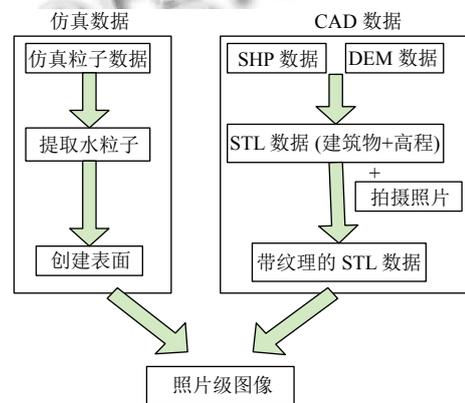


图 7 可视化方法的程序



图 8 3D 可视化照片的示例

4.4 与网格法的比较分析

网格法在诸多分析中经常使用. 在 3D 流动分析中, 当水波的波形变化显著变化时, 使用网格的数值分析方法 (例如限差分法和有限元法等) 会变得非常复杂. 在发生较大形变的过程中, 自由表面形状可能会发生显著变化, 会发展成不连续的表面, 网格也可能崩溃. 与之相比, 没有使用网格的粒子法在处理此类场景时具有一定优势, 其可以使用一个简单的算法对复杂的自由表面变化进行分析. 因此, 粒子法能够有效表达当爆发到陆地上以及在建筑物周围流动, 水波发生复杂变化的 3D 现象. 另外, 考虑复杂目标 (包括建筑物)

的分析模型时,粒子法的开发成本更低,因为在粒子法仅需要考虑粒子在目标区域中的放置问题。

在海啸爆发的3D分析中,无论使用的是网格方法还是粒子方法,都应该事先确定空间分辨率(粒子法背景下为平均粒子距离)和分析准确度之间的关系,特别是在3D分析中,由于极高的分析成本,应该尽可能降低分辨率。

5 结论和展望

本文利用3D粒子法(SPH方法)开发出沿海城市地区的海啸爆发分析模型。基于粒子法的空间分辨率和被淹没区域之间的关系,得出了进行海啸爆发分析所需的最小粒子距离。然后创建了具有真实感的3D动画快照。3D仿真验证了所提方法的有效性。通过比较在相同条件下进行的分析结果,确定了收敛解所需的最低空间分辨率。

未来,本文将着力开发能够对特定区域进行缩放的多步骤分析技术,对不同区域采用不同的粒子距离。因此,不同方法的结合和缩放分析将是本文后续研究方向。

参考文献

- 1 安超. 利用流固耦合模型研究影响海啸波产生、传播和骤升高度的因素 [硕士学位论文]. 北京: 北京大学, 2010.
- 2 张景新. 复杂地形下带自由表面水流的分离涡模拟. 计算物理, 2015, 32(5): 561–571. [doi: 10.3969/j.issn.1001-246X.2015.05.008]
- 3 李忠, 唐新明, 李少达, 等. 溃坝洪水演进的光滑粒子流体动力学分析. 测绘科学, 2016, 41(10): 115–119, 148.
- 4 丁雨淋, 杜志强, 朱庆, 等. 洪水淹没分析中的自适应逐点水位修正算法. 测绘学报, 2013, 42(4): 546–553.
- 5 孙臣良, 张峰. 基于 ArcGIS Engine 的大平矿库区 GIS 开发技术研究. 计算机应用与软件, 2013, 30(4): 296–298, 322. [doi: 10.3969/j.issn.1000-386x.2013.04.085]
- 6 Nießner M, Zollhöfer M, Izadi S, *et al.* Real-time 3D reconstruction at scale using voxel hashing. ACM Transactions on Graphics, 2013, 32(6): 169–178.
- 7 谢珊珊. 非线性对流扩散方程 LDG 方法的误差估计 [硕士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2016.
- 8 刘桂荣. 光滑粒子流体动力学. 长沙: 湖南大学出版社, 2005.
- 9 O-Tani H, Chen J, Hori M. Automatic combination of the 3D shapes and the attributes of buildings in different GIS data. Journal of Japan Society of Civil Engineers, 2014, 70(2): I_631–I_639.
- 10 Pourabdian M, Qate M, Javareshkian A, *et al.* Simulation of 2-D dam break using improved incompressible smoothed particle hydrodynamics based on projection method. Applied Mechanics and Materials, 2013, 390: 81–85. [doi: 10.4028/www.scientific.net/AMM.390.81]
- 11 Asai M, Aly AM, Sonoda Y, *et al.* A stabilized incompressible SPH method by relaxing the density invariance condition. Journal of Applied Mathematics, 2012, 45(11): 2607–2645.
- 12 李红艳, 周盛凡. Neumann 边界条件下强阻尼波动方程的一维全局吸引子. 数学学报, 2006, 49(6): 1381–1386. [doi: 10.3321/j.issn:0583-1431.2006.06.027]