计算机系统应用 ISSN 1003-3254, CODEN CSAOBN
Computer Systems & Applications,2019,28(3):36−42 [doi: 10.15888/j.cnki.csa.006809]

E-mail: csa@iscas.ac.cn
http://www.c-s-a.org.cn
Tel: +86-10-62661041

基于前景理论的不确定 TOPSIS 多属性决策方法①

梁　薇, 王应明

(福州大学 决策科学研究所, 福州 350116)
通讯作者: 梁　薇, E-mail: 452529567@qq.com

摘　要: 针对属性权重未知、属性值为犹豫模糊集的多属性决策问题, 本文提出一种基于前景理论和粗糙集的多属性决策方法, 充分考虑了决策者心理风险因素对决策结果的影响. 首先, 以正、负理想点作为参考点计算各属性下的前景价值函数, 定义新的综合前景值, 并根据给定的阈值得到判断矩阵; 然后, 根据判断矩阵进行属性约简, 确定属性权重; 最后, 计算各备选方案的加权综合前景值, 利用 TOPSIS 方法对备选方案进行排序, 并通过算例证实该方法的可行性和有效性.

关键词: 犹豫模糊集; 前景理论; 粗糙集; 多属性决策

引用格式: 梁薇,王应明.基于前景理论的不确定 TOPSIS 多属性决策方法.计算机系统应用,2019,28(3):36–42. http://www.c-s-a.org.cn/1003-3254/6809.html

Prospect Theory-Based TOPSIS Method for Multiple Attribute Decision Making with Uncertainty

LIANG Wei, WANG Ying-Ming

(Decision Sciences Institute, Fuzhou University, Fuzhou 350116, China)

Abstract: For the multi-attribute decision making problem with attribute weights being unknown and attribute values being hesitant fuzzy sets, this study proposes a multi-attribute decision making method based on prospect theory and rough set, which fully considers the influence of decision makers' psychological risk factors on decision results. Firstly, the positive and negative ideal points are used as reference points to calculate the prospect value function under each attribute and to define a new comprehensive prospect value, and a discernibility matrix is obtained according to the given threshold. Then, according to the discernibility matrix, attribute reduction is performed to determine the attribute weight. Finally, the weighted comprehensive prospect value of each alternative is calculated, and the TOPSIS method is used to rank all the alternatives. An example is given to illustrate the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Key words: hesitant fuzzy sets; prospect theory; rough sets; multiple attribute decision making

引言

多属性决策问题作为一个热门的研究问题, 各学者提出了不同的决策方法. 1965 年, Zadeh[1]首次提出了模糊集理论, 但随着决策情景的复杂化, 模糊集理论的局限性越来越明显. 因此, 许多国内外的研究学者对模糊理论进行拓展, 提出了直觉模糊集[2]、区间模糊集[3]等, 并将其广泛的应用于多属性决策问题. Torra 等[4]提出了模糊集的另一种拓展形式, 即犹豫模糊集, 它允许集合中元素的隶属度由多个值表示, 从而能够有效表达决策者的犹豫以及解决当存在多个决策者时意见不一致的问题, 在某种程度上避免了决策信息的流失. 犹豫模糊集作为一种新的处理模糊性和不确定性的有

① 基金项目: 国家自然科学基金 (61773123)
Foundation item: National Natural Science Foundation of China (61773123)
收稿时间: 2018-09-12; 修改时间: 2018-10-08; 采用时间: 2018-10-16; csa 在线出版时间: 2019-02-22

效工具, 引起了国内外学者的广泛关注. Xu 等[5]提出了犹豫模糊集的相关距离测度, 并将其应用于多属性决策问题中. Chen 等[6]基于优先级别关系, 提出了一种 HF-ELECTRE II 的多属性决策方法. Xu 等[7]利用最大偏差法确定属性权重, 提出基于 TOPSIS 的犹豫模糊多属性决策方法, 解决了属性权重部分已知的决策问题. 刘小弟等[8]在犹豫模糊的环境下, 提出基于正负理想点的双向投影测度的决策方法. Liao 等[9]针对犹豫模糊语言项集, 提出一种新的根据距离测度和相似测度的决策方法. Farhadinia 等[10]对犹豫模糊集进行扩展, 得到有序加权模糊集, 在此基础上提出一种新的多属性决策方法. 王新鑫等[11]提出一种基于专家对应准则对犹豫模糊集进行扩展的多属性决策方法, 并根据得分函数进行方案的优劣选择. 林松等[12]基于元素个数和元素间的偏差定义了一种新的犹豫度, 并提出新的符号距离测度, 提出多属性决策问题的新方法. Tang 等[13]提出了新的犹豫模糊集距离测量公式, 基于此提出了新的相似度公式, 并应用于能源政策评估的多属性决策问题中.

在现有文献分析的基础上, 可以看出以上的犹豫模糊多属性决策方法大多数没有考虑到决策者的风险偏好, 而是建立在假设决策者是完全理性的基础上. 在现实生活中, 由于知识匮乏和时间压力等因素的影响, 决策者是有限理性的. 此外, 在传统的决策方法中,用属性间的距离作为测量尺度会使决策结果不合理, 且仅仅只能反映数字曲线间的位置关系. 随着决策行为学的不断丰富与发展, 考虑决策者的不完全理性心理特征的多属性决策方法已成为现在重要的一个研究方向. 为克服此缺陷, 王应明等[14]针对属性权重未知的犹豫模糊多属性决策问题, 提出前景理论和 TOPSIS 相结合的决策方法. 但该方法需要用主观修正系数对权重进行修正, 在一定程度上带有较大的主观性, 且计算量较大. 鉴于此, 本文针对属性值为犹豫模糊集且属性权重完全未知的多属性决策问题, 引入粗糙集理论确定属性权重. 粗糙集理论[15]作为一种处理不确定性的数学工具, 具有不需要任何所处理问题的数据集合之外先验信息的优势. 因此,本文提出了一种基于前景理论和粗糙集的犹豫模糊多属性决策方法. 首先根据犹豫模糊数的前景函数定义了综合前景价值, 构造判断矩阵; 然后, 利用粗糙集理论能够在原有分类不变的条件下对冗余属性进行约简并确定属性权重; 用综合前景值代替相对贴近度, 利用犹豫模糊 TOPSIS 方法对各个备选方案进行排序, 得到最优方案; 最后, 通过一个算例来验证本文所提出方法的有效性和合理性, 且与前人的决策方法对比分析以凸显本文所提方法的实用性.

1 基础理论

1.1 粗糙集的基本知识

定义 1[16]. 设 (S,C,A,f) 为一个信息系统, 其中 S 为非空有限对象集, 即; C 为非空有限属性集, 即 $C=\{c_1,c_2,\cdots,c_m\}$; A 是属性值域; f 为 S 和 C 之间的关系集, $f:S\times C\rightarrow A$ 是信息函数.

设 R 是 A 上的一个等价关系,即$[x]_B^R=\{y\in S\,|(f(x,\mathrm{b}),f(y,b))\in R,\forall b\in B\}$, 令$R_B=\left\{[x]_B^R:x\in S\right\}$, R_B为对象集 S 中的所有等价类集合.

设$B\subseteq C$, 则集合 X 关于 B 的下近似集和上近似集为:

$$\underline{R}(X)=\left\{x\in X:[x]_B^R\subseteq X\right\}$$

$$\bar{R}(X)=\left\{x\in X:[x]_B^R\cap X\neq\emptyset\right\}$$

由下近似集可以定义 X 关于 B 的近似质量为:

$$r_B(X)=\frac{\left|\underline{R}(X)\right|}{|X|}$$

表示应用关系 R 正确分类的对象的比率.

设(S,C,A,f) 为一个信息系统, $c_j\in C$, 若 $R_C=R_{C-\{c_j\}}$, 则称属性 c_j 在属性集 C 中为冗余属性, 否则属性 c_j 在属性集 C 中即为必要属性. 而将冗余属性去除的过程, 称为属性约简. 属性集 C 中的冗余属性可能不止一个, 所有必要属性所构成的集合称为属性集 C 的核, 记为$core(C)$.

1.2 犹豫模糊集的基本知识

定义 2[17]. 设 X 是给定的一个论域, 则 X 上的犹豫模糊集为$H=\{\langle x,h_A(x)\rangle|x\in X\}$, 其中$h_A(x)\subseteq[0,1]$表示$x$属于集合$H$的所有可能隶属度构成; 其中一个犹豫模糊数为 $h=h_A(x)=\{\gamma|\gamma\in h_A(x)\}=H\left\{\gamma^1,\gamma^2,\cdots\gamma^l\right\}$, $\gamma^\lambda\in[0,1]$, $\lambda=1,2,\cdots,l$; 而犹豫模糊数h的补$h^c=H\left\{1-\gamma^1,1-\gamma^2,\cdots,1-\gamma^l\right\}$, 其中$l$为犹豫模糊数中的元素个数.

定义 3[18]. 设$h_1,h_2\in H$, 且设$l(h_1)=l(h_2)=l$, 则h_1和h_2间的距离定义为$d(h_1,h_2)=\sqrt{\frac{1}{l}\sum_{i=1}^{l}\left|\gamma_1^{\sigma(i)}-\gamma_2^{\sigma(i)}\right|^2}$,

其中, l为h_1,h_2中所含的元素个数, $\gamma_1^{\sigma(i)}$和$\gamma_2^{\sigma(i)}$分别表示h_1和h_2中第i大的元素.

1.3 前景理论的基本知识

定义 4. Tversky 和 Kahneman[19]给出的价值函数为幂函数, 即

$$v(\Delta x)=\begin{cases}\Delta x^{\alpha},\Delta x\geq 0\\-\theta(-\Delta x)^{\beta},\Delta x<0\end{cases}$$

其中, Δx是方案s_i相对于某一参考点的差值, 当$\Delta x\geqslant 0$时, 表示收益, 当$\Delta x<0$时, 表示损失; α和β分别表示决策者对收益或损失的敏感程度, $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$, 且α、β越大, 决策者越倾向于冒险; θ是损失规避系数, 且$\theta>1$, 表示相对于收益而言, 决策者对损失更加敏感.

定义 5[14]. 设两个犹豫模糊元中所含的元素个数是相同的, 若以h_2作为决策参考点, 则犹豫模糊元h_1的前景价值函数为:

$$v(h_1)=\begin{cases}(d(h_1,h_2))^{\alpha},h_1\geq h_2\\-\theta(d(h_1,h_2))^{\beta},h_1<h_2\end{cases}$$

2 前景理论下犹豫模糊 TOPSIS 决策方法

2.1 问题描述

本文将犹豫模糊多属性决策问题定义为一个四元组, 其中 $S=\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$为方案集, $N=\{1,2,\cdots,n\}$; $C=\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$为属性集, $M=\{1,2,\cdots,m\}$; 各属性的权重向量$W=[w_1,w_2,\cdots,w_m]^{\mathrm{T}}$未知, $w_j\in[0,1]$, 且$\sum_{j=1}^{m}w_j=1$. 决策者对各个方案的属性进行评估, 由于受到时间压力或对方案的了解程度不同等因素, 决策者进行评估时会出现犹豫不决的现象, 于是得到犹豫模糊元x_{ij}作为属性c_j的属性值, 并构成决策矩阵$X=\left(x_{ij}\right)_{n\times m}$. 设$f(s_i,c_i)=x_{ij}$, $A=\left\{a_{ij}:i\in N,j\in M\right\}$, 从而构成信息系统$(S,C,A,f)$.

2.2 决策方法

随着决策环境的日益复杂和决策专家评价方案属性值时的犹豫不决的现象, 确定属性权重的难度也逐渐增加. 同时在制定决策的实际过程中, 决策者常常受到其主观心理因素的影响. 因此, 本文在前景理论的基础上, 考虑决策者对损失和收益的不同偏好, 提出了一种犹豫模糊环境下的决策方法. 该方法根据属性的重要性程度利用粗糙集理论确定属性权重, 再使用 TOPSIS 方法对所有备选方案的进行优劣排序.

Step 1. 构造样本数据的犹豫模糊决策矩阵X, 首先, 对犹豫模糊数内的所有元素以递增的顺序排列, 将元素个数相对较少的犹豫模糊数按 Xu 等[20]提出的拓展规则进行拓展, 使所有犹豫模糊集都具有相同的元素个数. 然后为了消除不同量纲对决策结果的影响, 对成本型属性按 Zhu[21]提出的方法转化为效益型属性, 即:

$$x_{ij}=x_{ij}^{c}=H\left\{1-\gamma_{ij}^{1},1-\gamma_{ij}^{2},\cdots,1-\gamma_{ij}^{l}\right\}\tag{1}$$

Step 2. 确定属性c_j的正、负理想点x_j^{+}和x_j^{-}.

$$x_j^{+}=\left\{\max_{i=1}^{n}\left\langle x_{ij}^{\lambda}\right\rangle\right\}=\left\{\left(x_{ij}^{1}\right)^{+},\left(x_{ij}^{2}\right)^{+},\cdots,\left(x_{ij}^{l}\right)^{+}\right\}\tag{2}$$

$$x_j^{-}=\left\{\min_{i=1}^{n}\left\langle x_{ij}^{\lambda}\right\rangle\right\}=\left\{\left(x_{ij}^{1}\right)^{-},\left(x_{ij}^{2}\right)^{-},\cdots,\left(x_{ij}^{l}\right)^{-}\right\}\tag{3}$$

Step 3. 计算方案s_i在属性c_j下的属性值x_{ij}分别到x_j^{+}和x_j^{-}的距离, 即:

$$d_{ij}^{+}=d(x_{ij},x_j^{+})\tag{4}$$

$$d_{ij}^{-}=d(x_{ij},x_j^{-})\tag{5}$$

Step 4. 计算方案s_i在各属性下的前景价值函数. 根据前景理论中价值函数的概念可得, 当参考点为正理想解时, 则所有方案相对于正理想解而言, 都是损失的; 而当参考点为负理想解时, 则所有方案相对于负理想解而言, 都是收益的, 则:

$$v^{-}\left(d\left(x_{ij},x_j^{+}\right)\right)=-\theta\left(d\left(x_{ij},x_j^{+}\right)\right)^{\beta}\tag{6}$$

$$v^{+}\left(d\left(x_{ij},x_j^{-}\right)\right)=\left(d\left(x_{ij},x_j^{-}\right)\right)^{\alpha}\tag{7}$$

Step 5. 计算方案s_i在属性c_j 的综合前景值.

$$v_{ij}=\frac{\left|v^{+}\left(d\left(x_{ij},x_j^{-}\right)\right)\right|}{\left|\sum_{j=1}^{m}v^{-}\left(d\left(x_{ij},x_j^{+}\right)\right)\right|}\tag{8}$$

Step 6. 利用粗糙集理论进行属性约简, 同时确定属性c_j的权重w_j.

根据统计学方法, 将 V 中的值按大小排序, 然后根据实际情况设定阈值ω, 并构造判断矩阵$K=\left(k_{ij}\right)_{n\times m}$, 其中,

$$k_{ij}=\begin{cases}1,v_{ij\leq}\geq\omega\\0,v_{ij}<\omega\end{cases}\tag{9}$$

在信息系统(S,C,A,f)中, 建立关于属性集$B\subseteq C$的等价关系R_B, 使任意$s_i\in S$的关于属性集 B 的等价类

$[s_i]_B^R=\{x_k:m_{kj}=m_{ij},\forall c_j\in B\}$. 所有等价类集合依旧记为$R_B=\{[s_i]_B^R:i\in N\}$.

S 关于 B 的下近似集定义为:

$$\underline{S}=\{s_i:[s_i]_B^R\subseteq[s_i]_C^R,i\in N\},$$

由此可得, 近似质量为:

$$r_B(S)=\frac{|\underline{S}|}{|S|}$$

属性约简是在保证分类不变的前提下, 将冗余属性去除. 因为$r_C(S)=1$, 若存在$l\in M$,使$r_{C-\{c_l\}}(S)=1$, 则表明c_l是冗余属性. 属性的核是由其他所有的非冗余属性所构成的集合, 记作$core(C)$. 而对于任意的非冗余属性$c_j\in core(C)$, 其权重为:

$$w_j=\frac{1-r_{core(C)-\{c_j\}}(S)}{\sum\limits_{c_j\in core(C)}\left[1-r_{core(C)-\{c_j\}}(S)\right]}\tag{10}$$

此外, 有:

(1) $w_l=0,c_l\in C-core(C)$

(2) $w_j\in[0,1]$, 且 $\sum\limits_{c_j\in core(C)}w_j=1$

故可根据上式计算出各属性的权重w_j.

Step 7. 由式 (10) 所得出的属性权重, 计算各方案的加权综合前景值:

$$T_i=\sum_{j=1}^{m}w_jv_{ij}\tag{11}$$

根据T_i的大小对方案s_i进行排序, T_i越大, 方案s_i越优.

3 算例分析

3.1 问题描述

在现代企业活动中. 供应商已成为一种战略资源,供应商的选择问题在理论层面和现实层面都具有重大意义. 某企业为其核心零件选择合适的供应商, 相关部门经过初步评价, 选出 8 个供应商 (方案), 分别表示为$\{s_1,s_2,\cdots,s_8\}$. 为了在这 8 个供应商中做出最优选择, 分 5 个评价指标对他们进行评估, 这 5 个指标分别为产品价格、产品质量、交货周期、准时交货率和可信度, 分别表示为$\{c_1,c_2,\cdots,c_5\}$, 其中除产品价格为成本型属性, 其余皆为效益型属性. 相应的属性权重$\{w_1,w_2,\cdots,w_5\}$未知, 且满足$\sum\limits_{j=1}^{5}w_j=1$, $w_j>0$. 决策者对方案s_i按各属性c_j进行评价, 其评价结果以犹豫模糊矩阵的形式如表 1 所示.

表 1 犹豫模糊决策矩阵

方案	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
s_1	{0.2,0.5,0.6}	{0.4,0.6,0.7}	{0.3,0.5,0.8}	{0.1,0.3,0.6,0.7}	{0.1,0.3}
s_2	{0.2,0.6,0.7}	{0.2,0.7,0.8}	{0.1,0.4,0.5}	{0.2,0.3,0.7,0.8}	{0.2,0.3,0.5}
s_3	{0.1,0.2,0.4}	{0.4,0.7,0.8}	{0.2,0.4}	{0.2,0.5}	{0.3,0.7}
s_4	{0.3,0.7,0.8}	{0.1,0.4}	{0.2,0.4,0.5}	{0.1,0.2,0.3}	{0.1,0.3,0.7}
s_5	{0.3,0.6}	{0.2,0.3,0.4}	{0.4,0.7,0.8}	{0.3,0.4,0.5}	{0.3,0.7,0.8}
s_6	{0.4,0.5,0.6}	{0.5,0.7,0.8}	{0.4,0.6,0.7}	{0.3,0.4,0.6,0.7}	{0.1,0.5,0.6}
s_7	{0.3,0.4,0.7}	{0.1,0.3,0.5}	{0.2,0.3,0.4}	{0.1,0.3,0.6,0.7}	{0.2,0.5}
s_8	{0.2,0.5}	{0.2,0.4}	{0.1,0.3}	{0.3,0.4,0.7,0.8}	{0.2,0.4,0.7}

3.2 计算过程

首先根据式 (1) 将成本型属性转化为效益型属性, 本文假设决策者的风险偏好是风险规避型, 根据拓展规则, 犹豫模糊集中元素较少的犹豫模糊数可通过重复增加最小的元素, 使得决策矩阵中的犹豫模糊数都具有相同的元素个数.

利用式 (2) 式 (3) 确定正、负理想点:

$x_1^+=\{0.5,0.8,0.9\}$, $x_1^-=\{0.2,0.3,0.6\}$

$x_2^+=\{0.5,0.7,0.8\}$, $x_2^-=\{0.1,0.1,0.4\}$

$x_3^+=\{0.4,0.7,0.8\}$, $x_3^-=\{0.1,0.1,0.3\}$

$x_4^+=\{0.3,0.4,0.7,0.8\}$, $x_4^-=\{0.1,0.1,0.2,0.3\}$

$x_5^+=\{0.3,0.7,0.8\}$, $x_5^-=\{0.1,0.1,0.3\}$

分别用式 (4) 和式 (5) 计算方案s_i在每个属性下的属性值到各对应属性的正、负理想点的犹豫模糊欧几里得距离d_{ij}^+、d_{ij}^-. 分别记为$D^+=\left(d_{ij}^+\right)_{n\times m}$, $D^-=\left(d_{ij}^-\right)_{n\times m}$

$$D^{+}=\begin{bmatrix} 0.1915 & 0.1000 & 0.1291 & 0.1323 & 0.4655 \\ 0.2646 & 0.1732 & 0.3000 & 0.0707 & 0.2944 \\ 0.0577 & 0.0577 & 0.3873 & 0.3122 & 0.2380 \\ 0.3559 & 0.4761 & 0.2708 & 0.3969 & 0.2646 \\ 0.1414 & 0.3697 & 0.0000 & 0.2179 & 0.0000 \\ 0.2517 & 0.0000 & 0.0816 & 0.0707 & 0.2000 \\ 0.2000 & 0.3697 & 0.3464 & 0.1323 & 0.3416 \\ 0.0577 & 0.4082 & 0.4830 & 0.0000 & 0.1915 \end{bmatrix}$$

$$D^{-}=\begin{bmatrix} 0.2000 & 0.3786 & 0.3873 & 0.3000 & 0.0000 \\ 0.1414 & 0.4203 & 0.2082 & 0.3708 & 0.1732 \\ 0.4082 & 0.4509 & 0.1000 & 0.1225 & 0.2828 \\ 0.0577 & 0.0000 & 0.2160 & 0.0000 & 0.2582 \\ 0.2646 & 0.1291 & 0.4830 & 0.2000 & 0.4655 \\ 0.1633 & 0.4761 & 0.4082 & 0.3354 & 0.2887 \\ 0.1915 & 0.1291 & 0.1414 & 0.3000 & 0.1414 \\ 0.3559 & 0.0816 & 0.0000 & 0.3969 & 0.2944 \end{bmatrix}$$

用式 (6) 和式 (7) 计算正、负前景值分别为:

$$v^{-}=\begin{bmatrix} -0.5254 & -0.2966 & -0.3714 & -0.3794 & -1.1480 \\ -0.6983 & -0.4810 & -0.7799 & -0.2186 & -0.7671 \\ -0.1829 & -0.1829 & -0.9765 & -0.8079 & -0.6363 \\ -0.9065 & -1.1710 & -0.7127 & -0.9977 & -0.6983 \\ -0.4024 & -0.9373 & 0.0000 & -0.5887 & 0.0000 \\ -0.6682 & 0.0000 & -0.2481 & -0.2186 & -0.5459 \\ -0.5459 & -0.9373 & -0.8852 & -0.3794 & -0.8743 \\ -0.1829 & -1.0228 & -1.1860 & 0.0000 & -0.5254 \end{bmatrix}$$

$$v^{+}=\begin{bmatrix} 0.2426 & 0.4254 & 0.4340 & 0.3466 & 0.0000 \\ 0.1788 & 0.4664 & 0.2513 & 0.4177 & 0.2138 \\ 0.4546 & 0.4961 & 0.1318 & 0.1576 & 0.3291 \\ 0.0813 & 0.0000 & 0.2596 & 0.0000 & 0.3038 \\ 0.3103 & 0.1650 & 0.5271 & 0.2426 & 0.5102 \\ 0.2030 & 0.5204 & 0.4546 & 0.3824 & 0.3351 \\ 0.2335 & 0.1650 & 0.1788 & 0.3466 & 0.1788 \\ 0.4029 & 0.1103 & 0.0000 & 0.4434 & 0.3409 \end{bmatrix}$$

其中, $\alpha=\beta=0.88$, $\theta=2.25$[19].

根据式 (8) 计算综合前景值 $V=\left(v_{ij}\right)_{n\times m}$:

$$V=\begin{bmatrix} 0.0892 & 0.1564 & 0.1595 & 0.1274 & 0.0000 \\ 0.0607 & 0.1584 & 0.0853 & 0.1418 & 0.0726 \\ 0.1631 & 0.1781 & 0.0473 & 0.0565 & 0.1181 \\ 0.0181 & 0.0000 & 0.0579 & 0.0000 & 0.0677 \\ 0.1609 & 0.0856 & 0.2733 & 0.1258 & 0.2646 \\ 0.1208 & 0.3096 & 0.2704 & 0.2275 & 0.1994 \\ 0.0645 & 0.0456 & 0.0494 & 0.0957 & 0.0494 \\ 0.1381 & 0.0378 & 0.0000 & 0.1520 & 0.1169 \end{bmatrix}$$

根据统计学方法, 按实际情况保留前 55% 的信息, 即 $\omega=0.0892$, 根据式 (9) 构造判断矩阵 $K=\left(k_{ij}\right)_{n\times m}$:

$$K=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

因此, 根据粗糙集可得:

$R_C=\{\{s_1\},\{s_2\},\{s_3\},\{s_4\},\{s_5\},\{s_6\},\{s_7\},\{s_8\}\}$

$R_{C-\{c_1\}}=\{\{s_1\},\{s_2\},\{s_3\},\{s_4\},\{s_5\},\{s_6\},\{s_7\},\{s_8\}\}$

$R_{C-\{c_2\}}=\{\{s_1\},\{s_2,s_7\},\{s_3\},\{s_4\},\{s_5,s_6\},\{s_8\}\}$

$R_{C-\{c_3\}}=\{\{s_1\},\{s_2\},\{s_3\},\{s_4\},\{s_5,s_8\},\{s_6\},\{s_7\}\}$

$R_{C-\{c_4\}}=\{\{s_1\},\{s_2\},\{s_3\},\{s_4,s_7\},\{s_5\},\{s_6\},\{s_8\}\}$

$R_{C-\{c_5\}}=\{\{s_1,s_6\},\{s_2\},\{s_3\},\{s_4\},\{s_5\},\{s_7\},\{s_8\}\}$

$R_{C-\{c_1,c_2\}}=\{\{s_1\},\{s_2,s_7\},\{s_3\},\{s_4\},\{s_5,s_6\},\{s_8\}\}$

$R_{C-\{c_1,c_3\}}=\{\{s_1,s_2\},\{s_3\},\{s_4\},\{s_5,s_8\},\{s_6\},\{s_7\}\}$

$R_{C-\{c_1,c_4\}}=\{\{s_1\},\{s_2\},\{s_3\},\{s_4,s_7\},\{s_5\},\{s_6\},\{s_8\}\}$

$R_{C-\{c_1,c_5\}}=\{\{s_1,s_6\},\{s_2\},\{s_3\},\{s_4\},\{s_5\},\{s_7,s_8\}\}$

由于 $r_{C-\{c_1\}}(S)=1$, 所以 c_1 为冗余属性, 且属性 c_1 的属性权重 $w_1=0$, 属性的核为 $core(C)=\{c_2,c_3,c_4,c_5\}$, 且:

$$r_{core(C)-\{c_2\}}(S)=\frac{4}{8},\ r_{core(C)-\{c_3\}}(S)=\frac{4}{8}$$

$$r_{core(C)-\{c_4\}}(S)=\tfrac{6}{8},\ r_{core(C)-\{c_5\}}(S)=\tfrac{4}{8}$$

由式 (10) 可得,

$$w_2=\frac{1-\frac{4}{8}}{\left(1-\frac{4}{8}\right)+\left(1-\frac{4}{8}\right)+\left(1-\frac{6}{8}\right)+\left(1-\frac{4}{8}\right)}=\frac{2}{9},$$ 同理可得, $w_3=\dfrac{2}{9}, w_4=\dfrac{3}{9}, w_5=\dfrac{2}{9}$.

根据式 (11) 计算综合加权前景值

$T_1=0.0779, T_2=0.0824,$

$T_3=0.0556, T_4=0.0279,$

$T_5=0.1615, T_6=0.1802,$

$T_7=0.0538, T_8=0.0766.$

由此可得, 方案的优劣排序结果为 $s_6>s_5>s_8>s_1>s_2>s_3>s_7>s_4$, 因此最佳供应商为 s_6.

3.3 比较分析

为了验证本文方法的有效性, 将与文献[14]及文献[22]所提出的犹豫模糊多属性决策方法进行对比. 文献[14]在决策过程中考虑决策者的主观风险偏好, 利用犹豫模糊熵确定属性权重, 基于 TOPSIS 方法对方案

进行排序.文献[22]在不考虑决策者的主观风险偏好的情况下, 利用最大偏差法确定属性权重, 然后通过贴近度对备选方案进行优劣排序.

(1) 文献[14]利用犹豫模糊熵确定属性权重, 计算本文算例, 求得属性权重为$W = (0.1970, 0.1955, 0.1910, 0.2095, 0.2071)$. 然后通过计算方案的收益损失比值$C_i$对各备选方案进行排序, 结果如下所示:

$$C_1 = 1.0548,\ C_2 = 1.0967,\ C_3 = 0.8541,$$
$$C_4 = 0.2436,\ C_5 = 1.1248,\ C_6 = 2.1033,$$
$$C_7 = 0.7020,\ C_8 = 0.8700.$$

根据C_i值大小对方案进行排序, 可得: $s_6 > s_5 > s_2 > s_1 > s_8 > s_3 > s_7 > s_4$.此方法得到的最优结果也是$s_6$, 但在具体的排序上略有差别. 其原因主要在于文献[14]所提出的决策方法中要根据决策者对指标集的不同偏好确定主观的权重修正系数, 对熵权进一步的修正,所求权重在一定程度上具有主观色彩, 于是会对决策的排序结果产生影响. 而本文基于粗糙集确定属性权重,根据属性的重要程度对冗余属性进行剔除且不改变原有的分类情况, 降低决策者对属性信息的主观随意性, 其计算过程相对客观.此外, 与文献[14]所提出的决策方法相比,本文方法计算过程更加简洁明了, 计算量相对小,决策结果更加符合实际情况.

(2) 文献[22]首先利用最大偏差法确定属性的权重$W = (0.1774, 0.2038, 0.1963, 0.2414, 0.1469)$, 再分别计算方案$s_i$到正、负理想解的距离, 同时通过距离可以得到各备选方案的相对贴近度$CI(s_i)$:

$$CI(s_1) = -0.9197,\ CI(s_3) = -1.1813,$$
$$CI(s_3) = -1.1232,\ CI(s_4) = -3.1385,$$
$$CI(s_5) = -0.7105,\ CI(s_6) = 0,$$
$$CI(s_7) = -2.0168,\ CI(s_8) = -1.5093.$$

根据相对贴近度的大小对方案进行优劣排序, 得到如下结果: $s_6 > s_5 > s_1 > s_2 > s_3 > s_8 > s_7 > s_4$. 由上可以看出两种决策方法的排序结果不全一致, 原因是文献[22]是以各属性值间的偏差程度来确定属性权重, 而本文是根据属性的重要度来进行分析计算, 属性的重要性越大则该属性占有的权重越大, 利用属性约简剔除冗余属性, 使决策过程更加具有说服力. 此外, 文献[22]仅仅只基于各个备选方案到正、负理想点的贴近度来对方案进行优劣排序, 没有考虑到决策者对损失、收益偏好的不同. 本文在决策过程中对决策者面临收益和损失时心理特征的不同进行了充分的考虑, 更加全面, 更加符合实际情况. 但两种方法的最优选择和最差选择是一致的, 分别为s_6和s_4, 表明本文的方法可以有效解决权重完全未知的犹豫模糊多属性决策问题.

4 结论

本文针对多属性决策问题中, 属性权重完全未知的情况, 提出一种基于前景理论和粗糙集相结合的决策方法, 能够在原有分类不变的情况下剔除冗余属性, 并确定非冗余属性的权重. 进一步使用 TOPSIS 方法对备选方案进行优劣排序. 该方法既考虑了各方案属性值到正、负理想解的客观距离, 又考虑了决策者主观的风险偏好, 使决策结果更加符合决策者的心理预期, 解决了只用客观衡量尺度作为比较标准的不合理之处, 从而使决策结果更加实际, 更加具有参考价值. 该方法概念清晰、计算简便, 并可以运用于实际多属性决策问题中, 如供应商、投资对象的选择等决策问题, 具有一定的应用价值.

参考文献

1 Zadeh LA. Fuzzy sets. Information and Control, 1965, 8(3): 338–353. [doi: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X]

2 Atanassov KT. Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87–96. [doi: 10.1016/S0165-0114(86)80034-3]

3 Turksen IB. Interval valued fuzzy sets based on normal forms. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(2): 191–210. [doi: 10.1016/0165-0114(86)90077-1]

4 Torra V. Hesitant fuzzy sets. International Journal of Intelligent Systems, 2010, 25(6): 529–539.

5 Xu ZS, Xia MM. On distance and correlation measures of hesitant fuzzy information. International Journal of Intelligent Systems, 2011, 26(5): 410–425. [doi: 10.1002/int.v26.5]

6 Chen N, Xu ZS. Hesitant fuzzy ELECTRE II approach: A new way to handle multi-criteria decision making problems. Information Sciences, 2015, 292: 175–197. [doi: 10.1016/j.ins.2014.08.054]

7 Xu ZS, Zhang XL. Hesitant fuzzy multi-attribute decision making based on TOPSIS with incomplete weight information. Knowledge-Based Systems, 2013, 52(6): 53–64.

8 刘小弟, 朱建军, 刘思峰. 犹豫模糊信息下的双向投影决策方法. 系统工程理论与实践, 2014, 34(10): 2637–2644. [doi: 10.12011/1000-6788(2014)10-2637]

9 Liao HC, Xu ZS, Zeng XJ. Distance and similarity measures

for hesitant fuzzy linguistic term sets and their application in multi-criteria decision making. Information Sciences, 2014, 271(3): 125–142.

10 Farhadinia B, Xu ZS. Distance and aggregation-based methodologies for hesitant fuzzy decision making. Cognitive Computation, 2017, 9(1): 81–94. [doi: 10.1007/s12559-016-9436-2]

11 王新鑫, 杨雁, 徐泽水, 等. 基于专家对应准则的犹豫模糊多属性群决策方法. 模糊系统与数学, 2017, 31(1): 101–108.

12 林松, 刘小弟, 朱建军, 等. 基于改进符号距离的权重未知犹豫模糊决策方法. 控制与决策, 2018, 33(1): 186–192.

13 Tang XA, Peng ZL, Ding HN, *et al*. Novel distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets and their applications to multiple attribute decision making. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2018, 34(6): 3903–3916.

14 王应明, 阙翠平, 蓝以信. 基于前景理论的犹豫模糊TOPSIS多属性决策方法. 控制与决策, 2017, 32(5): 864–870.

15 Pawlak Z. Rough sets. International Journal of Computer & Information Sciences, 1982, 11(5): 341–356.

16 Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Rough sets theory for multicriteria decision analysis. European Journal of Operational Research, 2001, 129(1): 1–47. [doi: 10.1016/S0377-2217(00)00167-3]

17 Torra V, Narukawa Y. On hesitant fuzzy sets and decision. 2009 IEEE International Conference on Fuzzy Systems. Jeju Island, South Korea. 2009. 1378–1382.

18 Xu ZS, Xia MM. Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets. Information Sciences, 2011, 181(11): 2128–2138. [doi: 10.1016/j.ins.2011.01.028]

19 Tversky A, Kahneman D. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. Journal of Risk and Uncertainty, 1992, 5(4): 297–323. [doi: 10.1007/BF00122574]

20 Xu ZS, Xia MM. Distance and similarity measures for hesitant fuzzy sets. Information Sciences, 2011, 181(11): 2128–2138. [doi: 10.1016/j.ins.2011.01.028]

21 Zhu B, Xu ZS. Hesitant fuzzy Bonferroni means for multi-criteria decision making. Journal of the Operational Research Society, 2013, 64(12): 1831–1840. [doi: 10.1057/jors.2013.7]

22 张小路. 基于犹豫模糊信息的多属性决策方法研究[博士学位论文]. 南京: 东南大学, 2015.