

基于前景理论的犹豫二元语义灰关联群决策法^①



刘蕊¹, 王秋萍¹, 王晓峰¹, 闫海霞²

¹(西安理工大学 理学院, 西安 710054)

²(西安理工大学 高科学院, 西安 710109)

通讯作者: 王秋萍, E-mail: qpwang@xaut.edu.cn

摘要: 针对偏好信息为犹豫二元语义形式、专家权重和属性权重均完全未知的多属性群决策问题, 基于前景理论和灰色关联分析的思想, 提出一种多属性群决策方法. 首先, 利用矩阵拉直运算和灰色关联分析法确定专家权重, 利用偏差最大化法确定属性权重. 其次, 给出了两个犹豫二元语义元的比较方法, 结合该比较方法确定各决策矩阵的正、负理想方案, 并以此作为决策参考点. 然后, 根据前景理论和灰色关联系数确定犹豫二元语义环境下的前景价值函数, 进而确定各方案的收益损失比值, 并据此对候选方案进行排序. 最后, 将所提方法应用于一个投资决策算例, 其结果表明了该方法的合理性和有效性.

关键词: 犹豫二元语义元; 前景理论; 矩阵拉直运算; 灰关联分析; 多属性群决策

引用格式: 刘蕊, 王秋萍, 王晓峰, 闫海霞. 基于前景理论的犹豫二元语义灰关联群决策法. 计算机系统应用, 2019, 28(3): 152-157. <http://www.c-s-a.org.cn/1003-3254/6800.html>

Hesitant 2-Tuple Linguistic Grey Relational Group Decision-Making Approach Based on Prospect Theory

LIU Rui¹, WANG Qiu-Ping¹, WANG Xiao-Feng¹, YAN Hai-Xia²

¹(Faculty of Sciences, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054, China)

²(Hi-Tech College of Xi'an University of Technology, Xi'an 710109, China)

Abstract: For the multi-attribute group decision-making problems, where the information of the attribute weights and the expert weights is completely unknown and the preference information is in the form of hesitant 2-tuple linguistic, a multi-attribute group decision-making method based on the prospect theory and the grey relation analysis is proposed. Firstly, the weights of the experts are determined by the matrix vec operator and the grey relation analysis, and the weights of attributes are calculated by the maximizing deviation method. Subsequently, a comparison method of the hesitant 2-tuple linguistic elements is given, and the positive and negative ideal solutions based on that are determined and used as the decision reference point. Then the hesitant 2-tuple linguistic prospect value function according to the prospect theory and the grey relational coefficient is acquired, and then the ratio of the gains to losses of the alternatives is obtained, and the alternatives are ranked accordingly. Finally, the proposed method is applied to a numerical example of investment decision, and the results show the rationality and effectiveness of the method.

Key words: hesitant 2-tuple linguistic element; prospect theory; matrix vec operator; grey relational analysis; multi-attribute group decision-making

① 基金项目: 国家自然科学基金 (61772416); 陕西省教育厅 2015 年科研计划 (15JK2068)

Foundation item: National Natural Science Foundation of China (61772416); 2015 Scientific Research Program of Education Bureau, Shaanxi Province (15JK2068)

收稿时间: 2018-09-05; 修改时间: 2018-09-27; 采用时间: 2018-10-09; csa 在线出版时间: 2019-02-22

灰色关联分析是灰色系统理论中的一个重要方法,通常能降低问题的复杂度,并获得量化的结果.其主要思想是根据序列曲线几何形状的相似程度来判断序列之间的联系是否紧密,一般而言,曲线越接近,相应序列之间的关联度就越大,反之就越小^[1].基于邓聚龙教授提出的灰色关联分析模型,学者们在理论研究和实际应用中都取得了丰硕的成果^[2-4].

考虑到决策者在进行决策时常常不是完全理性的,而是具备有限理性的决策特征,美国心理学家 Kahneman^[5]结合心理学的相关理论于 1979 年提出了前景理论,该理论考虑了决策者在决策过程中的心理活动和行为特征,可以更加现实地反映和描述决策者的实际决策过程.近年来,前景理论已成为决策领域的研究热点之一.文献[6,7]应用前景理论解决风险型混合多准则决策问题.文献[8]构建了基于证据理论和前景理论的拓展型 VIKOR 法解决犹豫-直觉模糊语言不确定多准则决策问题.文献[9]结合前景理论和逼近理想解法解决犹豫模糊多属性决策问题.文献[10]结合前景理论和灰色关联分析的思想给出了一种基于二元语义前景关联分析的风险型多准则决策方法.

由于现实多属性决策问题的复杂性,决策者有时更乐于使用语言术语^[11]表达自己的偏好.然而,语言评价信息在处理过程中往往存在信息失真和丢失的问题.为此,西班牙学者 Herrera^[12]提出利用二元语义模型描述语言评价信息,避免了以往研究的缺陷.该模型用 2 元组表示语言信息,这个 2 元组由一个语言术语和在 $[-0.5, 0.5]$ 中的一个数值组成.考虑到决策者可能会在 $[-0.5, 0.5]$ 中的几个值之间犹豫, Beg^[13]给出了犹豫二元语义信息模型的概念.该模型含有一个语言术语和几个可能的符号转移值,比二元语义模型更好地表达了决策问题中的模糊性和不确定性,因而有必要研究基于犹豫二元语义信息的多属性群决策问题.

基于以上分析,本文汲取前景理论和灰色关联分析法的优点,提出了一种犹豫二元语义多属性群决策方法.该方法确定了专家权重和属性权重,定义了新的犹豫二元语义评价信息间的比较方法,基于前景理论和灰色关联系数确定犹豫二元语义前景价值函数,并根据各方案的收益损失比值对方案进行排序.该方法在灰色关联分析法的基础上考虑到了决策者的有限理性行为,从而可以得到更加合理的决策结果.

1 基础概念

1.1 犹豫二元语义术语集

犹豫二元语义信息模型是用来处理用一个语言术语描述并且决策者在可能的符号转移值之间感到犹豫不决的情况.

定义 1^[13]. 设 X 为一论域, $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$ 为语言术语集, 则 X 上的一个犹豫二元语义术语集 A 可表示为:

$$A = \{(x, h(x)) | x \in X\}$$

其中, $h(x) = (s_i, \alpha_{ij})$, s_i 为 S 上的一个语言术语, $\alpha_{ij} = \{a_k | k = 1, 2, \dots, l(\alpha_{ij})\}$ 是 $[-0.5, 0.5]$ 上的一个有限子集, 表示 s_i 可能的符号转移值. $l(\alpha_{ij})$ 表示 α_{ij} 中符号转移值的个数. 称 $h(x)$ 为犹豫二元语义元, 简记为 $h = h(x)$.

下面给出两个犹豫二元语义元的优劣比较方法.

定义 2. 设 (s_i, α_{ij}) 与 (s_l, α_{lm}) 是两个任意的犹豫二元语义元, $\alpha_{ij} = \{a_k | k = 1, 2, \dots, l(\alpha_{ij})\}$, $\alpha_{lm} = \{b_n | n = 1, 2, \dots, l(\alpha_{lm})\}$, 则犹豫二元语义元的序关系定义如下:

- (1) 若 $s_i > s_l$, 则 $(s_i, \alpha_{ij}) > (s_l, \alpha_{lm})$
- (2) 若 $s_i = s_l$, 则:
 - 1) 若 $e(\alpha_{ij}) > e(\alpha_{lm})$, 则 $(s_i, \alpha_{ij}) > (s_l, \alpha_{lm})$
 - 2) 若 $e(\alpha_{ij}) = e(\alpha_{lm})$, 则 $(s_i, \alpha_{ij}) \sim (s_l, \alpha_{lm})$

其中, $e(\alpha_{ij}) = \frac{1}{l(\alpha_{ij})} \sum_{a_k \in \alpha_{ij}} a_k$, $e(\alpha_{lm}) = \frac{1}{l(\alpha_{lm})} \sum_{b_n \in \alpha_{lm}} b_n$.

定义 3^[13]. 设 (s_i, α_{ij}) 与 (s_l, α_{lm}) 是两个任意的犹豫二元语义元, $\alpha_{ij} = \{a_k | k = 1, 2, \dots, l(\alpha_{ij})\}$, $\alpha_{lm} = \{b_n | n = 1, 2, \dots, l(\alpha_{lm})\}$, 则 (s_i, α_{ij}) 和 (s_l, α_{lm}) 之间的距离定义如下:

$$d((s_i, \alpha_{ij}), (s_l, \alpha_{lm})) = |i - l| + \max \left\{ \max_{a_k \in \alpha_{ij}} \left\{ \min_{b_n \in \alpha_{lm}} (|a_k - b_n|) \right\}, \max_{b_n \in \alpha_{lm}} \left\{ \min_{a_k \in \alpha_{ij}} (|a_k - b_n|) \right\} \right\} \quad (1)$$

1.2 前景理论

前景理论是 Kahneman 提出的一种基于“有限心理”的决策理论, 该理论包含价值函数和决策权重函数两个核心要素^[7]. 其中, 价值函数是基于决策者的认知和心理因素, 对效用函数进行改进得到的. 通过不断地实验, Tversky 和 Kahneman^[14]提出了幂函数形式的价值函数:

$$v(\Delta x) = \begin{cases} (\Delta x)^\alpha, & \Delta x \geq 0 \\ -\theta(-\Delta x)^\beta, & \Delta x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中, Δx 表示与参考点比较之后的价值得失, $\Delta x \geq 0$ 表示获得收益, $\Delta x < 0$ 表示遭受损失. α 、 β 分别表示收益和损失区域的风险态度系数, 满足 $0 < \alpha, \beta < 1$. θ 为损失规避系数, 若 $\theta > 1$, 则决策者对损失更敏感.

2 基于前景理论的犹豫二元语义灰关联群决策法

设犹豫二元语义多属性群决策问题中的方案集为 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, 属性集为 $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, 决策群体为 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_t\}$. 用 $W^k = (\omega_1^k, \omega_2^k, \dots, \omega_n^k)^T$ 表示决策者 $e_k (k = 1, 2, \dots, t)$ 所给决策矩阵中的属性权重向量, $\omega_j^k \in [0, 1]$, 并且满足 $\sum_{j=1}^n \omega_j^k = 1$. 用 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t)^T$ 表示决策者的权重向量, $\lambda_k \in [0, 1]$, 并且满足 $\sum_{k=1}^t \lambda_k = 1$. 设 $X^k = (h_{ij}^k)_{m \times n}$ 表示决策者 e_k 对候选方案集 A 在属性集 C 下的决策矩阵, 其中, $h_{ij}^k = (s_{ij}^k, \alpha_{ij}^k)$ 表示决策者 e_k 对候选方案 A_i 在属性 C_j 下的犹豫二元语义评价价值.

决策者权重和属性权重分别反映了决策者在决策群体中、属性在属性集中的相对重要程度, 权重系数的大小将直接影响评估结果的合理性, 因此, 本文将基于决策者给出的决策信息利用灰关联分析法确定决策者权重, 利用偏差最大化法确定属性权重.

2.1 决策者权重的确定

灰色关联分析法是基于曲线几何形状的相似程度的思想来分析各因素间的关联程度的. 本文利用灰色关联分析法确定决策者权重, 首先通过矩阵拉直运算将各决策者所给决策矩阵分别按行拉直成一个长向量, 然后比较各决策者所给决策信息与其他决策者的决策信息之间的差异. 差异越小, 说明与决策群体的决策结果越接近, 关联程度就越大, 则赋予该决策者的权重就越大. 决策者权重的具体求解过程如下:

(1) 将决策者 $e_k (k = 1, 2, \dots, t)$ 所给决策矩阵 $X^k = (h_{ij}^k)_{m \times n}$ 按行依次拉直成一个长向量 \bar{X}^k , 即:

$$\bar{X}^k = (h^k(s))_{1 \times mn} = (h_{11}^k, h_{12}^k, \dots, h_{1n}^k, h_{21}^k, h_{22}^k, \dots, h_{2n}^k, \dots, h_{m1}^k, h_{m2}^k, \dots, h_{mn}^k)_{1 \times mn}, s = 1, 2, \dots, mn.$$

(2) 取决策者 $e_k (k = 1, 2, \dots, t)$ 的决策信息 \bar{X}^k 为参考序列, 决策群体的决策信息 $\bar{X}^1, \bar{X}^2, \dots, \bar{X}^t$ 为比较序列, 则决策者 e_k 与第 l 个决策者 e_l 的关联系数为:

$$r_l^k(s) = \frac{\min_l \min_s d(h^k(s), h^l(s)) + \rho \max_l \max_s d(h^k(s), h^l(s))}{d(h^k(s), h^l(s)) + \rho \max_l \max_s d(h^k(s), h^l(s))} \quad (3)$$

其中, ρ 为分辨系数, 且 $\rho \in (0, 1)$, ρ 越小, 分辨率越高, 一般取 $\rho = 0.5$. 于是, 决策者 e_k 与第 l 个决策者 e_l 的关联度为:

$$r_l^k = \frac{1}{mn} \sum_{s=1}^{mn} r_l^k(s) \quad (4)$$

(3) 确定决策者 $e_k (k = 1, 2, \dots, t)$ 与决策群体的平均关联度为:

$$r^k = \frac{1}{t} \sum_{l=1}^t r_l^k \quad (5)$$

(4) 确定决策者 $e_k (k = 1, 2, \dots, t)$ 的权重, 即:

$$\lambda_k = r^k / \sum_{l=1}^t r^l \quad (6)$$

2.2 属性权重的确定

偏差最大化法是王应明^[15]提出的一种确定属性权重的方法. 根据该法的思想, 如果属性 C_j 下候选方案的评价价值之间有显著的差异, 那么属性 C_j 在决策过程中扮演着相对重要的角色, 则赋给属性 C_j 的权重应越大, 反之则越小. 基于偏差最大化方法构建如下的优化模型来求解决策者 e_k 所给的犹豫二元语义决策矩阵 X^k 中的属性权重:

$$\begin{cases} \max D(\omega^k) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^m \omega_j^k d(h_{ij}^k, h_{lj}^k) \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n (\omega_j^k)^2 = 1, \omega_j^k > 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (7)$$

其中, $D(\omega^k)$ 表示所有方案与其他方案的总偏差值, $d(h_{ij}^k, h_{lj}^k)$ 表示决策者 e_k 对候选方案 A_i, A_l 在属性 C_j 下的犹豫二元语义评价价值 h_{ij}^k 与 h_{lj}^k 之间的距离. 利用拉格朗日乘数法求解上述模型可得:

$$\omega_j^k = \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^m d(h_{ij}^k, h_{lj}^k) / \sqrt{\sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^m d(h_{ij}^k, h_{lj}^k) \right]^2} \quad (8)$$

归一化属性权重, 可得:

$$(\omega_j^k)^* = \omega_j^k / \sum_{j=1}^n \omega_j^k (j = 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

2.3 正、负前景值

在前景理论中, 决策者们主要依据收益值和损失值来分析问题, 而收益值和损失值是根据参考点

来衡量的,因而根据不同的参考点得到的收益值和损失值也是不同的.基于文献[16],本文以正、负理想方案作为决策参考点.记正、负理想方案分别为 $(A^+)^k = ((h_1^+)^k, (h_2^+)^k, \dots, (h_n^+)^k)$, $(A^-)^k = ((h_1^-)^k, (h_2^-)^k, \dots, (h_n^-)^k)$, 其中,

$$(h_j^+)^k = \begin{cases} \max_i h_{ij}^k, & \text{效益型属性 } C_j \\ \min_i h_{ij}^k, & \text{成本型属性 } C_j \end{cases} \quad (10)$$

$$(h_j^-)^k = \begin{cases} \min_i h_{ij}^k, & \text{效益型属性 } C_j \\ \max_i h_{ij}^k, & \text{成本型属性 } C_j \end{cases} \quad (11)$$

若以正理想方案 $(A^+)^k$ 为参考点,则若方案 A_i 劣于 $(A^+)^k$,此时对于决策者而言是面临损失的,并且方案 A_i 与 $(A^+)^k$ 的关联程度越大损失越小;若以负理想方案 $(A^-)^k$ 为参考点,则若方案 A_i 优于 $(A^-)^k$,此时对于决策者而言是面临收益的,并且方案 A_i 与 $(A^-)^k$ 的关联程度越大收益越小.因此,可称:

$$v_{ij}^k = \begin{cases} (1 - (\xi_{ij}^-)^k)^\alpha, & \text{以负理想方案为参考点} \\ -\theta \cdot [-((\xi_{ij}^+)^k - 1)]^\beta, & \text{以正理想方案为参考点} \end{cases} \quad (12)$$

为犹豫二元语义决策矩阵 X^k 中方案 $A_i (i=1, 2, \dots, m)$ 在属性 $C_j (j=1, 2, \dots, n)$ 下的前景价值函数.其中, $(\xi_{ij}^+)^k$ 和 $(\xi_{ij}^-)^k$ 分别为犹豫二元语义决策矩阵 X^k 中方案 A_i 在属性 C_j 下与 $(A^+)^k, (A^-)^k$ 的关联系数.于是,记决策矩阵 X^k 中方案 A_i 在属性 C_j 下的正前景值为 $(v_{ij}^+)^k = (1 - (\xi_{ij}^-)^k)^\alpha$,此时,可视作收益;负前景值为 $(v_{ij}^-)^k = -\theta \cdot [-((\xi_{ij}^+)^k - 1)]^\beta$,此时,可视作损失.

决策者 e_k 关于方案 A_i 的正、负前景值分别为:

$$(v_i^+)^k = \sum_{j=1}^n (\omega_j^k) * (v_{ij}^+)^k, \quad i=1, 2, \dots, m, k=1, 2, \dots, t \quad (13)$$

$$(v_i^-)^k = \sum_{j=1}^n (\omega_j^k) * (v_{ij}^-)^k, \quad i=1, 2, \dots, m, k=1, 2, \dots, t \quad (14)$$

决策群体关于方案 A_i 的正、负前景值分别为:

$$v_i^+ = \sum_{k=1}^t \lambda_k (v_i^+)^k, \quad i=1, 2, \dots, m \quad (15)$$

$$v_i^- = \sum_{k=1}^t \lambda_k (v_i^-)^k, \quad i=1, 2, \dots, m \quad (16)$$

根据式(17)计算方案 A_i 的收益损失比值^[9]:

$$R_i = |v_i^+ / v_i^-|, \quad i=1, 2, \dots, m \quad (17)$$

2.4 决策步骤

综合以上分析,基于前景理论的犹豫二元语义灰关联群决策方法的决策步骤如下:

Step 1. 根据各决策者给出的决策信息构造犹豫二元语义决策矩阵 $X^k = (h_{ij}^k)_{m \times n} (k=1, 2, \dots, t)$;

Step 2. 根据2.1节确定决策者权重;

Step 3. 根据2.2节确定各犹豫二元语义决策矩阵中的属性权重;

Step 4. 根据定义2及式(10)、(11)确定各决策矩阵的犹豫二元语义正、负理想方案;

Step 5. 根据式(13)、(14)分别计算决策者 $e_k (k=1, 2, \dots, t)$ 关于各方案的正、负前景值;

Step 6. 根据式(15)、(16)分别计算决策群体关于各方案的正、负前景值;

Step 7. 根据式(17)计算各方案的收益损失比值 $R_i (i=1, 2, \dots, m)$;

Step 8. 将 $R_i (i=1, 2, \dots, m)$ 按降序排列,便可得到整个方案集由优到劣的排序.

2.5 区分度

决策者通过各种决策方法对候选方案进行评价,主要是为了将最优方案从其他方案中区别出来.因此,最优方案与第二优方案之间的决策系数^[17](对候选方案进行评价和排序的指标)差异越大,决策方法的区分度越大,其决策效果也就越好.设决策方法的决策系数为 δ ,针对 δ 越大越优的情况(δ 越小越优时用 $1/\delta$ 替换 δ),定义区分度为:

$$\eta = \frac{\delta_{\max} - \delta_{\text{sec}}}{\delta_{\max}} \times 100\% \quad (18)$$

其中, $\delta_{\max}, \delta_{\text{sec}}$ 分别表示决策系数的最大值和第二大值.不难理解,灵敏度越大,决策方法的区分度越大,其决策效果也就越好.

3 算例分析

利用本文方法解决一个犹豫二元语义多属性群决策问题,算例来自文献[13].设一家信贷公司要将资金投资于最佳候选企业.可供选择的投资企业有5个: A_1 是一家冰箱公司, A_2 是一家食品公司, A_3 是一家建筑公司, A_4 是电影业, A_5 是一家软件公司.设决策委员会有三位决策者 $e_k (k=1, 2, 3)$,4个属性用来评价候选企业:增长因子 C_1 ,税收问题 C_2 ,风险问题 C_3 ,社会影响 C_4 .其中

C_1 与 C_4 是收益型属性, C_2 与 C_3 是成本型属性. 决策者评价时使用的语言术语集为 $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\} =$

{极差, 非常差, 差, 中等, 好, 非常好, 极好}. 三位决策者给出的决策信息如表1-表3所示. 决策步骤如下文.

表1 决策矩阵 X^1

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$(s_3, (-0.3, 0, 0.2))$	$(s_4, (0.2, 0.32, 0.45))$	$(s_2, (0.2, 0.3))$	$(s_2, (-0.3, 0.1))$
A_2	$(s_2, (0, 0.1, 0.2))$	$(s_3, (-0.48, -0.2, 0))$	$(s_3, (-0.45, 0.1))$	$(s_4, (-0.2, 0.1, 0.2))$
A_3	$(s_4, (-0.3, 0.1, 0.2))$	$(s_3, (-0.1, 0.2))$	$(s_5, (-0.2, 0, 0.4))$	$(s_2, (-0.3, 0.1, 0.2))$
A_4	$(s_5, (-0.1, 0, 0.2))$	$(s_2, (0, 0.2, 0.4))$	$(s_2, (-0.5, -0.3))$	$(s_3, (-0.45, -0.25))$
A_5	$(s_6, (-0.4, -0.3, 0.1))$	$(s_2, (-0.1, 0.2, 0.3))$	$(s_1, (-0.45, -0.2))$	$(s_4, (-0.4, -0.1, 0))$

表2 决策矩阵 X^2

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$(s_2, (-0.3, -0.1))$	$(s_5, (-0.1, 0, 0.1))$	$(s_1, (-0.2, 0.3))$	$(s_3, (0.1, 0.2, 0.4))$
A_2	$(s_1, (0.4))$	$(s_2, (0.2, 0.3))$	$(s_4, (0.3, 0.4))$	$(s_5, (-0.45, -0.2, -0.1))$
A_3	$(s_3, (0.1, 0.3))$	$(s_2, (-0.1, 0.2))$	$(s_4, (0.1, 0.3))$	$(s_1, (-0.3, -0.2, 0))$
A_4	$(s_6, (0.2, 0.4))$	$(s_3, (-0.4, 0.3))$	$(s_2, (0.2, 0.4))$	$(s_4, (0.1, 0.3, 0.4))$
A_5	$(s_4, (-0.2, 0.1))$	$(s_3, (-0.2, 0.15))$	$(s_2, (-0.1, 0.2))$	$(s_5, (-0.1, 0.3))$

表3 决策矩阵 X^3

	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$(s_4, (-0.5, 0.1, 0.2))$	$(s_5, (0.2, 0.3))$	$(s_3, (0.1, 0.2))$	$(s_1, (0, 0.1, 0.2))$
A_2	$(s_3, (-0.4, -0.1))$	$(s_2, (0, 0.2, 0.4))$	$(s_5, (-0.3, -0.2))$	$(s_3, (-0.2, -0.1, 0))$
A_3	$(s_2, (-0.2, 0, 0.1))$	$(s_5, (-0.05, 0.2))$	$(s_4, (0, 0.1, 0.25))$	$(s_1, (-0.3, -0.2, 0))$
A_4	$(s_4, (-0.3, -0.1, 0))$	$(s_4, (0, 0.25, 0.45))$	$(s_2, (0.1, 0.2, 0.3))$	$(s_3, (-0.1, 0.2, 0.3))$
A_5	$(s_3, (-0.1, 0.1, 0.3))$	$(s_2, (-0.2, -0.1, 0))$	$(s_3, (0.1, 0.4, 0.45))$	$(s_6, (-0.05, 0.25))$

Step 1. 建立犹豫二元语义决策矩阵 $X^k = (h_{ij}^k)_{5 \times 4}$ ($k = 1, 2, 3$).

Step 2. 根据 2.1 节可得决策者的权重向量为:

$$\lambda = (0.329\ 9, 0.332\ 6, 0.337\ 5)^T.$$

Step 3. 根据 2.2 节可得犹豫二元语义决策矩阵 X^k ($k=1, 2, 3$) 的属性权重向量分别为:

$$W^1 = (0.305\ 2, 0.181\ 2, 0.314\ 8, 0.198\ 8)^T$$

$$W^2 = (0.321\ 0, 0.194\ 1, 0.215\ 5, 0.269\ 4)^T$$

$$W^3 = (0.164\ 5, 0.271\ 1, 0.222\ 4, 0.342\ 1)^T$$

Step 4. 确定各决策矩阵的犹豫二元语义正、负理想方案:

$$(A^+)^1 = ((s_6, (-0.4, -0.3, 0.1)), (s_2, (-0.1, 0.2, 0.3)), (s_1, (-0.45, -0.2)), (s_4, (-0.2, 0.1, 0.2)))$$

$$(A^-)^1 = ((s_2, (0, 0.1, 0.2)), (s_4, (0.2, 0.32, 0.45)), (s_5, (-0.2, 0, 0.4)), (s_2, (-0.3, 0.1)))$$

$$(A^+)^2 = ((s_6, (0.2, 0.4)), (s_2, (-0.1, 0.2)), (s_1, (-0.2, 0.3)), (s_5, (-0.1, 0.3)))$$

$$(A^-)^2 = ((s_1, (0.4)), (s_5, (-0.1, 0, 0.1)), (s_4, (0.3, 0.4)), (s_1, (-0.3, -0.2, 0)))$$

$$(A^+)^3 = ((s_4, (-0.5, 0.1, 0.2)), (s_2, (-0.2, -0.1, 0)), (s_2, (0.1, 0.2, 0.3)), (s_6, (-0.05, 0.25)))$$

$$(A^-)^3 = ((s_2, (-0.2, 0, 0.1)), (s_5, (0.2, 0.3)), (s_5, (-0.3, -0.2)), (s_1, (-0.3, -0.2, 0)))$$

Step 5. 根据式 (13), (14) 分别计算决策者 e_k ($k = 1, 2, 3$) 关于方案 A_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) 的正、负前景值 ($\alpha = \beta = 0.88, \theta = 2.25^{[14]}$), 具体结果如表4、表5所示.

表4 决策者 e_k 关于各方案的正前景值

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$(v_i^+)^1$	0.3243	0.3596	0.2519	0.5724	0.6355
$(v_i^+)^2$	0.4152	0.2920	0.2997	0.5939	0.5862
$(v_i^+)^3$	0.2464	0.3869	0.1212	0.4893	0.5840

表5 决策者 e_k 关于各方案的负前景值

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
$(v_i^-)^1$	-1.2047	-1.0312	-1.2382	-0.7613	-0.0485
$(v_i^-)^2$	-1.0441	-0.9651	-1.1132	-0.5784	-0.6955
$(v_i^-)^3$	-1.0754	-1.0058	-1.3333	-0.8031	-0.3219

Step 6. 根据式 (15)、(16) 分别计算决策群体关于方案 A_i 的正、负前景值: $v_1^+ = 0.3283$, $v_2^+ = 0.3463$, $v_3^+ = 0.2237$, $v_4^+ = 0.5515$, $v_5^+ = 0.6017$, $v_1^- = -1.1077$, $v_2^- = -1.0006$, $v_3^- = -1.2287$, $v_4^- = -0.7146$, $v_5^- = -0.3560$.

Step 7. 根据式 (17) 得各方案的收益损失比值分别为: $R_1 = 0.2963$, $R_2 = 0.3461$, $R_3 = 0.1820$, $R_4 = 0.7718$, $R_5 = 1.6904$.

Step 8. 将 $R_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ 按降序排列, 即 $R_5 > R_4 > R_2 > R_1 > R_3$, 则 $A_5 > A_4 > A_2 > A_1 > A_3$, 故方案 A_5 为最佳候选企业. 优选结果与文献[13]相同.

为了进一步与文献[13]的方法比较, 下面将对两种方法的区分度进行分析. 将两种方法的决策系数进行标准 0-1 变换, 如表 6 所示. 根据式 (18) 计算两种决策方法的区分度分别为 19.5%, 60.9%, 故本文所提方法的区分度更大, 决策效果更好. 与文献[13]相比, 本文所提方法有以下特点: (1) 文献[13]没有确定决策者权重和属性权重, 而本文基于各决策者给出的决策信息利用客观赋权法确定决策者权重和属性权重; (2) 引入前景理论, 考虑了决策者在面对收益和损失时具有的不同风险偏好, 能够得到反映决策者实际行为的决策结果; (3) 以正、负理想方案为参考点, 凭借灰关联系数构造前景价值函数, 直观地刻画了属性值与参考点在各属性下的相关性.

表 6 两种决策方法的区分度比较

方法	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	方案排序
文献[13]方法	0.1936	0.3675	0	0.8050	1	$A_5 > A_4 > A_1 > A_2 > A_3$
本文方法	0.0758	0.1088	0	0.3910	1	$A_5 > A_4 > A_1 > A_2 > A_3$

4 结束语

本文提出了一种前景理论与灰关联分析相结合的犹豫二元语义多属性群决策方法. 该方法基于决策者给出的决策信息, 在矩阵拉直运算的基础上利用灰关联分析法确定专家权重, 利用偏差最大化法确定属性权重. 根据前景理论与灰关联分析法确定前景价值函数, 既直观刻画了各方案与理想方案的相关性, 又考虑到了决策者的有限理性行为, 更加符合现实的决策需要. 最后通过一个投资决策算例展现本文所提方法的决策过程, 并通过区分度对本文所提方法和文献[13]的方法进行比较分析, 进一步说明本文所提方法的有效性.

参考文献

1 刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用. 5 版.

- 北京: 科学出版社, 2010. 62–66.
- 李鹏, 朱建军. 基于案例推理和灰色关联的直觉模糊决策分类模型. 系统工程理论与实践, 2015, 35(9): 2348–2353. [doi: 10.12011/1000-6788(2015)9-2348]
 - Wei GW. Grey relational analysis method for 2-tuple linguistic multiple attribute group decision making with incomplete weight information. Expert Systems with Applications, 2011, 38(5): 4824–4828. [doi: 10.1016/j.eswa.2010.09.163]
 - Sun GD, Guan X, Yi X, et al. Grey relational analysis between hesitant fuzzy sets with applications to pattern recognition. Expert Systems with Applications, 2018, 92: 521–532. [doi: 10.1016/j.eswa.2017.09.048]
 - Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: An analysis of decision under risk. Econometrica, 1979, 47(2): 263–292. [doi: 10.2307/1914185]
 - 张晓, 樊治平. 基于前景理论的风险型混合多属性决策方法. 系统工程学报, 2012, 27(6): 772–781. [doi: 10.3969/j.issn.1000-5781.2012.06.006]
 - 糜万俊, 戴跃伟. 基于前景理论的风险型混合模糊多准则群决策. 控制与决策, 2017, 32(7): 1279–1285. [doi: 10.13195/j.kzyjc.2016.1221]
 - 谭春桥, 贾媛. 基于证据理论和前景理论的犹豫-直觉模糊语言多准则决策方法. 控制与决策, 2017, 32(2): 333–339. [doi: 10.13195/j.kzyjc.2015.1598]
 - 王应明, 阙翠平, 蓝以信. 基于前景理论的犹豫模糊 TOPSIS 多属性决策方法. 控制与决策, 2017, 32(5): 864–870. [doi: 10.13195/j.kzyjc.2016.0259]
 - 谷云东, 高建伟, 刘慧晖. 基于二元语义前景关联分析的风险型多准则决策方法. 控制与决策, 2014, 29(9): 1633–1638. [doi: 10.13195/j.kzyjc.2013.0723]
 - Delgado M, Verdegay JL, Vila MA. Linguistic decision-making models. International Journal of Intelligent Systems, 1992, 7(5): 479–492. [doi: 10.1002/(ISSN)1098-111X]
 - Herrera F, Martinez L. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2000, 8(6): 746–752. [doi: 10.1109/91.890332]
 - Beg I, Rashid T. Hesitant 2-tuple linguistic information in multiple attributes group decision making. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2016, 30(1): 109–116. [doi: 10.3233/IFS-151737]
 - Tversky A, Kahneman D. Advances in prospect theory: Cumulative representation of uncertainty. Journal of Risk and Uncertainty, 1992, 5(4): 297–323. [doi: 10.1007/bf00122574]
 - 王应明. 运用离差最大化方法进行多指标决策与排序. 系统工程与电子技术, 1998, 20(7): 24–26, 33. [doi: 10.3321/j.issn:1001-506X.1998.07.006]
 - 王正新, 党耀国, 裴玲玲, 等. 基于累积前景理论的多指标灰关联决策方法. 控制与决策, 2010, 25(2): 232–236. [doi: 10.13195/j.cd.2010.02.74.wangzhx.033]
 - 柯宏发, 陈永光, 夏斌. 一种基于逼近于理想灰关联投影的多目标决策算法. 电子学报, 2007, 35(9): 1757–1761. [doi: 10.3321/j.issn:0372-2112.2007.09.029]