

基于非负性约束 K-SVD 的 fMRI 盲源信号分离^①

朱凌晨, 曾卫明, 石玉虎

(上海海事大学 信息工程学院, 上海 201306)

摘要: 近年来, K-SVD 算法在功能磁共振成像(functional magnetic resonance imaging, fMRI)数据分析方法的研究中越来越受到关注. 在本文中, 提出了一种新的基于非负性约束 K-SVD(Non-negative K-SVD, NK-SVD)的盲源信号分离(Blind Source Separation, BSS)方法. 首先, 随机初始化字典矩阵, 利用正交匹配追踪算法(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)求得稀疏向量矩阵; 然后利用 NK-SVD 迭代更新字典矩阵和稀疏向量矩阵; 进一步, 对字典矩阵求伪逆, 乘以原始信号数据, 可得到脑功能激活区; 最后, 将本文的方法应用于模拟数据和真实数据, 结果证明了方法的有效性, 并且比传统算法有更好的效果.

关键词: 盲源信号分离; K-SVD; 稀疏性; 非负性

引用格式: 朱凌晨, 曾卫明, 石玉虎. 基于非负性约束 K-SVD 的 fMRI 盲源信号分离. 计算机系统应用, 2017, 26(8): 114-120. <http://www.c-s-a.org.cn/1003-3254/5965.html>

FMRI Blind Source Separation Based on Non-Negative Constraint K-SVD

ZHU Ling-Chen, ZENG Wei-Ming, SHI Yu-Hu

(Information Engineering College, Shanghai Maritime University, Shanghai 201306, China)

Abstract: In recent years, the K-SVD algorithm has gained more and more attention in the studies of functional magnetic resonance imaging (fMRI) data analysis. In this research, we propose a new method of blind source separation based on non-negative constrained K-SVD (NK-SVD). Firstly, we initialize a dictionary matrix randomly, and use orthogonal matching pursuit (OMP) to obtain a sparse vector matrix. Then, we use NK-SVD to update the dictionary matrix and sparse vector matrix. Furthermore, we solve the dictionary matrix pseudo inverse to obtain the brain functional activation areas by multiplying by the original data. Finally, we apply the proposed method to both simulated data and real fMRI data, where the correspondingly experimental results demonstrate the effectiveness of the proposed one, having better performance in comparison with the conventional algorithms.

Key words: blind source separation; K-SVD; sparsity; non-negativity

简单来说, 盲源信号分离是从观测信号中恢复出各个源信号的过程. 解决盲源信号分离问题的重要方法之一是独立成分分析^[1-4](Independent Component Analysis, ICA), ICA 由于不受与神经科学的知识与经验, 通过假定源信号之间在时间维度或空间维度上统计独立性进行分解. ICA 算法中最为经典的是快速 ICA 算法(Fast ICA)^[5], 该算法是基于定点递推算方法得

到的. 它对任何类型的数据都适用, 同时它的存在对于运用 ICA 分析高维的数据成为可能. 然而, 近年来, 实验研究表明 ICA 中的独立性假设并不能充分地对于 fMRI 信号进行盲源信号分离^[6,7]. 众多研究表明: 脑功能成分表现出了较强的稀疏性和非负性^[6-9]. 例如, Lee 等人提出了一种数据驱动的 Sparse GLM 模型对于 fMRI 信号进行分析, 能够在模拟和事件相关实验中提

① 基金项目: 国家自然科学基金(31470954)

收稿时间: 2016-12-13; 采用时间: 2017-01-20

取比 ICA 更准确的脑功能激活区^[9]. Calhoun 等人也指出了在 fMRI 信号分析中利用稀疏性的特征是合理的^[10]. 此外, Wang 等人提出了一种基于非负性的 fMRI 任务态数据脑功能检测方法, 在事件相关实验中能够准确地提取脑功能激活区^[11]. 以上研究表明: 在 fMRI 信号的盲源信号分离过程中, 除了基于独立性假设, 利用稀疏性或者非负性作为特征也可以得到很好的效果.

目前已有很多模型应用到 fMRI 数据分析中, 例如 K-SVD 算法^[12,13]. K-SVD 算法是当下图像稀疏字典学习的热门算法之一, 它通过迭代过程实现原有字典在图像样本下的训练, 通过稀疏分解系数不断调整原子库中的原子, 最终获得更加有效反映图像特征的字典. 在 fMRI 数据中, K-SVD 也被逐渐地得到应用. 例如, 蒋兴国等人提出一种改进的 K-SVD 磁共振图像去噪算法, 不仅能够更加有效地滤除图像中的高斯白噪声, 更好地保留原图像的细节信息, 而且有效降低了字典训练所消耗的时间^[14]. Abolghasemi 等人提出一种改进的 K-SVD 算法, 在训练字典的同时加入互不一致性约束, 获得有效反映原始图像特征的字典, 从而准确地检测脑功能激活区^[15]. Wang 等人又提出一种 SDLS 模型对字典不一致性和稀疏水平进行自适应地选择, 根据选择的参数对字典进行迭代更新, 有利于准确地检测脑功能激活区^[16]. Seghouane 等人从相关数据中提取先验信息加入到 K-SVD 算法中, 能够在模拟数据和真实数据中根据参考信息针对性地提取脑功能激活区^[17]. 以上实验研究表明: K-SVD 算法在 fMRI 脑功能检测中越来越受到关注, 并且具有较为显著的效果.

本文提出了一种基于非负性约束 K-SVD(NK-SVD) 的盲源信号分离(BSS)方法. 该方法先对 fMRI 数据进行预处理操作, 包括时间层校正, 头动校正以及空间标准化; 然后通过正交匹配追踪算法^[18](OMP)求解稀疏向量矩阵; 再结合 F 范数和欧几里得距离分别对字典矩阵和稀疏系数矩阵进行迭代更新; 最后对更新后的字典求伪逆, 乘以给定的原始信号数据即可得到各个源信号. 在 NK-SVD 更新过程中, 是用高斯分布作为噪声模型, 可保留源数据的结构. 而且 NK-SVD 是一种基于梯度下降的优化算法, 有利于算法的收敛, 加快分解速度. 此外, 在 fMRI 任务态数据中, 比如视觉刺激数据, 视觉刺激对脑功能区是正向激活的, 而 NK-SVD 正好是基于非负性的, 意味着 NK-SVD 能够合适地表示脑功能激活区.

本文内容安排如下: 第一节简单介绍 K-SVD 算法

的原理和步骤, 详细叙述非负性约束 K-SVD 算法; 第二节为实验结果及分析; 第三节对本文方法进行总结.

1 基于非负性约束 K-SVD 分解算法

1.1 K-SVD 算法

基于 K-SVD^[12]的稀疏字典训练算法可分为两步实现. 首先, 设 $D \in R^{n \times K}$, $y \in R^n$, $x \in R^K$.

$$Y = \{y_i\}_{i=1}^N, X = \{x_i\}_{i=1}^N \quad (1)$$

其中, D 为字典矩阵, y 表示训练信号, x 为训练信号的稀疏表示系数向量, $Y = \{y_i\}_{i=1}^N$ 为 N 个训练信号集合, $X = \{x_i\}_{i=1}^N$ 为 Y 的解向量集合, R^n 表示 n 维信号集. 因此, K-SVD 算法的目标函数为:

$$\min_{D, X} \|Y - DX\|_F^2 \quad \text{subject to } \forall i, \|x_i\| \leq T_0 \quad (2)$$

其中, T_0 表示稀疏度水平, 即稀疏表示系数中非零分量个数的上限.

K-SVD 算法的第一步是稀疏编码, 保持字典不变, 这样就变成了稀疏系数优化的问题, 本文中使用了正交匹配追踪算法^[18](OMP)进行稀疏编码的求解.

$$\min_{x_i} \{\|y_i - D x_i\|_2^2\} \quad \text{subject to } \|x_i\|_0 \leq T_0 \quad (3)$$

for $i = 1, 2, \dots, N$.

第二步是字典更新. 在 K-SVD 算法中, 字典更新是逐列更新的, 且每一列原子和与之相对应的系数是同时更新的. 设 d_k 为更新字典 D 的第 k 列向量, 此时可以得到:

$$\begin{aligned} \|Y - DX\|_F^2 &= \|(Y - \sum_{j \neq k} d_j x^j) - d_k x^k\|_F^2 \\ &= \|E_k - d_k x^k\|_F^2 \end{aligned} \quad (4)$$

其中, x^k 对 d_k 对应的系数矩阵 X 中的第 k 行向量, E_k 代表去掉 d_k 后信号集 Y 的分解误差. 将 E_k 进行 SVD 分解得到 $E_k = U \Delta V^T$, 其中 U 的第一列 \tilde{d}_k 为 d_k 的优化结果. 此时, D 中的一列更新完毕, 按照此方式将 D 的列逐个更新至最后一列, 最终产生新的字典 \tilde{D} .

1.2 非负性约束 K-SVD 算法

假设处理 m 个 n 维空间的样本数据, 用 $Y_{n \times m}$ 表示. 该数据矩阵中各个元素都是非负的, 即 $Y \geq 0$. 对矩阵 $Y_{n \times m}$ 进行线性分解, 有:

$$Y_{n \times m} = D_{n \times r} X_{r \times m} \quad (5)$$

其中 $D_{n \times r}$ 称为基矩阵, $X_{r \times m}$ 为系数矩阵. 借鉴文献^[19,20], 采用乘性规则更适合非负数据的特点, 即在非负性初始化的基础上, 在迭代过程中能简单地保持非

负性. 假设噪声矩阵为 $E \in R^{n \times m}$, 那么有:

$$E = Y - DX \quad (6)$$

现在只要找出合适的 D 和 X 使得 $\|E\|$ 最小. 本文借鉴经典的 ICA 模型^[1], 假设 fMRI 源信号是非高斯的. 因此, 这里考虑噪声服从高斯分布, 通过最大似然函数得到目标函数. 即:

$$L(D, X) = \prod_{i,j} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ij}} \exp\left(-\frac{E_{ij}^2}{2\sigma_{ij}}\right) \\ = \prod_{i,j} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ij}} \exp\left(-\frac{(Y_{ij} - (DX)_{ij})^2}{2\sigma_{ij}}\right) \quad (7)$$

取对数后, 得到对数似然函数为:

$$\ln L(D, X) = \sum_{i,j} \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ij}} - \frac{1}{\sigma_{ij}} \cdot \frac{1}{2} \sum_{i,j} [Y_{ij} - (DX)_{ij}]^2 \quad (8)$$

那么要使得对数似然函数取值最大, 只需要下面目标函数最小:

$$J(D, X) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} [Y_{ij} - (DX)_{ij}]^2 \quad (9)$$

该损失函数为 2 范数损失函数, 它是基于欧几里得距离的度量. 又因为:

$$(DX)_{ij} = \sum_k D_{ik} X_{kj} \Rightarrow \frac{\partial (DX)_{ij}}{\partial D_{ik}} = X_{kj}, \frac{\partial (DX)_{ij}}{\partial X_{kj}} = D_{ik} \quad (10)$$

那么得到:

$$\frac{\partial J(D, X)}{\partial D_{ik}} = (YX^T)_{ik} - (DXX^T)_{ik} \\ \frac{\partial J(D, X)}{\partial X_{kj}} = (D^T Y)_{kj} - (D^T DX)_{kj} \quad (11)$$

借鉴文献[19]使用梯度下降法进行迭代, 如下:

$$D_{ik} \leftarrow D_{ik} - \alpha_1 \cdot [(YX^T)_{ik} - (DXX^T)_{ik}] \\ X_{kj} \leftarrow X_{kj} - \alpha_2 \cdot [(D^T Y)_{kj} - (D^T DX)_{kj}] \quad (12)$$

如果选取:

$$\alpha_1 = \frac{D_{ik}}{(D^T DX)_{ik}}, \alpha_2 = \frac{X_{kj}}{(DXX^T)_{kj}} \quad (13)$$

那么结合公式(4), 最终得到迭代规则为:

$$D_{ik} \leftarrow D_{ik} \cdot \frac{(YX^T)_{ik}}{(DXX^T)_{ik}}, X_{kj} \leftarrow X_{kj} \cdot \frac{(D^T Y)_{kj}}{(D^T DX)_{kj}} \quad (14) \\ \text{subject to } \|Y - DX\|_F \leq \varepsilon$$

算法中, K 为脑功能成分的个数, ε 表示分解误差, 用 NK-SVD 更新所有字典矩阵中的原子, 并且在算法中选择一个合适的迭代次数 $numIter$ 作为以上规则停止更新的条件. 在满足(14)式后, 字典需要归一化. 具体算

法的伪代码如下.

算法: 非负性 K-SVD (NK-SVD)

输入: $Y, K, \varepsilon, T_0, numIter$

输出: D, X

原始图像 Y 归一化为非负值;

随机初始化字典矩阵 D ;

重复

for $i=1$ to N do

$x_i \leftarrow OMP(y_i, D, T_0)$

end

利用 K-SVD 算法按列更新字典矩阵 D ;

for $k=1$ to $numIter$ do

$D_{ik} \leftarrow D_{ik} \frac{(YX^T)_{ik}}{(DXX^T)_{ik}}, X_{kj} \leftarrow X_{kj} \frac{(D^T Y)_{kj}}{(D^T DX)_{kj}}$

end

直到 $\|Y - DX\|_F \leq \varepsilon$;

2 实验结果及分析

2.1 实验环境

实验分析和操作所使用的环境是上海海事大学信息工程学院数字影像与智能计算实验室的联想 ThinkCenter M8330t 台式机上完成的, 配置为: Inter(R) Core(TM) i7-2600 CPU @3.40 GHZ 处理器, 4 GB 内存, Windows 7 旗舰版操作系统. 实验所使用的编程软件是美国 Mathworks 公司发行的 MATLAB R2013a.

所有的实验数据预处理以及 GLM 操作都是使用 SPM (<http://www.fil.ion.ucl.ac.uk/spm/>) 软件包完成. 模拟数据是由 SimTB (<http://mialab.mrn.org>) 软件包完成, 脑功能网络的显示使用 MRicro (<http://www.mricro.com>) 软件.

2.2 实验数据

为了对 NK-SVD 算法的有效性进行实验验证, 本文采用了模拟数据和视觉刺激数据. 模拟数据是一种类 fMRI 信号, 包括了脑功能信号活动模式和高斯噪声等模拟成分. 本文对模拟数据未采取任何的预处理操作, 并且设定源信号的个数为 13, 即 $K=13$, 其中包括 12 个模拟的源信号以及 1 个基态信号, 提供真实的脑功能空间图谱和时间域脑活动模式, 以方便 NK-SVD 与其他功能检测方法之间的定量性比较. 例如: K-SVD (<http://www.cs.technion.ac.il/~ronrubin/>), FastICA (<http://research.ics.tkk.fi/ica/fastica/>) 等.

视觉刺激数据是对测试者施加 BLOCK 块的视觉刺激, BLOCK 的设计形式是 OFF-ON-OFF-ON-OFF-OFF-OFF. 每个 BLOCK 的持续时间都为 40s, 然后要求被试者在 40s 内完成 OFF-ON 两个状态的任务. 在 ON 状态, 要求被试者看一个蓝黄屏幕的棋盘格, 在 OFF 状态, 要求被试者注视屏幕的中心. 对于视觉刺激数据, 本文选择 $T_0=4$, $\epsilon=0.001$, $numIter=30$, 并且采用拉普拉斯近似方法^[21]对 fMRI 数据的独立成分个数进行估计, 即确定 K 的值. 任务态 fMRI 数据采集参数为: 整个大脑从上至下扫描, 扫描层数为 36, 扫描时间点一共为 70; 每层厚度为 4 mm, 每层体素点格式为 $64*64$,

TR 为 2 s, 体素点 $3.75\text{ mm}*3.75\text{ mm}$, 扫描间隔为 1 mm.

2.3 实验结果

2.3.1 模拟数据结果

首先, 在未进行任何预处理操作的模拟数据上比较了三种数据驱动方法的信号检测能力, 即: K-SVD, FastICA 和 NK-SVD. 由以上三种方法检测到的信号空间图谱以及相应的真实信号空间图谱如图 1 所示. 由图 1 可知, 三种方法均有效地检测到了 12 个模拟的源信号. 然而, 与 K-SVD 和 FastICA 方法检测到的信号空间图谱相比, NK-SVD 所提取出来的信号空间图谱与真实信号空间图谱之间更加相似, 具有更少的噪声污染.

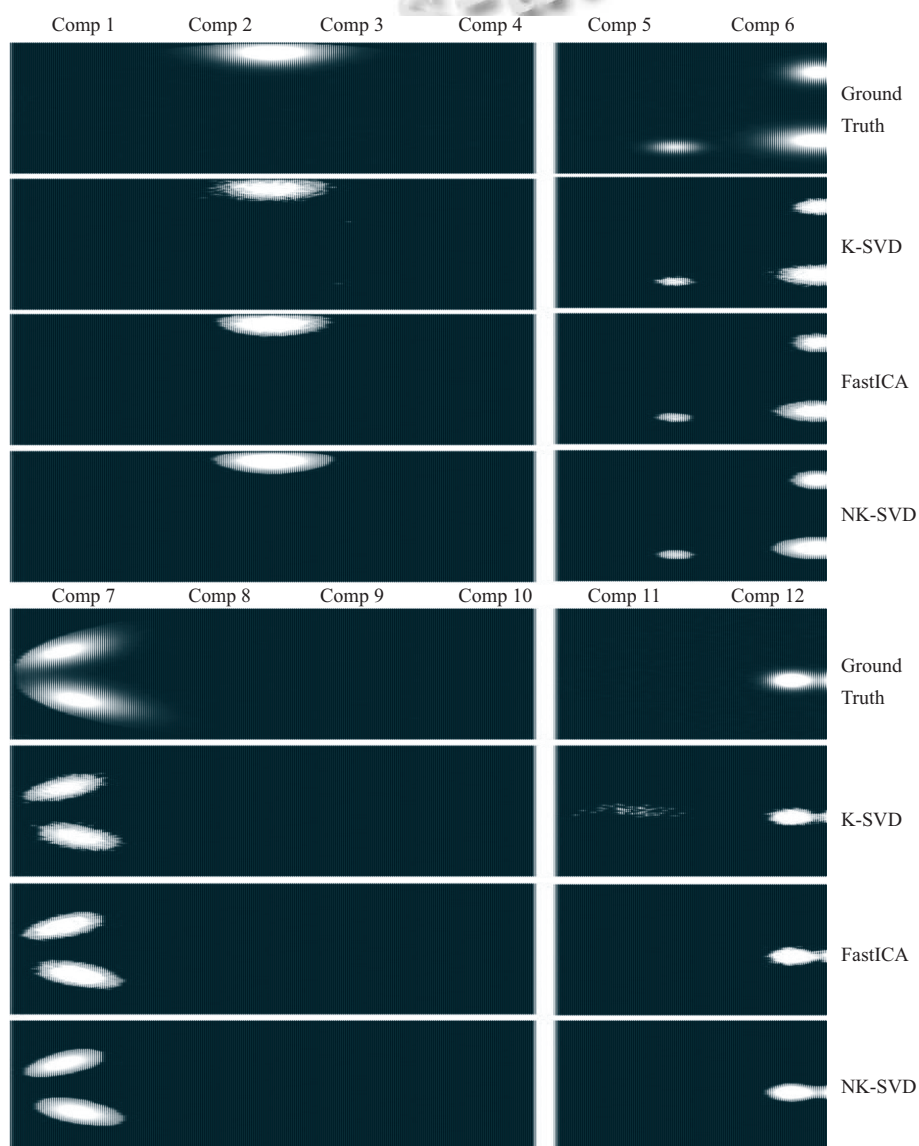


图 1 真实参考信号的空间图谱以及 K-SVD、FastICA 及 NK-SVD 方法检测到的 12 个模拟信号的空间图谱

进一步,为了定量性地刻画这三种方法在模拟信号检测能力的强弱,分别计算了真实信号空间图谱与由以上三种方法检测到的相应信号空间图谱之间的皮尔森相关系数(PCC).空间域 PCC 相关系数曲线如图 2 所示,从图中可以看出,与其他两种方法相比, NK-SVD 估计的信号在空间域上与真实的信号之间相关系数更高,意味着 NK-SVD 有着较优的信号分离能力.

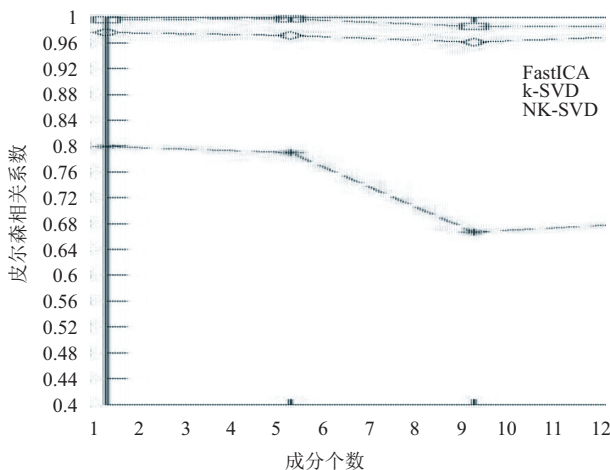


图2 K-SVD, FastICA 和 NK-SVD 检测到的信号与其相应的真实源信号之间的空间域上的皮尔森相关系数曲线图

2.3.2 视觉刺激数据结果

本文对 fMRI 视觉刺激数据进行预处理操作,包括时间层校正,头动校正以及空间标准化;然后采用了 GLM、K-SVD、FastICA 以及 NK-SVD 来进行脑功能连通性检测.图 3 给出了这四种方法提取出的视觉功能激活区.进一步,为了定量性地比较四种方法在功能连通性上检测能力的强弱.首先,分别获取 NK-SVD 相对于 GLM、K-SVD 以及 FastICA 增加和减少的体素点.然后,从空间标准化后的 fMRI 数据中分别提取这些体素点的时间序列,从而计算这些时间序列和 BLOCK 之间的皮尔森相关系数,最后分别统计了相应于增加和减少体素点的相关系数的分布直方图,具体结果如图 4 所示.

由图 4 可知,这些体素点在每个体素点时间过程与 BLOCK 之间是相关的,增加的体素点的时间序列和 BLOCK 有较高的相关系数,减少的体素点的时间序列和 BLOCK 有较低的相关系数.因此,根据图 4(a),NK-SVD 与 GLM 比较,大部分增加的体素点的时间序列与 BLOCK 之间的相关系数较高,表明这些体素点可能是

真阳性体素;然而这些体素在 NK-SVD 视觉功能激活区中被正确地识别了,在 GLM 视觉功能激活区中却未能正确地识别.相比较而言,大量减少的体素点的时间序列与 BLOCK 之间的相关系数较低,表明 NK-SVD 能够去除许多 GLM 中与 BLOCK 之间具有微相关性的体素,并且这些体素可能属于被错分的假阳性体素.

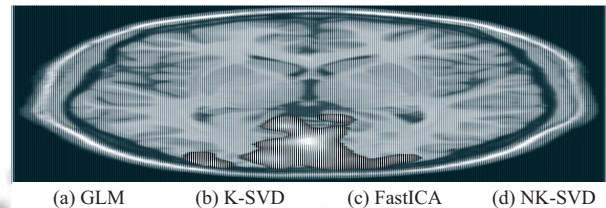


图3 四种方法提取的视觉功能激活区,其中 Z-thresh 值设定为 2

相似地,图 4(b)和(c)中有大量增加的体素的时间序列与 BLOCK 之间的相关系数较高,同时,也有许多减少的体素点的时间序列与 BLOCK 之间的相关系数较低,这些结果对比表明了基于非负性约束 K-SVD 算法能够进一步提高关于体素的真激活和不激活的正确推理.

3 结语

本文针对 fMRI 盲源信号分离问题,提出了一种基于非负性约束 K-SVD 的盲源信号分离方法.该方法主要包括以下两个方面优点:(1)利用 K-SVD 的稀疏字典学习,使得源信号稀疏表示,充分体现了 fMRI 数据的稀疏性;(2)加以非负性约束,一方面可以去除一些传统方法难以除去的噪声,另一方面也符合 fMRI 任务态数据脑功能激活区的非负性.通过模拟数据实验和事件相关数据实验,表明了 NK-SVD 是一种有效的盲源分离方法,在保证稀疏性和非负性的同时,又可以促进脑功能激活区中真阳性和真阴性的正确推断.进一步,在以后的研究中,可以加入一些脑功能激活区的先验知识,有针对性地检测事件相关的脑功能激活区.因此,深入理解和研究 NK-SVD 盲源信号分离对 fMRI 信号分析技术的发展和具有广阔而深远的意义.

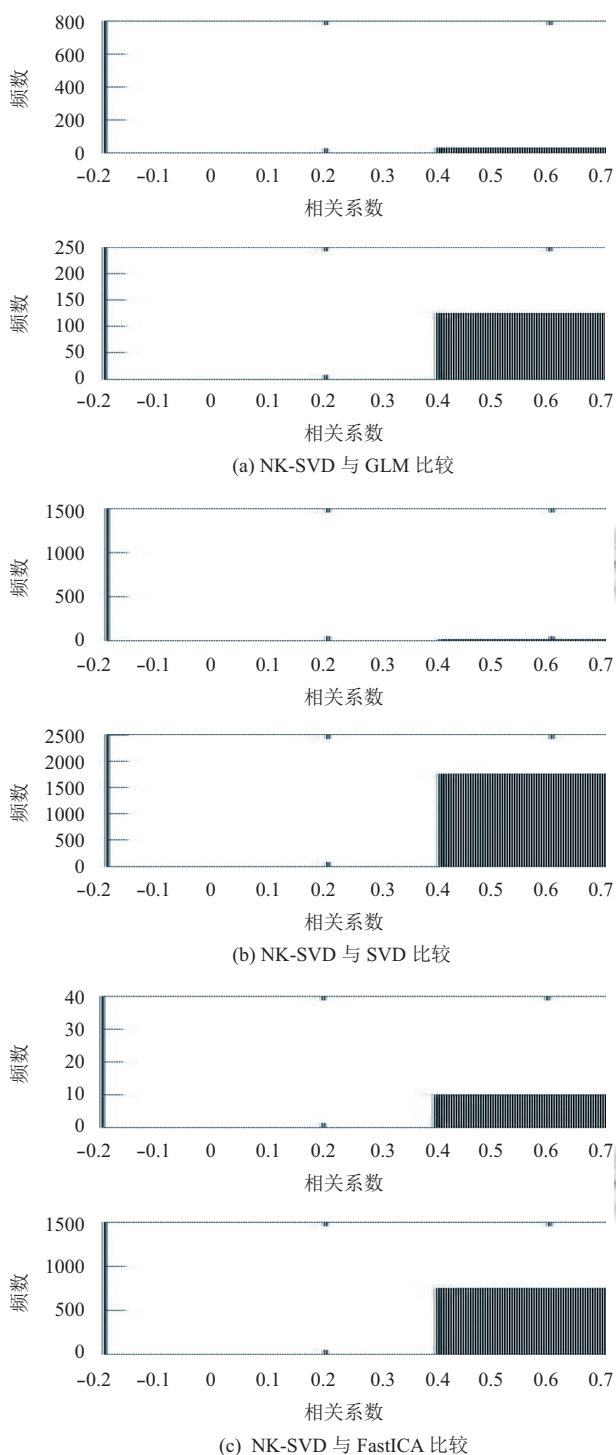


图4 NK-SVD 增加和减少体素点的相关系数的分布直方图

参考文献

- Hyvärinen A, Karhunen J, Oja E. Independent component analysis. Chichester: Wiley, 2001.
- 公显文, 张桂芸, 马洪芝. ICA 算法在 fMRI 中的应用. 计算机工程与科学, 2008, 30(10): 37-39.

- 潘丽丽, 史振威, 唐焕文, 等. fMRI 信号盲分离的一种独立成分分析算法. 大连理工大学学报, 2005, 45(4): 607-611.
- 杜宇慧, 桂志国, 刘迎军, 等. 基于独立成分分析的脑功能网络分析方法综述. 生物物理学报, 2013, 29(4): 266-275.
- Hyvärinen A, Oja E. A fast fixed-point algorithm for independent component analysis. Neural Computation, 1997, 9(7): 1483-1492. [doi: 10.1162/neco.1997.9.7.1483]
- Valente G, De Martino F, Filosa G, et al. Optimizing ICA in fMRI using information on spatial regularities of the sources. Magnetic Resonance Imaging, 2009, 27(8): 1110-1119. [doi: 10.1016/j.mri.2009.05.036]
- Wang NZ, Zeng WM, Chen L. SACICA: A sparse approximation coefficient-based ICA model for functional magnetic resonance imaging data analysis. Journal of Neuroscience Methods, 2013, 216(1): 49-61. [doi: 10.1016/j.jneumeth.2013.03.014]
- Ferdowsi S, Abolghasemi V, Sanei S. A constrained NMF algorithm for bold detection in fMRI. IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Proc. Kittila, Finland. 2010. 77-82.
- Lee K, Tak S, Ye JC. A data-driven sparse GLM for fMRI analysis using sparse dictionary learning with MDL criterion. IEEE Trans. on Medical Imaging, 2011, 30(5): 1076-1089. [doi: 10.1109/TMI.2010.2097275]
- Calhoun VD, Potluru VK, Phlypo R, et al. Independent component analysis for brain fMRI does indeed select for maximal independence. PLoS One, 2012, 8(8): e73309.
- Wang XX, Tian J, Li XF, et al. Detecting brain activations by constrained non-negative matrix factorization from task-related BOLD fMRI. Proc. of SPIE 5369, Medical Imaging 2004: Physiology, Function, and Structure from Medical Images. San Diego, USA. 2004. 675-682.
- Aharon M, Elad M, Bruckstein A. *rmK*-SVD: An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation. IEEE Trans. on Signal Processing, 2006, 54(11): 4311-4322. [doi: 10.1109/TSP.2006.881199]
- Khalid MU, Seghouane AK. A single SVD sparse dictionary learning algorithm for FMRI data analysis. 2014 IEEE Workshop on Statistical Signal Proc. Gold Coast, Australia. 2014. 65-68.
- 蒋行国, 覃阳, 韦保林. 基于改进 K-SVD 的磁共振图像去噪算法. 科技导报, 2014, 32(8): 64-69.
- Abolghasemi V, Ferdowsi S, Sanei S. Fast and incoherent dictionary learning algorithms with application to fMRI. Signal, Image and Video Proc., 2015, 9(1): 147-158. [doi: 10.1007/s11760-013-0429-2]

- 16 Wang NZ, Zeng WM, Chen D. A novel sparse dictionary learning separation (SDLS) model with adaptive dictionary mutual incoherence constraint for fMRI data analysis. IEEE Trans. on Biomedical Engineering, 2016, 63(11): 2376–2389. [doi: [10.1109/TBME.2016.2533722](https://doi.org/10.1109/TBME.2016.2533722)]
- 17 Seghouane AK, Khalid MU. Learning dictionaries from correlated data: Application to fMRI data analysis. IEEE International Conference on Image Proc. Phoenix, USA. 2016. 2340–2344.
- 18 Tropp J, Gilbert AC. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit. IEEE Trans. on Information Theory, 2007, 53(12): 4655–4666. [doi: [10.1109/TIT.2007.909108](https://doi.org/10.1109/TIT.2007.909108)]
- 19 Lee DD, Seung HS. Algorithms for non-negative matrix factorization. Advances in Neural Information Processing Systems 13. Denver, CO, USA. 2000. 556–562.
- 20 Lee DD, Seung HS. Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization. Nature, 1999, 401(6755): 788–791. [doi: [10.1038/44565](https://doi.org/10.1038/44565)]
- 21 Minka TP. Automatic choice of dimensionality for PCA. Advances in Neural Information Processing Systems 13. Denver, CO, USA. 2000. 598–604.

www.c-s-a.org.cn

www.c-s-a.org.cn