

# 两类特殊管状曲面的研究<sup>①</sup>

白庆月<sup>1</sup>, 邱泽阳<sup>2</sup>, 王玉鑫<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(兰州交通大学 数理学院, 兰州 730070)

<sup>2</sup>(兰州交通大学 艺术设计学院, 兰州 730070)

**摘要:** 参数曲线曲面的参数化直接决定了其代数性质, 如正则性, 而在计算机辅助几何设计中, 自交现象却是一类不能直接应用的非正则性问题. 管状曲面作为一类重要的几何造型, 主要研究管道曲面和正交环面. 在正则管状曲面的研究基础上, 迫切着手对两类特殊的非正则管状曲面的自交问题展开研究, 主要通过代数方法分析各自在数学上的几何特性, 从而在理论上明确自交区域的去除部分, 为将来准确去除自交提供支撑.

**关键词:** 管状曲面; 管道曲面; 正交环面; 非正则性; 自交区域

## Research on Two Kinds of Special Tubular Surface

BAI Qing-Yue<sup>1</sup>, QIU Ze-Yang<sup>2</sup>, WANG Yu-Xin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>(School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

<sup>2</sup>(School of Art and Design, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract:** The algebraic properties of curves and surfaces are directly determined by its form of parameter, such as regularity. However, in computer aided geometric design, the phenomenon of self-intersection belongs to a kind of irregularity problem which cannot be applied directly. The tubular surface, as a kind of important geometric model, mainly studying pipe surfaces and orthogonal torus. On the basis of researching the regular tubular surface, we must attach important to researching self intersection of two kinds of special irregular tubular surfaces. The paper mainly applies algebraic methods to analyze their geometric features respectively, so as to specify some areas of self-intersection in theory. Furthermore, it can provide support to remove self-intersection exactly in the future.

**Key words:** the tubular surface; pipe surfaces; orthogonal torus; the irregularity; the intersection fields

最近几年, 由于计算几何应用中对曲线和曲面的特殊要求, 非正则偏置问题的研究日益成为研究热点<sup>[1]</sup>, 其中, 关于偏置曲线的研究多有涉猎, 但是国内文献关于偏置曲面的研究却是少之又少, 甚至罕见. 然而, 在实践应用中, 曲面的几何性质直接导致了研究的复杂性, 例如: 当管状曲面在大曲率弯曲时就会伴随发生两类非正则性自交问题. 本文在国内外问献已有的研究基础上, 对管状曲面又做了具体的研究, 分析了特殊管状曲面的几何性质, 以及它们之间的联系<sup>[2]</sup>. 具体来讲, 管状曲面又称为“广义柱面”, 它是空间一条有长度的自由曲线围绕其周围的一些曲面弯曲而生成的一个模型, 空间的这条自由曲线即为脊曲线. 管道

曲面是一种最简单的形式, 因为管道曲面的半径是固定不变的常数  $d_0$ , 而正交环面的半径是关于曲线和角度为参数的一个函数  $d(t)$ , 所以研究正交环面的正则性问题比管道曲面会更加复杂<sup>[3]</sup>. 本文约定, 偏置曲线中的自由曲线称作基曲线, 偏置曲面中的自由曲线称为脊曲线.

### 1 管状曲面的参数表达

对于管状曲面生成广义柱面的理念, 可以当做是空间自由曲线的变距偏置生成的. 本文不妨引入弧长参数  $t$  和角度参数  $\theta$ , 假设空间一自由曲线的长度为  $L$ , 将基曲线和围绕基曲线变化的角度进行参数化, 有

① 基金项目: 国家自然科学基金(61262044)

收稿时间: 2016-02-25; 收到修改稿时间: 2016-03-31 [doi: 10.15888/j.cnki.csa.005422]

$t \in [0, L]$ ,  $\theta = \frac{R}{2\pi}Z$  (同构单位圆  $S^1$ ,  $R$  是单位圆的半径), 那么角度参数就可以用单位圆  $S^1$  来表示它的范围, 亦有等价关系  $\theta_1 \sim \theta_2 \Leftrightarrow \theta_1 - \theta_2 = 2\pi k, k \in Z$  [4].

定义 1. 设  $s(t): [0, L] \rightarrow R^3$  是  $C^2$  (曲率连续) 的一条空间自由曲线, 偏置距离函数  $d(t, \theta): [0, L] \times S^1 \rightarrow R^+$  是  $C^1$  (切线连续) 的正实函数,  $\mathbf{T}(t, \theta): [0, L] \times S^1 \rightarrow R^3$  是以  $s(t)$  为基曲线, 距离函数为  $d(t, \theta)$  而定义的管状曲面, 可有如下的参数表示形式:

$$\mathbf{T}(t, \theta) = \mathbf{S}(t) + d(t, \theta)(\cos \theta \mathbf{n}(t) + \sin \theta \mathbf{b}(t))$$

其中,  $\mathbf{n}(t)$  是基曲线  $\mathbf{S}(t)$  的单位法向量(Unit Vector),  $\mathbf{b}(t)$  是基曲线  $\mathbf{S}(t)$  的单位副法向量.

### 1.1 管道曲面

管道曲面是沿空间自由基曲线  $\mathbf{s}(t)$ , 以半径  $d(t, \theta) = d_0$  为定值的正常函数旋转生成的特殊管状曲面(也即半径固定的动球生成的单参数簇). 代数表示下的几何特性决定管道曲面也是管状曲面的一种最简单类型.

定义 2. 假设  $\Sigma^0$  是球心在基曲线  $\mathbf{s}(t)$  上, 半径为  $d_0$  关于动球的一个参数簇, 那么  $\Sigma^0$  的包络就是管道曲面. 则管道曲面  $\mathbf{P}(t, \theta)$  的参数可以表示如下:

$$\mathbf{P}(t, \theta) = \mathbf{S}(t) + d_0(\cos \theta \mathbf{n}(t) + \sin \theta \mathbf{b}(t))$$

该参数方法对于分析管道曲面的几何性质较为便捷, 例如奇异点.

$\mathbf{P}'(t_0, \theta_0) = 0$  即表示曲面表达式的偏导矢平行, 则有差乘为零.

$$\text{即 } \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \mathbf{S}'(t) + d_0(\cos \theta \mathbf{n}'(t) + \sin \theta \mathbf{b}'(t))$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \theta} = d_0(\cos \theta \mathbf{b}(t) - \sin \theta \mathbf{n}(t)),$$

所以,

$$[\mathbf{S}'(t_0) + d_0(\cos \theta_0 \mathbf{n}'(t_0) + \sin \theta_0 \mathbf{b}'(t_0))] \times [\cos \theta_0 \mathbf{b}(t_0) - \sin \theta_0 \mathbf{n}(t_0)] = 0$$

而球  $\Sigma^0$  的包络也可以看作是一条空间自由基曲线的偏置距离  $d(t)$  函数, 它是一个与旋转角度参数  $\theta$  无关的, 仅仅依赖弧长参数  $t$  的函数, 而是. 那么, 管道曲面亦有另一种参数表示:

$$\Sigma(t) = \{x \in R^3 \mid \|x - \mathbf{S}(t)\| = d(t), d(t) > 0\}.$$

### 1.2 正交环面

正交环面是管道曲面的一种推广形式, 所以, 它也属于管状曲面的范畴. 正交环面可以视为一个单参数圆形族, 是以基曲线上的对应点为圆心产生的法平面而生成的[5].

定义 3. 假设一条空间  $C^2$  自由曲线  $\mathbf{S}(t)$ , 一个  $C^1$  与角度参数  $\theta$  无关而是关于弧长参数  $t$  的正值参数函数  $d(t)$ ,  $\mathbf{R}(t, \theta)$  表示的正交环面的参数化便有如下形式:

$$\mathbf{R}(t, \theta) = \mathbf{S}(t) + d(t)[\cos \theta \mathbf{n}(t) + \sin \theta \mathbf{b}(t)].$$

因为在偏置曲面理论中, 基曲线的弧长参数、曲率和挠率都是曲线的几何不变量, 所以这三个基矢量及其对弧长的各阶导矢量也将是曲线的几何不变矢[6]. 在欧几里得空间中, 曲线和曲面的曲率用转过的角度和对应弧长的商的极限来表示, 即  $\kappa = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{s}$ .

## 2 管状曲面的几何特性

本文选择曲率来刻画管状曲面的几何性质, 例如一个圆形, 圆上各点弯曲程度一样, 曲率半径就是该圆的半径. 而对于半径为变化函数的管状曲面, 这些自交点的曲率半径不同于其它点的半径, 所以, 研究自交现象的几何特性, 首当其冲要分析曲面的曲率[6].

设  $\mathbf{s} = \mathbf{s}(t)$  为  $R^3$  中的  $C^2$  正则曲线,  $t$  为弧长参数.  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{S}'(t)$  为沿  $\mathbf{s}(t)$  的单位切向量场, 则称  $\kappa(t) = |\mathbf{V}'(t)| = |\mathbf{S}''(t)|$  是曲线  $\mathbf{s}(t)$  在点  $t$  的曲率.

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= |\mathbf{V}'(t)| \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\mathbf{V}(t + \Delta t) - \mathbf{V}(t)}{\Delta t} \right| \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \right| \end{aligned}$$

曲线上邻近两点  $t$  与  $t + \Delta t$  的单位切向量  $\mathbf{V}(t)$  与  $\mathbf{V}(t + \Delta t)$  间的夹角  $\Delta \theta$  对弧长的变化率, 即反映了曲线的弯曲程度. 当  $\kappa(t) \neq 0$  时, 称  $\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$  为曲线  $\mathbf{S}(t)$  在点  $t$  的曲率半径.

例如, 一个管道曲面如图 1(a), 其基曲线如图 1(b), 当形成变距管状曲面时在基曲线的拐点  $t_0$  附近由于曲率  $\kappa(t_0) > \frac{1}{d_0}$ , 导致管道曲面在该处是不连续的, 如图 1(c), 因为主法线  $\mathbf{n}(t)$  和副法线  $\mathbf{b}(t)$  在基曲线的拐点附近呈现瞬时波动的状态; 当没有拐点时, 主法线  $\mathbf{n}(t)$  和副法线  $\mathbf{b}(t)$  关于切线方向也可能发生大幅度的扭曲现象, 这时就得到较弱的参数效果. 例如:  $\mathbf{S}''(t_0) = 0$  表示拐点出现, 反应在管道曲面上在脊曲线拐点处就会有尖点出现.

### 2.1 管道曲面的性质分析

定义 4. 假设脊曲线上任意点  $\mathbf{S}(t')$ , 偏置距离为  $d_0$  的管道曲面是  $\mathbf{P}(t, \theta)$ , 那么表面上的点和脊曲线上点之间的距离可以用如下函数表示:

$$D_d(t', t, \theta) = \|\mathbf{S}(t') - \mathbf{P}(t, \theta)\|^2, \text{ 其中, } t', t \in [0, L], \theta \in [0, 2\pi].$$

若管道曲面  $\mathbf{P}(t, \theta)$  没有发生自交现象, 那么一定有  $D_d(t', t, \theta) \geq d_0^2$ ; 如果管道曲面发生了自交现象<sup>[6]</sup>, 则必然有  $D_d(t', t, \theta) < d_0^2$ .

任意给定一组数据, 通过实验仿真, 在 MATLAB 软件下得到如下的管道曲面平面截图: 如图 2 是拟合数据得到的脊曲线, 如图 3, A、B 两点处内外曲线光滑, 即没有发生自交, 如图 4, A 点处内曲线自交, B 点处外曲线自交, 这种情况就属于自交现象. 则将曲面  $\mathbf{P}(t, \theta)$  上的一类点称之为自交点<sup>[7]</sup>.

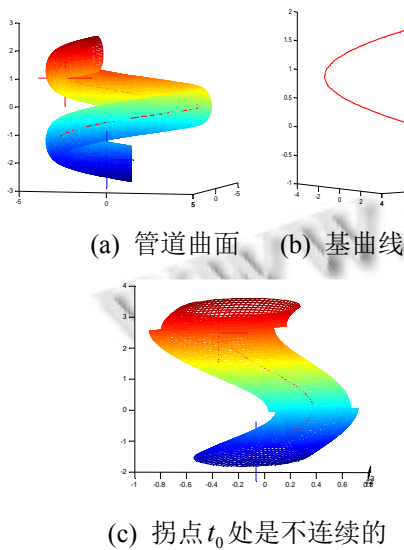


图 1 正交环面在拐点处不连续

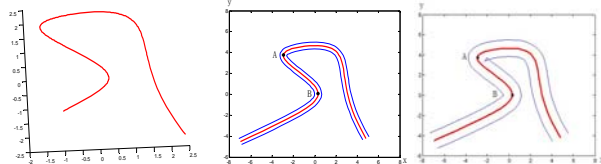


图 2 脊曲线 图 3 偏置无相交 图 4 偏置相交

现定义如下判别方程:

$$\text{定义 5: } F(t', t, \theta) = D_d(t', t, \theta) - (d_0 - \varepsilon)^2,$$

其中,  $\varepsilon$  是一个任意小的正实数.

假设, 管道表面上的点  $P(t_0, \theta_0)$  是属于某个自交领域内的点, 则在脊曲线上一定可以找到对应点  $s(t'_0)$ , 使得  $F(t'_0, t_0, \theta_0) \leq 0$  成立. 点属于集合  $\{(t'_0, t_0, \theta_0) | F(t'_0, t_0, \theta_0) = 0\}$ , 所有满足这种关系的点均是管道曲面自交域内的点, 则这些就是要被去除的点. 为了得到去自交后的管道曲面, 则自交点的解集应被投影到  $t\theta$ -平面上, 为了消除边界上  $t'$  对边界投影区域的影响, 还需附加条件  $F_r(t', t, \theta) = 0$  成立. 因此, 非正则管道曲面自交区域的参数集合:

$$P = \{p(t, \theta) | F(t', t, \theta) \leq 0, F_r(t', t, \theta) = 0, \forall t', t, \theta\}.$$

具体的算法过程如下:

输入:

- $s(t)$ , 自由有理曲线;
- $d_0$ , 管道曲面的半径;
- $p(t, \theta)$ , 管道曲面;
- $\varepsilon$ , 一个任意小的正数.

输出:

去除自交区域后的管道曲面.

Begin:

```

 $D_d(t', t, \theta) \leftarrow \|\mathbf{S}(t') - \mathbf{P}(t, \theta)\|^2;$ 
 $F(t', t, \theta) \leftarrow D_d(t', t, \theta) - (d_0 - \varepsilon)^2;$ 
 $\varepsilon = \alpha d_0;$ 
 $M(t', t, \theta) \leftarrow F_r(t', t, \theta);$ 
 $Z \leftarrow$  联立  $F, M$  的领域;
 $Z_{t\theta} \leftarrow$  把  $Z$  映射到  $t\theta$ -平面上相应的区域;
return 管道曲面上  $p(t, \theta)$  不包含  $Z_{t\theta}$  的区域;
    
```

End.

注意: 上式算法过程中, 距离  $D_d$  是平方形式, 则  $D_d, F, M$  都是有理函数, 参数  $\alpha \in [0.01, 0.05]$ , 经过算法处理后, 得到管道曲面片的集合, 相交的区域最终可以将其去除.

### 2.2 正交环面的性质分析

类似管道曲面的分析, 正交环面  $\mathbf{R}(t, \theta)$  上任意点与脊曲线  $\mathbf{S}(t')$  上点之间的距离, 下面给出一些符号标记函数关系:

定义 6: 假设脊曲线在任意参数  $\bar{t}$  点处为  $\mathbf{S}(\bar{t})$ , 对应正交环面是  $\mathbf{R}(t, \theta)$ , 则脊曲线与正交环面对应点之间的距离可用如下函数表示:

$$D_d(\bar{t}, t, \theta) = \|\mathbf{S}(\bar{t}) - \mathbf{R}(t, \theta)\|^2,$$

其中,  $\bar{t}, t \in [0, L], \theta \in [0, 2\pi]$ .

同理, 如管道曲面自交现象的条件分析, 在脊曲线上任意一点  $\bar{t}$ , 都有  $D_d(\bar{t}, t, \theta) \geq d(t)$  成立, 则可判定正交环面上的点  $(t, \theta)$  为自由不相交的. 如图(5)是任意给定数据拟合的脊曲线, 图(6)A、B 点处内外曲线均是光滑曲线, 即没有发生自交现象; 若在正交环面上存在某点  $\mathbf{R}(t_0, \theta_0)$ , 在脊曲线上可以找到一点  $\bar{t}_0$ , 它们满足  $D_d(\bar{t}_0, t_0, \theta_0) < d(t_0)$ , 则称这种现象叫做自交现象, 这一类点称为自交点. 如图(7)示, 内曲线在 A、B 点处出现了尖点, 这类点就是自交点<sup>[8]</sup>.

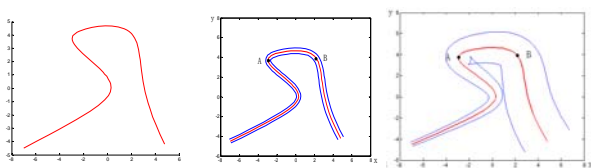


图 5 脊曲线 图 6 无自交 图 7 环面自交

综上分析,构造如下距离函数方程:

$$J(\bar{t}, t, \theta) = D_d(\bar{t}, t, \theta) - [d(t) - \bar{\varepsilon}]^2.$$

因为,公差  $\bar{\varepsilon}$  是一个任意小的正实数,则正交环面上的自交点  $\mathbf{R}(t_0, \theta_0)$  全部都出现在  $J(\bar{t}_0, t_0, \theta_0) = 0$  的解空间中.

由于正交环面  $d(t)$  距离函数的特殊性,对自交点的选取将存在一定的复杂性,借助法平面的性质约束自交点,建立如下方程:

$$G(\bar{t}, t, \theta) = \|\mathbf{S}(\bar{t}) - \mathbf{R}(t, \theta), \mathbf{S}'(\bar{t})\| = 0.$$

通过以上分析,理论上可对管道曲面和正交环面的自交点予以探索,为了有效去除自交点,需将得到的区域投影到  $t\theta$ -平面上,为了消除变量  $\bar{t}$  对投影边界的影响,还需要附加条件  $J_t(\bar{t}, t, \theta) = 0$ ,由此可以得到  $t\theta$ -平面上自交区域的集合表示:

$$L = \{\mathbf{R}(t, \theta) | J(\bar{t}, t, \theta) = 0, G(\bar{t}, t, \theta) = 0, J_t(\bar{t}, t, \theta) = 0, \forall \bar{t}\}.$$

### 3 总结和展望

本文重点从管道曲面和管状曲面这两种特殊的管状曲面着手,分析了管道曲面和正交环面的定义,以及两者的关系,另外还分析了各自的几何特性,并结合范数的思想预测具有这种性质的管状体在实际应用中可能遇到的问题.由于材料的使用和空间大小的限制,管状曲面经常会遇到局部自交和全局自交的自交现象<sup>[9]</sup>,这种情况从理论到实践的应用中具体操作比较复杂,所以对自交点的寻找和去除工作更显得重要.所以,今后不仅要做到寻找自交点,主要任务还是要对自交点进行有效的探索和去除<sup>[10]</sup>,如图 7 是一类脊曲线组成的曲面、图 8 是偏置后相交的情况、图 9 是确定去除域、图 10 去除自交域后的理想状态.下一步的目标就是若干自交问题的研究.



图 8 脊曲线



图 9 偏置相交



图 10 确定自交域



图 11 去除自交域

### 参考文献

- 1 藺宏伟,王青,鲍虎军.曲线曲面正则性的判别条件.软件学报,2006,(17):516-524.
- 2 Hwan PM. Equivolumetric offsets for 2D machining with constant material removal rate. Computer Aided Geometric Design 25, 2008: 397-410.
- 3 Hwan PM. Equivolumetric offset surfaces. Computer Aided Geometric Design, 2009, (26): 17-36.
- 4 Hwan PM. Equivolumetric tubular solids for volume-preserving bend of cylinders. Computer Aided Geometric Design, 2009, 26(2): 137-151.
- 5 王玉鑫.非正则 Equivolumetric 管道曲面的研究[博士学位论文].兰州:兰州交通大学,2014.
- 6 徐森林,纪勇强,金牙东等.微分几何.合肥:中国科学技术大学出版社,2013.
- 7 Seong JK, Elber G, Kim MS. Trimming local and global self-intersections in offset curves/surfaces using distance maps. Computer-Aided Design, 2006, (38): 183-193.
- 8 Kim YJ, Lee J, Kim MS. Efficient offset trimming for planar rational curves using biarc trees. Computer Aided Geometric Design, 2012, (29): 555-564.
- 9 Kunkli R, Hoffmann M. Skinning of circles and spheres. Computer Aided Geometric Design, 2010, (27): 611-621.
- 10 Galvez A, Iglesias A, Puig-Pey J. Computing parallel curves on parametric surfaces. Applied Mathematical Modelling, 2014, (38): 2398-2413.